REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministére De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH- OUARGLA

Faculté des mathématiques et des sciences de Matiere

Département Des Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : Mathématiques

Spécialité : Statistiques et probabilités

Par : Bencheikh Wafa

Théme

Utilisation des chaînes de markov dans l'étude des processus de comptage cas "du processus de naissance et de mort "

Encadreur : Baheddi Aissa

Président : Badidja salim

Examinateur : Hlil Rachida

Année universitaire : 2017/2018

Dédicace :

Je dédie ce travail à :

Mes parents

A mes frères et

mes sœurs, et toute la famille **Ben cheikh**

A mes chers amis

A tout la promotion de probabilité et statistique

Et a tous mes professeurs

Finalement à tous ceux qui m'on aider de proche ou de loin

Remerciements :

Je remercie dieu qui ma donné la chance de vivre ces Meilleurs moment et je suis redevables à mes chers parents pour leurs soutients ,confiance et compréhension,

Dans les moments difficiles et graçe à eux que j'ai réussir dans mes études que dire mes préservent (qu'Allah les protégent) ;

Je présente nos sincère remerciement à Mr : **Baheddi Aissa**, pour avoir accepter de m'encadrer et de m'avoir orientée, aidée et encouragée tout au long de ce travail je tiens remercier l'ensemble de ma famille et plus

Particulièrement

A Ma chére soeurs radia, anfal

A mes frére faris abde allah mohamed taher

A toute ma famille .

NOTATION

• N_t : la taille de la population au temps t .

• l'intensité λ correspond à la probabilité d'occurrence d'un seul événement par unité de temps .

• Tn : représente la date aléatoire à la quelle survient le n^{ieme} evenement

• Δt : est une variation du temps (négligeable)

Introduction :

Beaucoup de phénomène de physique, biologie,démographie, sociologie .etc.., dépendent des augmentations et des diminutions à des taux variables du processus.
Ces processus associés à la modélisation de grandes classes de phénomènes d'attente sont les processus de naissance et de mort.
Ils sont à leur tour des cas particuliers des processus de Markov dans le temps continu ($T = \mathbb{R}_+$), à valeurs dans E = $\mathbb{N}$ tels que les seules transitions non négligeables possibles à partir de k soient vers k + 1 ou vers k - 1.
Le générateur infinitésimal du processus est donc une matrice dite "tridiagonale"
$A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{N}$

la problématique :

Comment utilisé la chaîne de Markov dans l'étude des processus de comptage cas "processus des naissances et des morts" ?

les sous problémes :

1- Est ce que le Processus est sans mémoire ?
(l'occurrence d'événements avant la date t n'influe en rien sur l'occurrence d'événements aprés t : $N(t+h) - N(t) \perp\!\!\!\perp N(t) - N(t-k)$)
2- Est ce que le processus est homogène dans le temps ?
(la loi de l'accroissement $[N(t+h) - N(t)]$ du processus ne dépend que de h et pas de t, $N(t+h) - N(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(h) - N(0)$).([1])

les hypothéses :

- L'hypothése "1" induit que le processus de comptage des événements vérife l'hypothése de Markov .
- Pour l'hypotése "2", on parle parfois d'hypothése d'homogénéité temporelle ou de stationnarité.

Motivation :

La plupart des phénoménes aléatoires demandent une modélisation et étude au cours du temps, comme les processus de comptage (où de naissances) N_t, $t \in \mathbb{R}_+$, telle que les :

- appels arrivant dans un standard téléphonique
- arrivées de clients à un guichet
- survenue de pannes dans un parc de machines, ...

1. . La notation $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ signifie que les variables aléatoires X et Y ont la méme loi de probabilité, pas la méme valeur.

0.1 revue de littérature

1) Auteur : Bruno Sericola

Titre : chaîne de Markov (chapitre 3)

Mots clés : files d'attente, Processus de naissances et morts ,chaîne de Markov à temps discret et continu , uniformisation.

