UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : probabilité et statistique

Par : GHRAEIRI ISMAIL

Théme

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE À BRUIT ADDITIF MULTIDIMENSIONNELLE

Devant le jury composé de :

BAHEDDI AISSA	Prof. Universitte KASDI Merbah- Ouargla	Encadreur
AKTI MOHAMED	M.A. Universitte KASDI Merbah- Ouargla	Président
BOUSAD ABDELMALEK	M.A. Universitte KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma famille, à tous mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, surtout mon frère aîné

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé à achever ce travail.

Je tiens tout a remercier en premier lieu mon encadreur Monsieur BAHEDDI AISSA de m'avoir proposé ce théme et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

J'aimérais aussi remercier les membres des jurys pour avoir accepter à discuter mon mémoire
Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail, Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué é la finalisation de ce travail.

Table des matières

Dédication **1**

Remerciement **2**

Notations et Prémilinaires **1**

1 Revue de Littérature **3**

2 Aperçu théorique **5**

1.22.1 calcul stochastique 55

1.1.22.1.1 Processus stochastiques 55

2.1.22.1.2 Le mouvement brownien 66

3.1.22.1.3 Filtration 77

4.1.22.1.4 Martingale 77

5.1.22.1.5 Formule d'Itô 88

6.1.22.1.6 L'intégrale stochastique 99

2.22.2 calcul matriciel 1212

1.2.22.2.1 Type de Matrice 1212

2.2.22.2.2 Matrice exponentielle : 1414

3.2.22.2.3 Formulaire de dérivation matricielle 1515

4.2.22.2.4 normes matricielles 1616

3 l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle 18

1.33.1 Introduction 1818

2.33.2 Théorème utilisées 1919

3.33.3 les types de l'équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle 1919

1.3.33.3.1 Léquation diffrentielle stochastique bruit additif homogéne à coefficient constant 2020

2.3.33.3.2 Léquation diffrentielle stochastique bruit additif homogéne à coefficient constant à coefficient variable 2121

3.3.33.3.3 Léquation diffrentielle stochastique bruit additif non homogéne à coefficient constant 2222

4.3.33.3.4 Léquation diffrentielle stochastique bruit additif non homogéne à coefficient variable 2323

4.33.4 Position du problème 2525

5.33.5 les types de l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle 2626

6.33.6 Théorème utilisées 2626

1.6.33.6.1 Solutions de l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnel 2828

2.6.33.6.2 Exemple 3030

NOTATIONS

➤X Variable aléatoire

➤$\hbar_{[t_0,t]} = \exp(\frac{1}{2}A \cdot t^2)$

➤$(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})'$ Dérivation $(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})$

➤$\|.\|$: La norme

➤T Le ensemble Les temps

➤$X =^{\pounds} Y$ X et Y ont même lois

Introduction

Le concept d'équation différentielle stochastique à bruit additif généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. ou définit l'équation différentielle stochastique à bruit additif pour le mouvement brownien W_t par

$$\begin{cases} dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1}$$

ou $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonction avec $b(t)$ indépendante de X_t

$$\begin{cases} a : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto a(t) \in \mathbb{R} \\ b : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto b(t) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle stochastique (1) à élè prise par des scientifiques.

Cela à permis aux chercheurs de trouver une solution à cette équation .

La résolution de l'équation conduit à une question plus large , c'est ce que nous allons discuter dans ce mêmoire , qui est la résolution de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle .

formulation de la problématique

-Comment résoudre l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle ?

les sous- problémes :

1-S'assurer de l'existence d'une telle solution

2-La solution trouvée est-t-elle unique ?

-Hypothèses : La condition du théorème d'Itô pour la forme multidimensionnelle s'assure de

1-l'existence de la solution

2- l'unicité d'une telle solution

Chapitre 1

Revue de Littérature

Auteur : Bahram Houchmandzadeh

Titre :les processus stochastique

Chapitre-9 :les équations différentielles stochastiques et calcul d'Itô

Résume : Dans ce chapitre du livre,l'auteur met l'accent sur le processus de Wiener, qui est inclus dans l'équation différentielle stochastique,qui est pris en compte .
et il est donc nécessaire de définir des conditions sur le processus de Wiener pour faciliter l'accès à la solution. de l'équation différentielle stochastique

Mots-clés : formule dItô, processus Wiener, processus stochastique

Résultat :

$$\begin{cases} dw(t) = \sqrt{dt} \\ (dw(t))^2 = dt \\ dtdt = dB_t dt = dtdB_t = 0 \\ w(t) = \int_0^t dw(t) \end{cases}$$

Auteur : Karaouzene Naila

titre :Équations différentielles stochastiques

chapitre–2 :Équations différentielles stochastiques

Résume : Ce chapitre du livre se concentre sur la théorie d'Itô de la solution de l'équation différentielle Stochastique

Mots-clés : Integrale d'Itô,formule d'Itô,processus d'Itô

Résultat :

$$d(X_tY_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t$$

Auteur : Monique jeanblanc,Thomas simon

titre :Éléments de calcul stochastique

chapitre :Équation différentielles stochastique

Résume : Dans ce chapitre, l'auteur du livre à reliée l'équation différentielle ordinaire à l'équation différentielle stochastique et explique que l'équation différentielle stochastique est une généralisation de l'équation différentielle ordinaire.Il a introduit la théorie de l'existence et l'unité de l'équation différentielle stochastique

Résultat : L'un des résultats les plus importants dans la théorie est l'existence

$$des\ \ constants\ \ KetD\ \ positives \begin{cases} 1- \quad (condition\ \ de\ \ lipschitz) \\ \mid b(t,x) - b(t,y) \mid + \mid a(t,x) - a(t,y) \mid \leq K \mid x-y \mid \\ 2- \quad (condition\ \ de\ \ croissance) \\ \mid a(t,x) \mid + \mid b(t,x) \mid \leq D(1+ \mid x \mid) \end{cases}$$

Alors l'équation accepte une solution

synthèse

La lecture précédente aide à la résolution l'équation différentielle stochastique

Chapitre 2

Aperçu théorique

2.1 calcul stochastique

2.1.1 Processus stochastiques

Définition 2.1.1 ([1])

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.