Résumé : les chaîne de Markov sont des systémes probabilistes utilisée dans des domianes variés comme la logistique, L'informatique , La fiabilité, Les sociales , Ce livre s'adresse aux ingénieurs et chercheurs ayant besoin des modéles probabilités pour évaluer et prédire le comportement des systémes qu'ils étudient ou cours de développement .

2) Auteur : Responsable de l'uniter éuropienne : Agnés la Gnoux

Titre : processus stochastique et modélisation (chapitre 3)

Mots clés : Processus de naissance est de mort, loi exponentielle, la fonction de reptation, file d'attente, chaîne de Markov

Résume :L'origine des études sur les phénoménes d'attente remonte aux années 1909-1920 avec les travaux de A.K. Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek,... et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses plublications scientifiques. Cette théorie s'est ensuite étendue a de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systémes complexes,...

3) Auteur :Olivier Scaillet, University of Geneva and Swiss Finance Institute

Titre : Processus de naissance et de Poisson (chapitre 1)

Mots clés : files d'attente, Processus de naissances et morts,processus de Poisson, Processus de risque.

Résumé : Beaucoup de phénoménes naturels peuvent présenter des changements de valeurs à n'importe quel moment plutôt qu'à des dates fixes. On aurra besoin pour modéliser cela du processus en temps continu c'est à dire des processus $\{X_t : t \geq 0\}$ indicés par la demi-droite positive $[0; +1]$.

4) Auteur :E. Lebarbier, S. Robin

Titre : Processus de Poisson, Processus de Naissances et Morts

Mots clés :,processus de Poisson, Processus de naissances et morts files d'attente .

Résumé

Un processus stochastique $\{N(t), t \in I\}$est une suite de variables aléatoire indexées par 1 à valeurs dans un ensemble S.

1 est l'ensemble des indices et souvent t représente le temps. Si 1 est un intervalle inclus en $\mathbb{R}$ le processus est dit à temps continu.

S s'appelle l'ensemble des états du processus. S peut être aussi continu ou discret.

synthése des lectures :

Aprés la lecture de ces documents on remarque que les documents en génerale ce concentré aux processus de naissance et de mort par une chaîne de markov

Introduction :

Processus de comptage : On s'intéresse ici à un type particulier de processus $N(t)$ appelés processus de comptage oû $N(t)$ est un effectif à la date t. Par exemple :

- $N(t)$ = nombre de poissons capturés dans l'intervalle de temps $[0; t]$;
- $N(t)$ = taille d'une population à la date t.

Ces processus sont des processus

- à temps continu (le temps t varie continément, contrairement aux chaîne de Markov , par exemple)
- à l'espace de d'états discret (un comptage n est un nombre entier), éventuellement infni.

Définition 1. Le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage si N(t) représente le nombre total d'évènements qui se sont produits jusqu'au temps t.

Définition 2. Le processus d'état stochastique $\{n(t) : t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si pour chaque n=0,1,..., il existe des paramètres (avec $\mu_0 = 0$) tels que, lorsque le système est dans l'état n, le processus d'arrivée est poissonnien de taux λ_n et le processus de sortie est poissonnien de taux μ_n .

Définition 3. Le processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus de comptage si c'est un processus croissant, c'est-à-dire si pour tout $s \leqslant t$, $N_s \leqslant N_t$. La variable aléatoire $N_t - N_s$ est alors appelée accroissement du processus sur]s,t].

Définition 4. Le processus est dit stationnaire (ou homogéne dans le temps), si pour tout s et pour tout t, l'accroissement $N_{t+s} - N_s$ a même loi que N_t.

Le nom donné au processus de Poisson s'explique par ce qui suit :

Propriété :

Un processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$tel que $N_0 = 0$ est un processus de Poisson si et seulement si :

(i) : $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est stationnaire ;

(ii) : $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants ;

(iii) : il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire N_t suive la loi de Poisson de paramétre λ_t.

Chapitre 1

Processus de Poisson

Définition 5. On s'intéresse ici au comptage du nombre d'occurrences d'un événement, par exemple la naissance d'un individu. On note $N(t)$ le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $[0; t]$. Un tel processus a une trajectoire en escalier (voir figure 1.1). L'événement d'intérét survient aux dates t_1 ;t_2 ; ... ;t_n ; à chacune de ces dates, le comptage $N(t)$ augmente de 1 :

$$
\begin{aligned}
N(t) &= 0 \ si \ t < t_1, \\
&= 1 \ si \ t_1 \leq t \leq t_2, \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= k \ si \ t_k \leq t < t_{k+1},
\end{aligned}
$$

Figure1.1 Exemple de trajectoire d'un processus de comptage.

Exemples :

Les exemples de ce genre de ce processus ne se limitent évidemment pas à la biologie :

- Appels téléphoniques à un standard,

- Prise d'un poisson par un pêcheur,
- Arrivée d'un client à un guichet,
- Passage d'un autobus.

1.1 Loi de probabilité :

En terme de probabilités, si on considére la probabilité qu'un événement survienne dans un intervalle d'amplitude Δt

$$Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\}$$

en opérant un développement limité au premier ordre,et en remarquant que $Pr\{N(t) - N(t) = 1\} = 0$, on obtient

$$Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = 0 + \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

et les hypothéses 1 et 2 impliquent que λ ne dépend pas de t. λ est appelé intensité du processus.

1.2 Systéme différentiel :

Pour Δt suffisamment petit, le résultat précédent nous permet d'écrire le systéme

$$\begin{cases} Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t), \\ Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

1.2.1 Loi du nombre d'événement et interprétation

Loi de N(t)

D'aprés le systéme différentielle, en notant

$P_n(t) = Pr\{N(t) = n\}$,

on a

$$P_n(t+\Delta t) = Pr\{N(t) = n\}Pr\{N(t+\Delta t)-N(t) = 0\}+Pr\{N(t) = n-1\}Pr\{N(t+\Delta t)-N(t) = 1\}+o(\Delta t)$$

$$= P_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$= p_n(t) + \lambda\Delta t[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + o(\Delta t)$$

d'oû

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

ou

$P'_n(t) = \lim\limits_{\Delta t \longrightarrow 0} \left(\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t}\right) = \lim\limits_{\Delta t \longrightarrow 0} \left(\lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right),$

et donc, en passant la limite pourΔt t $\longrightarrow 0$,et comme $\lim\limits_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

alors

$$P'_n(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)].$$

Il faut cependant isoler le cas particulier n = 0 :

$$p_0(t + \Delta t) = Pr\{N(t) = 0\}Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} = p_0(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)]$$

qui donne $P'_0(t) = -\lambda p_0(t)$, Les fonctions $p_n(t)$ vérifient donc le systéme différentiel

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ P'_n(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] \; pour \; n > 0 \end{cases}$$

1.2.2 Résolution du systéme :

1. On a $P_0'(t) = -\lambda p_0(t) \;\Leftrightarrow\; p_0(t) = C_0 e^{-\lambda t}$ et $p_0(0) = 1$

donc $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

2. On a $P_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_1(t)$.

On résout tout d'abord

l'équation homogène : $p_1'(t) + \lambda p_1(t) = 0$

$$P_1'(t) = -\lambda p_1(t) \Leftrightarrow p_1(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

puis on fait varier la constante $C_1 = C_1(t)$ ce qui donne

$$P_1'(t)) = e^{-\lambda t}[C_1'(t) - \lambda C_1(t)]$$

et en reportant dans l'équation de départ, on a

$e^{-\lambda t}[C_1'(t) - \lambda C_1(t)] = e^{-\lambda t}[\lambda - C_1(t)] \Rightarrow C_1'(t) = \lambda \Rightarrow C_1(t) = \lambda t + c_1$

d'oû

$$p_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t} \; et \;\; p_1(0) = 0$$

donc

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Propriété

$$\forall n \geq 0, \quad p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

preuve

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \;\Rightarrow\; p_{n+1}'(t) = \lambda[e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} - p_{n+1}(t)]$$