Remarque 2.1.2

En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considére que le processus est indexé par le temps t. Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \in \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \in \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$), Un processus dépend de deux paramétres : $X_t(\omega)$ dépend de t(en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

Pout $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pout $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus réguliéres.
Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $T = \mathbb{R}_+$ ou $[0; 1]$

Définition 2.1.3 ([2])

Égalités de processus Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $n \in \mathbb{N}$et$t_1, ..., t_n \in T$,

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) =^{\pounds} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$$

On ècrira $X =^{\pounds} Y$.
On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, $P(X_t = Y_t) = 1$.
Deux processus X et Y sont dit indistinguables s'il existe N nègligeable tels que pour $\omega \notin N$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in T$; de façon un peu abusive (parce que $X_t = Y_t, \forall t \in T$ n'est pas nécessairent un évènement), on écrit :$P(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1$.
Exemple Soit $N \sim N(0, 1)$ et pour tout t : $X_t = N, Y_t = -N$. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ ont même lois fini-dimensionnelles tandis que $P(X_t = Y_t) = P(2N = 0) = 0$, ie. X, Y ne sont pas version l'un de l'autre.
2) Soit l'espace de probabilité $([0, 1]; B([0, 1]), \lambda)$ et $T = [0, 1]$. Considérons D la diagonale de $[0; 1] \times [0; 1]$ et définissons

$$X(t, \omega) = 0 \ \forall (t, \omega) \quad Y(t, \omega) = 1_D(t, \omega)$$

Pour t fixé, on a $X(t, \omega) = 0$ et $Y(t, \omega) = 1_{\{t\}}(\omega)$. On a donc $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ pour tout $\omega \neq t$, c'est à dire ps : les processus X, Y sont versions l'un de l'autre. Pourtant, $P(\omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega), \forall t) = 0$: les processus Xet Y ne sont pas indistinguables.

2.1.2 Le mouvement brownien

Définition 2.1.4 ([3])

Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un mouvement brownien s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes (équivalentes) :
(a) X est un processus gaussien centré et de fonction de covariance $E[X_s X_t] = s \wedge t$:
(b)X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires tel que $X_t \sim N(0; t)$ pour tout $t \geq 0$

Proposition 2.1.5

Un processus W est un mouvement brownien de matrice de covariance C si et seulement si
$(i) W_0 = 0$,
$(ii) W$ est continu,
$(iii) W$ est gaussien,
(iv) pour tout $t, s > 0$, $E(W_t) = 0$ et$E(W_t W_s^{tr}) = (t \wedge s)C$.
Dans le paragraphe qui suit, nous introduisons la notion de filtrations utile pour la définition des processus de Markov et des martingales.

2.1.3 Filtration

Définition 2.1.6 ([4])

Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$est un famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Si on considére un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, on considére souvent la filtration canonique qu'il engendre : $\mathcal{F}^x = \sigma(X_s : s \leq t), t \geq 0$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible à une date donnée : $\mathcal{F}_t^x$ représente l'information véhiculée par le processus X jusqu' à la date t. Une filtration est P-compléte pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les événements de mesure nulle, ie. $N = \{N \in F \text{tel que } P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

Proposition 2.1.7 ([5])

1. On a toujours $\mathcal{F}_{T^-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T^+}$. Si la filtration est continue à droite $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T^+}$.
2. Une variable aléatoire T :$\Omega \to \mathbb{R}_+$ est un$(\mathcal{F}_{t^+})_t$ temps d'arret ssi pour tout $t \geq 0, \{T \langle t\} \in \mathcal{F}_t$. Cela equivaut encore à dire que $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable pour tout $t \geq 0$.
3. Si $T = t$ alors , $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{T^+} = F_{t^-}$ et $\mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_{t^-}$
4. Pour $A \in \mathcal{F}_\infty$, posons $T^A(\omega) = T(\omega)$si $\omega \in A$, $+\infty$ sinon. Alors $A \in \mathcal{F}_T$ ssi T^A est un temps d'arrét.
5. Le temps d'arrét T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.
6. Si $S \leq T$ sont deux temps d'arrét alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Pour S, T des temps d'arrét, $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrét et $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. De plus $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$.
7. Si S_n est une suite croissante de temps d'arrét alors $S = lim_{n \to +\infty}\ S_n$ est aussi un temps d'arrét et $\mathcal{F}_{S^-} = \vee_{n,eq1} \mathcal{F}_{S_n^-}$.
8. Si S_n est une suite décroissante de temps d'arrét alors $S = lim_{n \to +\infty}\ S_n$ est aussi un temps d'arrét de $(\mathcal{F}_{t^+})_{t \geq 0}$ et $\mathcal{F}_{S^+} = \cap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n^+}$.
9. Si S_n est une suite décroissante stationnaire de temps d'arrét $(ie. \forall \omega, \exists N(\omega)$, $\forall n \geq N(\omega), S_n(\omega) = S(\omega))$ alors $S = lim_n S_n$ est aussi un temps d'arrét pour $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *et* $\mathcal{F}_S = \cap_n \mathcal{F}_{S_n}$ (comparer avec 8))[6].

2.1.4 Martingale

Définition 2.1.8

Un processus $X = \{X_t; t \in \tau\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale (resp.sous-martingale, surmartingale) si

$E[X_t] < \infty, \forall t \in \tau$,

X est $\mathcal{F}_t$-adapté,

[6]Jean-Ghristople Breton :processus stochastiques-2017-page(70)

$\forall s,t \in \tau, 0 \leqslant s \leqslant t : E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \ p.s. \ (resp \ . \geq X_s, \leq X_s)$.

Si X est une martingale (resp.sous-martingale, sur-martingale), alors l'application $t \in \tau$ $t \longmapsto E(X_t)$ est constante (resp. croissante, décroissante).