on a donc

$$p_{n+1}(t) = C_{n+1}(t)e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; p_{n+1}'(t) = e^{-\lambda t}[C_{n+1}'(t) - \lambda C_{n+1}(t)]$$

et, en reportant

$$e^{-\lambda t}[C'_{n+1}(t) - \lambda C_{n+1}(t)] = e^{-\lambda t}[\lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \lambda C_{n+1}(t)]$$

d'oû

$$C'_{n+1}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} \;\Rightarrow\; C_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + c_{n+1}$$

au temps t=0 l'effectif est inferieur à n+1 d'où,

$$p_{n+1}(0) = 0$$

on obtient finalement

$$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La propriété étant vérifée pour $n = 0$ ($et\ n = 1$), elle est ainsi démontrée pour tout n.

La solution du systéme différentiel est donc

$$Pr\{N(t) = n\} = p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Cela signifie que, à tout instant t, la variable $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramétre λt :

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

1.2.3 Loi des dates d'arrivée des événements :

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ ne peut se décrire uniquement à partir du nombre d'occurences de l'événement à l'instant t, N(t). Il faut savoir à quelles dates se sont passés les événements. On appelle T_k la variable aléatoire représentant la date à laquelle se produit le k-éme événement. Conditionnellement à N(t) = n, on connaît la loi de ces temps : si on note

$T_{(1)} < T_{(2)} < ... < T_{(n)}$ la statistique d'ordre de$(T_1, T_2, ..., T_n)$, on a que :

$$T_{(1)} < T_{(2)} < ... < T_{(n)} | N(t) = n \sim \mathcal{U}_{[0,t]^n}$$

Cela signifie que si on connaît le nombre d'événements qui sont survenus sur l'intervalle [0,t], les dates (ordonnées) auxquelles les événements se produisent sont uniformément répartis sur l'intervalle sur [0,t].

1.2.4 Comparaison avec un modéle déterministe :

On note :

n(t) = le nombre d'événements observés dans l'intervalle [0 t],

L'équation différentielle correspondant aux hypothéses (1 = absence de mémoire du processus) et (2 = homogénéité temporelle) s'écrit

$$n'(t) = \lambda$$

avec la condition initiale naturelle n(0) = 0. On obtient ainsi l'équation

$$n(t) = \lambda t$$

qui correspond au comportement "moyen" (i.e. en espérance) du processus de Poisson.

1.2.5 Temps séparant deux événements successifs

Loi de la durée séparant deux événements

On s'intéresse maintenant à la durée (aléatoire) séparant deux occurrences de l'événement. On se place à une date t_0 et on s'intéresse à la variable T : T = temps d'attente jusqu'à l'occurrence du prochain événement. On a :

$$\begin{aligned} P_r\{T \geq t\} &= P\{N(t_0+t) - N(t_0) = 0\} \\ &= P_r\{N(t) = 0\} \qquad \left(\text{grâce à l'hypothése d'indépendance temporelle}\right) \\ &= p_0(t) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

La loi de T est donc indépendante de t_0, et on a

$$\begin{aligned} Pr\{T > t\} &= e^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow Pr\{T \leq t\} &= 1 - e^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow T &\sim \varepsilon(\lambda) \end{aligned}$$

Il est important de remarquer qu'on ne se préoccupe pas de savoir si t_0 est elle-méme une date d'occurrence ou pas : cela ne change pas la loi de T à cause de l'hypothése d'indépendance temporelle.

Interprétation : T suit une loi exponentielle de paramétre λ, on a donc

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt \qquad \text{on a :} \qquad \begin{cases} u(t) = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \Rightarrow v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{E}(T) = u(t)v(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}^2(T)$$

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{\lambda t} dt \qquad \text{on a :} \qquad \begin{cases} u(t) = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = \lambda e^{-\lambda t} dt \Rightarrow v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^{+\infty} udv = \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} vdu = \Big[-t^2 e^{-\lambda t}\Big]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ce qui signifie que la durée moyenne séparant deux événements est égale à $\frac{1}{\lambda}$

Remarque :

On démontre au passage que la loi de Poisson de paramétre λ est la loi du nombre d'événements survenant dans une unité de temps quand ces événements sont séparés par des durées exponentielles indépendantes. Cette propriété fournit un algorithme de simulation d'une variable aléatoire poissonnienne à partir de variables aléatoires exponentielles :

1. on simule des $X_i.i.i.d, X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$
2. on calcule$S_i = \sum_{j \leq i} X_j$
3. on prend $N = n$ tel que $S_n \leq 1 < S_{n+1}$.