Exemple si $B = (B_t)_t \geq 0$ un mouvement brownien et $\theta \in \mathbb{C}$,alors les processus

$$(B_t)_{t\geq 0}, (B_t^2 - t)_{t\geq 0}$$

$\mathbb{E}\,|B_t| = 0 < \infty$

B_t est adapté à $\mathcal{F}_t = \sigma(B_t)$

$\mathbb{E}(B_t/\mathcal{F}_s) = B_s$

$\mathbb{E}\,|B_t^2 - t| \leq \mathbb{E}\,|B_t^2| + t = t + t < \infty$

B_t^2 est adapté à $\mathcal{F}_t = \sigma(B_t)$

$(B_t^2 - t)$ est adapté à $\mathcal{F}_t = \sigma(B_t)$

$\mathbb{E}((B_t^2 - t)/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 - (t + s - s)/\mathcal{F}_s)$

$= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 - (t - s)/\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((B_s)^2 - s/\mathcal{F}_s) + 2\mathbb{E}((B_t - B_s)B_s/\mathcal{F}_s)$

$= (t - s) - (t - s) + B_s^2 - s + 0 = B_s^2 - s$

$$\begin{aligned} E((B_t^2 - t)/F_s) &= E((B_t - B_s + B_s)^2 - (t + s - s)/F_s) \\ &= E((B_t - B_s)^2 - (t - s)/F_s) + E((B_s)^2 - s/F_s) + 2E((B_t - B_s)B_s/F_s) \\ &= (t - s) - (t - s) + B_s^2 - s + 0 \\ &= B_s^2 - s \end{aligned}$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle de B.

Proposition 2.1.9

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t; W_t)$ un mouvement brownien standard, les processus suivants sont des $\mathcal{F}_t$ - martingales

W_t,

$W_tW_t^{tr}$ –tI (à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$),
$M_t^a = exp(aW_t - \frac{1}{2}a^2)$.pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

2.1.5 Formule d'Itô

Définition 2.1.10 ([7])

Un processus d'Itô est un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \sum_{i=0}^{d}\int_0^t \varphi_i(s)dB_S^{(i)}$$

–où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, de carré intégrable : $E[X_0^2] < +\infty$,
–est un processus adapté intégrable sur tout$[0,T]$: $\int_0^T |a(s)|\, ds < +\infty$,
–$B = (B^{(1)}, \ldots, B^{(d)})$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ à composantes indépendantes,
–$\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ est un vecteur de processus adaptés vérifiant $\int_0^T \|a(s)\|^2\, ds < +\infty$.
–Le terme $(\int_0^t a(s)ds)_{t\geq 0}$ s'appelle la partie à variation finie du processus X.
–Le terme $(\int_0^t \varphi(s)dB_s)_{t\geq 0}$s'appelle la partie martingale locale du processus X.
Exemple 1- Montrons que tB_t est un processus d'Itô. Remarquons que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}t\left(B\left(\frac{k+1}{n}t\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)t\right)$$

où la limite est prise dans $L^2(p)$.
Puisque les trajectoires du mouvement brownien sont presque partout continues, on a similaire ment

$$\int_0^t B_s ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}t\left(B\left(\frac{k+1}{n}t\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)t\right)$$

En additionnant les deux quantités, on trouve que

$$\int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s = tB_{tj}$$

ce qui se réecrit

$$d\left(tB_t\right) = tdB_t + B_t dt$$

2.1.6 L'intégrale stochastique

Définition 2.1.11

soit $\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 1_{[t_k,t_{k+1}]}(t)$ un processus en escalier, l'intégrale stochastique de φ est définie par

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi dW_s + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}), \quad t \geq 0$$

On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{cases} I : \varepsilon \to L^2(\Omega, C([0,T])) \\ \varphi \to I(\varphi) \end{cases}$$

défini par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

ε est dense dans $M^2(0,T)$,on on peut alors prolonger I de manière unique en une application linéaire continue I dé nie sur $M^2(0,T)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, C([0,T]))$,Cette application sera également notée

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s$$

Définition 2.1.12 *(Processus simples) [8]*

Une fonction aléatoire adaptée φ est dite en escalier si elle est constante par intervalles c'est à dire qu'elle s'écrit

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_t(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$$

où X_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable.
Si en plus pour chaque $0 \leq i \leq n-1, \mathcal{E}\left[X_I^2\right] < +\infty, \varphi$ est dite de carré intégrable.L'ensemble des fonctions aléatoires adaptées, en escalier et carré intégrable est notée S.

Définition 2.1.13 *(Martingale locale)*

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré,$X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$. telle que

$i)$ la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $\lim_{t \to \infty} T_n = +\infty$ p.s
$ii)$ Pour tout n, le processus $X^{T_n} 1 \{T_n \rangle 0\}_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale uniformément intégrable.

Proposition 2.1.14

Toute martingale continue est une martingale locale.
Une martingale locale positive est une surmartingale.
une martingale locale bornée est une martingale.

Généralisation de l'intégrale stochastique

soit $\phi \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, on considére le processus défini par

$$X_t = \int_0^t \phi(t) dB_s, tsxt \quad t \geq 0.$$

[8]Monique Jeanblanc, Thomas Simon :element de calcul stochastique :2005 :page(43)

Proposition 2.1.15

Soit $\varphi \in S$ une fonction en escalier et de carré intégrable. Alors

$$\mathbb{E}\left[\int \varphi(t)dB_t\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int \varphi(t)dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int (\varphi(t))^2\, dt\right]$$

Proposition 2.1.16 *[9]*

La variation quadratique d'un processus d'Itô est donnée par

$$d\langle X, X\rangle_t = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(t)^2 dt$$

En général pour des processus d'Itô $X; Y$, on calcule la variation quadratique $\langle X, Y\rangle$, par bilinéarité avec la régle de calcul formel suivante :

$$\langle dt, dt\rangle = 0 \qquad \langle dB_t, dB_t\rangle = dt.$$

Ainsi vnewline

$$d\langle X, Y\rangle_t = \sum_{i=1}^{d} \varphi_t(t)\phi_i(t)dt$$

[9]Jean-Ghristople Breton :processus stochastiques-2017-page(3)

2.2 CALCUL MATRICIEL

Définition 2.2.1

Soit m et n deux entiers . Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes de la formes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

les a_{ij} sont des réels appelés coefficients de A . On notera aussi $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m 1 \leq n}$ ou $A = (a_{ij})$

2.2.1 Type de Matrice

Définition 2.2.2 *[[10]] [Matrice de Wigner]*

Soit $W_{ij, 1 \leq i \leq j}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout$1 \leq i \leq j$ On suppose de plus que

$$\forall k, \sup_{i,j} \mathbb{E}(|W_{ij}|^k) = C(k) < +\infty$$

La matrice W_N est une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ est définit par

$$W_N = \begin{cases} W_{i,i} & si \quad i = j \\ W_{i,j} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Définition 2.2.3 *(Matrice Carrée)*

Une matrice de taille $n \times n$ est dite carrée. L'ensemble de toutes ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i \leq n$ sont appéles les coefficients diagonaux de A.

[10]les plus graudes valeurs propres de matrice aléatoires

Définition 2.2.4 *(Matrice Diagonale)*

On appelle matrice diagonale une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.5 *(Matrice Identité)*

La matrice identité de taille n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients valent 0. On la noté In , Idn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.6 *(Matrice Triangulaire)*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- si $a_{ij} = 0$ dés que $i > j$ alors la matrice A est dite triangulaire supérieure.
- si $a_{ij} = 0$ dés que $i < j$ alors la matrice A est dite triangulaire inférieure.
- si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 < i, j < n$ (autrement dit si$A^t = A$) alors A est dite symétrique .
- si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous $1 < i, j < n$ (autrement dit si$A^t = -A$) alors A est dite antisymétrique

  En particulier les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Définition 2.2.7 *(Matrice Inverse)*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas , B est appelé inverse de A et noté A^{-1}. L'ensemble des matrices inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désigné par $GI_n(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.8 *Si A et B sont dans $GI_n(\mathbb{R})$ alors l'inverse de le produit AB est :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Définition 2.2.9 *(Trace de matricielle)*

on appelle trace d'un matrice carré $A = (a_{ij})_{i,j=1...n,qu'}$ un note TrA, la somme de ses éléments diagonaux

$$TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Définition 2.2.10 *(valeur propres)*

(λ) est une valeur propre de A si et seulement si

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Définition 2.2.11 *(vecteur propres)*

Si (λ) est une valeur propre de A, les vecteurs propres pour la valeur propre (λ) sont les solutions non nulles du système linéaire homogène

$$(A - (\lambda)I)X = 0$$

. On sait que A possède des valeurs propres et qu'en résolvant ce système par la méthode du pivot, on pourra trouver des vecteurs propres pour faire les colonnes de P.

Remarque s'il existe D matrice diagonale et P matrice inversible et $M = PDP^{-1}$ alors M est semblable à D

2.2.2 Matrice exponentielle :

Définition 2.2.12 *(matrices exponentielle)* soit $A \in M_n(\mathcal{K})$.la série $\sum_{n=0}^{+\infty}$ est normalement convergente sur tout compact ;donc a un sens .on l'appelle exponentielle de la matrice A et on la note $exp(A) = e^A = \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{A^i}{i!}$

Exponentielle d'une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale d'ordre n. On vérifie facilement que

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

si $A = PDP^{-1}$ alores

$\exp A = P \exp(D) P^{-1}$

Proposition 2.2.13

1-pour tout opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\det e^A = e^{TrA}$$

3-si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A * e^B$

4-pour toute matrice A on a$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

5-$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^T$ avec $\det A \neq 0$

6-$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

7-λ les valeur propres

si A set une matrice triangulaire on diagonale alors $P(\lambda)$

$$\lambda_i = a_{ii}$$

8- Si P est une matrice non singuliére, alors

$$e^{PBP^{-1}} = Pe^{-B}P^{-1}$$

2.2.3 Formulaire de dérivation matricielle

Proposition 2.2.14

1-soit $v \in \mathbb{R}^k$ et $a\mathbb{R}^k$

$$\frac{\partial(v^T a)}{\partial v} = \frac{\partial(a^T v)}{\partial v} = a \tag{2.1}$$

2-soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^k$ et une matrice $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$

$$\frac{\partial(v^T M v)}{\partial v} = (M + M^T)v \tag{2.2}$$

En particulier, si M est symétrique, $M^T = M$ et

$$\frac{\partial(v^T M v)}{\partial v} = 2Mv \tag{2.3}$$

3-soit $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$

$$\frac{\partial(log(det(M)))}{\partial M} = M^{-1} \tag{2.4}$$

4- soit $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$ et $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ symétrique :

$$\frac{\partial(Tr(AM))}{\partial M} = A \tag{2.5}$$

5-soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^k$ et matrice $M \in \mathbb{R}^{K\times K}$

$$\frac{\partial}{\partial v}(Mv)^T(Mv) = 2M^T Mv \tag{2.6}$$

2.2.4 normes matricielles

Définition 2.2.15

Une norme d'un espace vectoriel E est une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in E, \|x\| \geq 0,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E, \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|,$$

$$\forall x, y \in E, \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Définition 2.2.16

Une norme matricielle de $\mathbb{R}^{n \times n}$ est une norme qui vérifie

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Définition 2.2.17

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, on définit sa norme de Frobenius par :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^T A)},$$

Proposition 2.2.18

Pour tout vecteur$x \in \mathbb{R}_+$, on a les inégalités :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2,$$

Proposition 2.2.19

La norme de Frobenius est une norme matricielle. Elle vérifie les inégalités suivantes

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2,$$

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_2 ,$$

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F ,$$

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F ,$$

pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{m\times p}$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty .$$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors :

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|,$$

Chapitre 3

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE À BRUIT ADDITIF MULTIDIMENSIONNELLE

3.1 Introduction

L'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle est généralisation des équation différentielle stochastique unidimensionnelle dans ce chapitre nous preseution quelques théorèmes à fin de résoudre ces équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle

Nous utilisons par un ils exemples cites dons les domaines tel que Croissance démographique Achat et vente .. et autres

1-**Équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle**

Avant d'aborder la résolution des équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle ,on présent la forme des solution des équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle

3.2 Théorème utilisées

pour l'équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle

Théorème 3.2.1 *(Existence et unicité)*

considérons les fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *,*$g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1-

$$| b(t,x) - b(t,y) | + | a(t,x) - a(t,y) | \leqslant K | x - y |$$

2-

$$| b(t,x) | \leqslant D(1+ | x |)$$

et

$$| a(t,y) | \leqslant D(1+ | x |)$$

pour $0 \leq t < T$ *,*$x, y \in \mathbb{R}^n$ *,* k, D *est une constant positive .*

Théorème 3.2.2 *(Formule d'Itô)*

[1] *Soient* X *une semi-martingale et* $F : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2*. Alors*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)d < X, X >_s$$

preuve Existence et unicité de la solution

3.3 les types de l'équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle

preuve Existence et unicité la solution

$$\begin{cases} dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.1}$$

[1] Jean-Ghristople Breton :processus stochastiques-2017-page(150)

$f(t, X_t) = (a(t)X_t + c(t))$

$g(t, X_t) = b(t)$

$f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a, b, c : [0, T] \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(t,X) - f(t,Y)| + |g(t,X) - g(t,Y)| &= |(a(t)X + c(t)) - (a(t)Y + c(t))| + |b(t) - b(t)| \\ &= |a(t)(X - Y)| \\ &\leq |a(t)|\,|(X - Y)| \end{aligned} \tag{3.2}$$

1-D_a ferme et borne

2-a fonction contine sur D_a

(1) et (2) $\exists k \in \mathbb{R}$ et $k \leq \infty$

$$\sup_{t \in D_a} |a(t)| = k$$

alors

$$|f(t,X) - f(t,Y)| + |g(t,X) - g(t,Y)| \leq k\,|X - Y|$$

$$\begin{aligned} |f(t,X)| &= |a(t)X + c(t)| \\ &\leq |a(t)|\,|X| + |c(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} (|a(t)|\,, |c(t)|)(1 + |X|) \\ &\leq k'(1 + |X|) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\exists k'' \in \mathbb{R}$ et $k'' \leq \infty$

$$\sup_{t \in D_b} |b(t)| = k''$$

$$\begin{aligned} |g(t,X)| &= |b(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [0T]} (|b(t)|) \\ &\leq k''(1 + |X|) \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3.1 L'équation différentielle stochastique à bruit additif homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = aX_t dt + bdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

la forme de solution

$$X_t = e^{-at}(X_0 + b\int_0^t e^{as} dW_s)$$

preuve

$$dX_t = -aX_t dt + bdW_t \tag{3.5}$$

$$X(t) = f(t, x) \tag{3.6}$$

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} -af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Longrightarrow -af = \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = b \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$f(t, X) = L(X_t)e^{-at} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = L'(X_t)e^{-at} = b \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} L'(X_t) = be^{at} \Longrightarrow L(X_t) &= \int_0^t be^{at} dW_s + X_0 \\ &\Longrightarrow X_t = f(t, X_t) = e^{-at}(X_0 + b\int_0^t e^{as} dW_s) \\ &\Longrightarrow X_t = X_0 e^{-at} + b\int_0^t e^{a(s-t)} dW_s \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3.2 L'équation différentielle stochastique à bruit additif homogéne à coefficient constant à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

si $b(t) = 0$

l'équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = a(t)X_t dt$$

solution

$$X_t = X_0 exp(\int_{t_0}^{t} a(t)ds)$$

on pose $\phi_{[t_0,t]} = exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$ et $X_0 = Y_t \Longrightarrow X_t = \phi_{[t_0,t]} Y_t$

$$\phi^{-1}_{[t_0,t]} = exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

$$(\phi^{-1}_{[t_0,t]})' = -a(t)\phi^{-1}_{[t_0,t]}$$

$$\begin{aligned} Y_t = X_t\phi^{-1}_{[t_0,t]} &\Longrightarrow dY_t = \phi^{-1}_{[t_0,t]} dX_t + X_t(\phi^{-1}_{[t_0,t]})' dt \\ &\Longrightarrow dY_t = \phi^{-1}_{[t_0,t]}(a(t)X_t dt + b(t)dW_t) + X_t(\phi^{-1}_{[t_0,t]})' dt \\ &\Longrightarrow dY_t = b(t)\phi^{-1}_{[t_0,t]} dW_t \\ &\Longrightarrow Y_t - Y_0 = \int_0^t b(t)\phi^{-1}_{[t_0,t]} dW_t \\ &\Longrightarrow Y_t = X_0 + \int_0^t b(t)\phi^{-1}_{[t_0,t]} dW_t \\ &\Longrightarrow X_t = \phi_{[t_0,t]}(X_0 + \int_0^t b(t)\phi^{-1}_{[t_0,t]} dW_t) \end{aligned}$$