N est distribuée selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

1.2.6 Date du n-éme événement

On rappelle que T_n représente la date (aléatoire) à laquelle survient le n-éme événement. On vient de voir que $\quad T_1 \sim \varepsilon(\lambda)$

et, de faççon générale, que $T_n - T_{n-1} \sim \varepsilon(\lambda)$ *pour* $n > 0$ *etavec* $T_0 = 0$;

donc, T_n est la somme de n variables exponentielles de paramétre λ : sa loi est appelée loi gamma et notée : $\quad T_n \sim \mathcal{G}(n, \lambda)$

Propriété :

Calculer l'espérance et la variance de T_n.

preuve

On utilise le fait que les différences $T_i - T_{i-1}$ sont des variables exponentielles indépendantes :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - T_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(T_i - T_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$$
$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - T_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} T_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}$$

1.2.7 Densité de la loi gamma

On peut facilement calculer la densité $f_2(t)$ de T_2 ; on considére tout d'abord la fonction de répartition $F_2(t)$:

$F_{T_2}(t) = p_r(T_2 \leqslant t) = \int_0^t f(u) P_r(T_2 - T_1 \leqslant t - u) du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}(1 - e^{-\lambda(t-u)}) du =$
$\int_0^t \lambda(e^{-\lambda u} - e^{-\lambda t}) du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t du = 1 - e^{-\lambda u} - \lambda t e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$

Chapitre 2

Processus de naissances, processus de morts, processus de naissances et morts

2.1 Processus de naissances

On s'intéresse au nombre N(t) de cellules dans une culture à la date t.
On suppose que chaque cellule a la même probabilité ¸Δt de se diviser durant un intervalle de durée Δt ce qui est analogue aux hypothése initiales du processus de Poisson.
Une fois qu'une cellule est divisée, on considére qu'on a affaire à deux cellules "neuves" susceptibles de se diviser à leur tour.
Il faut bien noter qu'on s'intéresse ici seulement à la naissance de nouveaux individus et non à leur mort et qu'on obtient donc une modélisation nécessairement croissante de la taille de la population.

2.1.1 Equation de récurrence :

Pour une cellule donnée, on a

$$\begin{cases} P_r\{0 \; division \; durant[t; t+\Delta t]\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ P_r\{1 \; division \; durant[t; t+\Delta t]\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ P_r\{2 \; divisions \; ou \; plus \; durant[t; t+\Delta t]\} = o(\Delta t), \end{cases}$$

Si on considére l'ensemble de la population, la probabilité pour que 2 cellules se divisent dans un même intervalle de temps Δt assez cours est négligeable.

On a donc
$$\begin{cases} P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)\} = Pr\{0 \; division \; durant[t;t+\Delta t]\}, \\ P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)+1\} = Pr\{1 \; division \; durant[t;t+\Delta t]\}, \\ P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)+k, k\geq 2\} = o(\Delta t), \end{cases}$$

et si on tient compte de l'effectif au début de l'intervalle $[t;t+\Delta t]$, il vient

$$\begin{cases} P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)\} = 1-\lambda N(t)\Delta t + o(\Delta t); \\ P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)+1\} = \lambda N(t)\Delta t + o(\Delta t); \\ P_r\{N(t+\Delta t)=N(t)+k; k\geq 2\} = o(\Delta t), \end{cases}$$

On retrouve des équations semblables à celle obtenues pour un processus poissonnien mais elles ne sont plus homogénes dans le temps puisqu'elles dépendent de l'effectif N(t).