3.3.3 L'équation différentielle stochastique à bruit additif non homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = (aX_t + c)dt + bdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

la forme de solution

$$X_t = e^{-at}[(X_0 + \frac{c}{a}(1 - e^{-at})) + b\int_0^t e^{-as} dW_s]$$

preuve

l'équation différentielle stochastique non homogène

$$dX_t = (aX_t + c)dt + bdW_t$$

$c = 0$ équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = aX_t dt \tag{3.11}$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = adt \longmapsto \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t ads \longmapsto lnX_t - lnX_0 = at$$

$$X_t = X_0 e^{at}$$

solution de la équation 3.11

$$X_t = X_0 e^{at}$$

on pose $X_0 = Y_t$

$$X_t = Y_t e^{at} \Longrightarrow Y_t = X_t e^{-at}$$

$$dY_t = e^{-at} dX_t - ae^{-at} X_t dt$$

$$dY_t = e^{-at}(cdt + bdW_t)$$

$$dY_t = e^{-at}(cdt + bdW_t) \Longrightarrow \int_0^t dY_s = \int_0^t e^{-as}(cds + bdW_s)$$

$$\Longrightarrow Y_t - Y_0 = c\int_c^a e^{-as} ds + \int_0^t be^{-as} dW_s$$

$$= \frac{-c}{a}\int_0^t -ae^{-as} ds + \int_0^t be^{-as} dW_s$$

$$\Longrightarrow Y_t - Y_0 = \frac{-c}{a}(e^{-at} - 1) + \int_0^t be^{-as} dW_s$$

$$\Longrightarrow X_t = e^{at} Y_t = e^{at}(X_0 + \frac{c}{a}(1 - e^{-at}) + b\int_0^t e^{-as} dW_s) \tag{3.12}$$

3.3.4 L'équation différentielle stochastique à bruit additif non homogéne à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = a(t)X_t dt$$

solution

$$X_t = X_0 exp(\int_{t_0}^{t} a(t)ds)$$

on pose $\phi_{[t_0,t]} = exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$ et $X_0 = Y_t \Longrightarrow X_t = \phi_{[t_0,t]}Y_t$

$$Y_0 = X_0$$

$$\phi_{[t_0,t]}^{-1} = exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

$$(\phi_{[t_0,t]}^{-1})' = -a(t)\phi_{[t_0,t]}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
Y_t = X_t\phi_{[t_0,t]}^{-1} &\Longrightarrow dX_t = \phi_{[t_0,t]}dY_t + Y_t(\phi_{[t_0,t]})'dt \\
&\Longrightarrow \phi_{[t_0,t]}dY_t + Y_t(\phi_{[t_0,t]})'dt = (a(t)y_t\phi_{[t_0,t]} + c(t))dt + b(t)dW_t \\
&\Longrightarrow \phi_{[t_0,t]}dY_t = c(t)dt + b(t)dW_t \\
&\Longrightarrow dY_t = (c(t)dt + b(t)dW_t)(\phi_{[t_0,t]})^{-1} \\
&\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} dY_s = \int_{t_0}^{t}(c(s)ds + b(s)dW_s)(\phi_{s,t_0})^{-1} \\
&\Longrightarrow Y_t = Y_0 + \int_{t_0}^{t}(c(s)ds + b(s)dW_s)(\phi_{s,t_0})^{-1} \\
&\Longrightarrow X_t = (\phi_{[t_0,t]})(X_0 + \int_{t_0}^{t}(c(s)ds + b(s)dW_s)(\phi_{s,t_0})^{-1})
\end{aligned}$$

3.4 Position du problème

De nombreux phénomènes ont incité les scientifiques à rechercher en particulier, les phénomènes physiques et autres sont traduits à une équation différentielle et si les phénomènes aléatoires sont traduits en une équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Cependant, il existe de nombreux phénomènes basés sur plusieurs parties de l'information, ce qui nous amène à réfléchir à l'extension du premier concept et à l'étude de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle :
Soit $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ et $C, B \in \mathbb{R}^n$ Obtenons l'équation à résoudre.

$$\begin{cases} dX_t = (A(t)X_t + C(t))dt + B(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Ou sous la forme d'une matrice

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} dx_t^1 \\ \vdots \\ dx_t^n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \vdots \\ x_t^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \right) dt + \begin{pmatrix} b_t^1(t) \\ \vdots \\ b_t^n(t) \end{pmatrix} dW_t \\ \begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.5 LES TYPES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE À BRUIT ADDITIF MULTIDIMENSIONNELLE

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = AX_t dt + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle homogéne à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = A \cdot t \cdot X_t dt + B \cdot t \cdot dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle non homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + C)dt + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle non homogéne à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = (A \cdot t \cdot X_t + C \cdot t)dt + B \cdot t \cdot dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

3.6 Théorème utilisées

pour l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle

Théorème 3.6.1 *(Existence et unicité)*

considérons les fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1-

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| + \| g(t,x) - g(t,y) \| \leqslant K \| x - y \|$$

2-

$$\parallel f(t,x) \parallel \leqslant D(1+ \parallel x \parallel)$$

et

$$\parallel g(t,y) \parallel \leqslant D(1+ \parallel x \parallel)$$

pour $0 \leq t < T$,$x, y \in \mathbb{R}^n$, k, D *est une constant positive .*

Théorème 3.6.2 *(Formule d'Itô)*

[2] Si on considére p semi-martingales continues $X^1, \ldots, X^p$ *et* $F : \mathbb{R}^{\prime} \Longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *alors,*

$$F(X_t^1, ..., X_t^P) = F(X_0^1, ..., X_0^P) + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, ..., X_s^p) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, ..., X_s^p) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

preuve(existe et unicité)

$$\begin{cases} dX_t = (A(t)X_r + C(t))dt + B(t)dW_t \\ X_t = x \end{cases} \tag{3.13}$$

$f(t, X_t) = A(t)X_r + C(t)$

$g(t, X_t) = B(t)$

$f(t, X_t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$g(t, X_t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$A \in \mathcal{M}^{n \times n}$ $\qquad B, C, X \in \mathcal{M}^n$

$$\begin{aligned} \|f(t,X) - f(t,Y)\|_F + \|g(t,X) - g(t,Y)\|_F &= \|(A(t)X + C(t)) - (A(t)Y + C(t))\|_F + \|B(t) - B(t)\|_F \\ &= \|A(t)(X - Y)\|_F \\ &\leq \|A(t)\|_2 \|(X - Y)\|_F \\ &\leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sup_{t \in [0,T]} |a_{ij}(t)|^2} \|(X - Y)\|_F \end{aligned}$$

$\exists L \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sup_{t \in [0,T]} |a_{ij}(t)|^2} \leq L$

[2]Jean-Ghristople Breton :processus stochastiques-2017-page(150)

$$\|f(t,X)-f(t,Y)\|_F + \|g(t,X)-g(t,Y)\|_F \leq L\,\|(X-Y)\|_F$$

$$\begin{aligned}\|f(t,X)\| &= \|A(t)X+C(t)\| \\ &\leq \|A(t)\|\,\|X\| + \|C(t)\| \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]}(\|A(t)\|\,,\|C(t)\|)(1+\|X\|) \\ &\leq L'(1+\|X\|)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|g(t,X)\| &= \|B(t)\| \\ &\leq \sqrt{\sum_i (\sup_{t\in[0,T]} |b_i(t)|^2)}\end{aligned}$$

$$\sqrt{\sum_i (\sup_{t\in[0,T]} |b_i(t)|^2)} \leq L''$$

$$\|g(t,X)\| \leq L''(1+\|X\|)$$

3.6.1 Solutions de l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnel

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = AX_t dt + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Solutions

$$dX_t = AX_t dt$$

$$X_t = \exp(A\cdot t)X_0$$

on pose

$$X_0 = Y_t$$

$$X_t = \exp(A\cdot t)Y_t \Longrightarrow Y_t = \exp(-A\cdot t)X_t \tag{3.14}$$

$$dY_t = -A\exp(-A\cdot t)X_t dt + \exp(-A\cdot t)dX_t$$
$$dY_t = -A\exp(-A\cdot t)X_t dt + \exp(-A\cdot t)(AX_t dt + BdW_t)$$
$$dY_t = \exp(-A\cdot t)BdW_t$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \exp(-A\cdot t)\cdot B\cdot dW_t$$
$$X_t = e^{At}(\int_0^t e^{-As}B\cdot dW_s + X_0)$$

$$\boxed{X_t = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B\cdot dW_s}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle homogéne à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = A\cdot t\cdot X_t dt + B\cdot t\cdot dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

L'équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = A\cdot t\cdot X_t dt$$

$$X_t = \exp(\frac{1}{2}A\cdot t^2)X_0$$

on pose $\exp(\frac{1}{2}A\cdot t^2) = \hbar_{[t_0,t]}$

$(\hbar^{-1}_{[t_0,t]}) = \exp(-\frac{1}{2}A\cdot t^2)$

$(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})' = -A\cdot t\cdot(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})$ on pose $X_0 = Y_t$

$$Y_t = (\hbar^{-1}_{[t_0,t]})X_t$$
$$dY_t = (\hbar^{-1}_{[t_0,t]})dX_t - A\cdot t\cdot(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})X_t dt$$
$$dY_t = (\hbar^{-1}_{[t_0,t]})(A\cdot t\cdot X_t dt + B\cdot t\cdot dW_t) - A\cdot t\cdot(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})X_t dt$$
$$dY_t = (\hbar^{-1}_{[t_0,t]})B\cdot t\cdot dW_t$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\hbar^{-1}_{st_0})B\cdot s\cdot dW_s$$
$$X_t = (\hbar_{[t_0,t]})(X_0 + \int_0^t (\hbar^{-1}_{st_0})BsdW_s)$$

$$\boxed{X_t = (\hbar_{[t_0,t]})X_0 + (\hbar_{[t_0,t]}) \int_0^t (\hbar_{st_0}^{-1}) BsdW_s}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle non homogéne à coefficient constant

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + C)dt + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = AX_t dt$$

$$X_t = \exp(A \cdot t)X_0$$

on pose $X_0 = Y_t$

$$\begin{aligned} dY_t &= \exp(-At)dX_t - A\exp(-At)X_t dt \\ &= \exp(-At)((AX_t + C)dt + BdW_t) - A\exp(-At)X_t dt \\ dY_t &= \exp(-At)(Cdt + BdW_t) \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \exp(-As)Cds + \int_0^t \exp(-As)BdW_s \\ X_t &= \exp(At)(X_0 + \int_0^t \exp(-As)Cds + \int_0^t \exp(-As)BdW_s) \\ X_t &= \exp(At)X_0 + \exp(At)(\int_0^t \exp(-As)Cds + \int_0^t \exp(-As)BdW_s) \end{aligned}$$

$$\boxed{X_t = \exp(At)X_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))Cds + \int_0^t \exp(A(t-s))BdW_s}$$

l'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle non homogéne à coefficient variable

$$\begin{cases} dX_t = (A \cdot t \cdot X_t + C \cdot t)dt + B \cdot t \cdot dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

L'équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = A \cdot t \cdot X_t dt \Longrightarrow X_t = \exp(\frac{1}{2}A \cdot t^2)X_0$$

on pose

$$X_0 = Y_t \Longrightarrow X_t = \exp(\frac{1}{2}A \cdot t^2)Y_t$$

$$\hbar_{[t_0,t]} = \exp(\frac{1}{2}A \cdot t^2)$$

$$Y_t = \hbar^{-1}_{[t_0,t]} X_t$$

$$(\hbar^{-1}_{[t_0,t]})' = -A \cdot t \cdot (\hbar^{-1}_{[t_0,t]})$$

$$dY_t = \hbar^{-1}_{[t_0,t]} dX_t - A \cdot t \cdot (\hbar^{-1}_{[t_0,t]}) X_t dt$$

$$dY_t = \hbar^{-1}_{[t_0,t]}(((A \cdot t \cdot X_t + C \cdot t)dt + B \cdot t \cdot dW_t) - A \cdot t \cdot \hbar^{-1}_{[t_0,t]} X_t dt$$

$$dY_t = \hbar^{-1}_{[t_0,t]}(C \cdot t \cdot dt + B \cdot t \cdot dW_t)$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \hbar^{-1}_{st_0}(C \cdot s \cdot ds + B \cdot s \cdot dW_s)$$

$$X_t = \hbar_{[t_0,t]}(X_0 + \int_0^t \hbar^{-1}_{st_0}(C \cdot s \cdot ds + B \cdot s \cdot dW_s))$$

$$\boxed{X_t = \hbar_{[t_0,t]} \cdot X_0 + \hbar_{[t_0,t]} \int_0^t \hbar^{-1}_{st_0}(C \cdot s \cdot ds + B \cdot s \cdot dW_s))}$$

3.6.2 Exemple

$$\begin{pmatrix} dX_{1_t} \\ dX_{2_t} \\ dX_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dW_t$$

on pose

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$dX_t = AX_t dt + bdW_t$$

équation différentielle ordinaire homogène

$$dX_t = AX_t dt \Rightarrow X_t = \exp(A \cdot t)X_0$$

on pose

$$
\begin{aligned}
X_0 &= Y_t \\
X_t &= \exp(A \cdot t) Y_t \Longrightarrow Y_t = \exp(-A \cdot t) X_t \\
dY_t &= -A \exp(-A \cdot t) X_t dt + \exp(-A \cdot t) dX_t \\
dY_t &= \exp(-A \cdot t) B dW_t \\
Y_t &= Y_0 + \int_0^t \exp(-A \cdot s) B dW_s \\
X_t &= \exp(-A \cdot t) X_0 + \int_0^t \exp(A(t-s)) B dW_t
\end{aligned}
$$

les valeurs propres de A

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = & \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 9 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -6 & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (8-\lambda)(-1-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \times 6 \times (-1-\lambda) \\
&= -(1+\lambda)^2(\lambda - 2)
\end{aligned}
$$

les valeurs propres sont $\lambda = -1$ valeur propre double et $\lambda = 2$ valeur propre simple

les vecteurs propres

pour $\lambda = -1$

$$
(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 9z = 0 \\ -3x - 3z = 0 \\ -6x - 6z = 0 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow x + z = 0
$$

alors

$$
v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

pour $\lambda = 2$

$$
(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ -6x - 9z = 0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow 2x = -3z, x = -3y, x = x
$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ , } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\exp(A \cdot t) = P \exp(D \cdot t) P^{-1}$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot t\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 3e^{2t} & 0 & -3e^{-t} + 3e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} & 0 & -3e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \exp(A \cdot t) B &= \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 3e^{2t} & 0 & -3e^{-t} + 3e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} & 0 & -3e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(A \cdot t) X_0 &= \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 3e^{2t} & 0 & -3e^{-t} + 3e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} & 0 & -3e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2e^{-t} + 3e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} + 3e^{2t}) x_{3_0} \\ (e^{-t} - e^{2t}) x_{1_0} + e^{-t} x_{2_0} + (e^{-t} - e^{2t}) x_{3_0} \\ (-2e^{-t} - 2e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} - 2e^{2t}) x_{3_0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2e^{-t} + 3e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} + 3e^{2t}) x_{3_0} \\ (e^{-t} - e^{2t}) x_{1_0} + e^{-t} x_{2_0} + (e^{-t} - e^{2t}) x_{3_0} \\ (-2e^{-t} - 2e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} - 2e^{2t}) x_{3_0} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dW_t$$

$$\begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2e^{-t} + 3e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} + 3e^{2t}) x_{3_0} \\ (e^{-t} - e^{2t}) x_{1_0} + e^{-t} x_{2_0} + (e^{-t} - e^{2t}) x_{3_0} \\ (-2e^{-t} - 2e^{2t}) x_{1_0} + (-3e^{-t} - 2e^{2t}) x_{3_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^t e^{-(t-s)} dW_t$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, le travail a été divisé en trois chapitres, qui comprenaient l'étude de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle à bruit aditif.

le premier chapitre, les personnes ayant la même idée ont été discutées avec le titre du sujet et en extrayant les points et les résultats les plus importants mentionnés dans la mémoire.

Dans le deuxième chapitre, j'ai présenté tous les concepts dont j'avais besoin, ce qui m'a aidé à simplifier Le problème.

Dans le troisième chapitre, l'existence et l'unicité de la solution a été prouvée de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle à bruit aditif , La solution a été donnée à toutes sortes d'équations, puis j'ai donné un exemple

Bibliographie

[1] AURÉLIEN SAGNIER, Gautier Delannoy ;Exponentielle de matrices ;18 mars 2012

[2] FIFTH EDITION, CORRECTED PRINTING : Stochastic Différential Equations. May 2000.

[3] JACQUES VÉLU ; Valeurs propres – Vecteurs propres ;3/2012

[4] JEAN-CHRISTOPHE BRETON,Processus stochastiques.Septembre-Octobre 2017.

[5] JOCELYNE ERHEL et NABIL NASSIF et BERNARD PHILIPPE :Calcul matriciel et systémes linéaires, 2004.

[6] JOCELYUNE Erhel, NABIL Nassif, BERNARD PHILIPPE ;Calcul matriciel et systèmes linéaires ;2004

[7] KARAOUZENE NAÏlA :Équations Différentielles Stochastiques. 12/11/2015.

[8] MARC WEBER et RUOCOONG ZHANG :Formulaire de dérivation matricielle, Octobre 2009.

[9] S. PÉCHÉ ;Les plus grandes valeurs propres de matrices aléatoires ;10/10/2011

Abstract

The purpose of this note is to study the multidimensional stochastic differential equation to additive noise, we read the topics discussed in the same idea and introduced some of the concepts we need, then presented in providing the problem mode and some theorems used in the solution Then provide a general solution, then we gave an example

Keywords : Ito formula Wiener process, stochastic process, stochastic differential equations

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle à bruit aditif, Nous avons lu les sujets discutés dans la même idée et présenté certains des concepts dont nous avons besoin, puis présenté le modèle du problème et quelques théories. Utilisé en solution. Puis fournissez une solution générale et donnez un exemple

Mots-clés : formule dIto, processus Wiener, processus stochastique, l'équations différentielles stochastiques