2.2 Loi de la taille de la population

2.2.1 Equations différentielles :

Si on note maintenant $p_n(t)$ la probabilité que l'effectif de la population soit égal à n à la date t :

$p_n(t) = P_r\{N(t)=n\}$

on obtient l' équation suivante

$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)P_r\{aucune \; division \; durant[t;t+\Delta t]\} + p_{n-1}(t)P_r\{une \; division \; durant[t;t+\Delta t]\} + o(\Delta t) = p_n(t)\{1-\lambda n\Delta t\} + p_{n-1}(t)\lambda(n-1)\Delta t + o(\Delta t)$

qui s'écrit également

$\dfrac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda n p_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t) + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}$

Par passage à la limite, on obtient l'équation différentielle (récurrente)

$$p'_n(t) = -\lambda n p_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t) \tag{2.1}$$

2.2.2 Loi de N(t) :

On note n_0 l'effectif initial de la population ($N(0)=n_0$).

Comme les cellules sont supposées se diviser indépendamment les unes des autres, on peut considérer que la croissance d'une population de taille initiale n_0 est équivalente à la croissance de n_0 populations de tailles initiales 1.

N(t)= la taille de la population au temps t, s'écrit comme la somme de la taille des n_0 populations : si on note $N_i(t)$ la taille de la iéme population au temps t,

on a $N(t) = \sum_{i=1}^{n_0} N_i(t)$

Ainsi pour obtenir la loi de N(t), on va s'intéresser à la loi de $N_i(t)$.

Est comme elles suivent toutes le même processus,

Il suit de regarder la loi de N(t) pour le cas $n_0 = 1$.

Cas $n_0 = 1$:

Les fonctions $p_n(t)$ vérifent l'équation différentiel donné par (2.1) avec en plus que $p_0(t) = 0$ puisque la taille de la population i initiale est 1 et que l'on s'intéresse ici à un processus de naissance pur. Pour obtenir $p_n(t)$, on utilise la même méthode que pour le processus de Poisson

1.On a $p_1'(t) = -\lambda p_1(t) \Leftrightarrow p_1 = C_1 e^{-\lambda t}$ avec $p_1(0) = 1$ donc $p_1(t) = e^{-\lambda t}$.

2. On a $p_2'(t) = -2\lambda p_2(t) + \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow p_2(t) = C_2 e^{-2\lambda t}$

$C_2 = C_2(t)$ on a $p_2'(t) = C_2' e^{-2\lambda t} - 2\lambda C_2(t) e^{-2\lambda t}$ ce qui donne

$p_2'(t) = e^{-\lambda t}(C_2'(t) - 2\lambda C_2(t) = -2\lambda C_2(t) e^{-2\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}$

Par analogie avec l'équation de départ, on a que

$C_2'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.e^{2\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow C_2(t) = e^{\lambda t} + c_2 \Rightarrow C_2(t) = e^{\lambda t} + c_2$

d'où $\quad p_2(t) = (e^{\lambda t} + c_2) e^{-2\lambda t}$ et avec $p_2(0) = 0 = (1 + c_2) \Rightarrow c_2 = -1$ donc

$p_2 = (e^{\lambda t} - 1) e^{-2\lambda t} = (e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$

alors on a : $p_0(t) = 0$,$p_1(t) = e^{-\lambda t}$,$p_2(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$

donc

$p_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$

3. On peut montrer par récurrence que $p_n(t)$

On résout tout d'abord

$p_{n+1}'(t) = -\lambda(n+1) p_{n+1}(t) \Leftrightarrow p_{n+1}(t) = C_{n+1}(t) e^{-\lambda(n+1)t}$

On a donc

$C_{n+1}'(t) = \lambda n e^{\lambda(n+1)t} p_n(t) = \lambda n e^{\lambda n t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = \lambda n e^{\lambda n t}(e^{\lambda t} - 1)^{n-1}$

En intégrant, on obtient

$C_{n+1}(t) = (e^{\lambda t} - 1)^n + c_n$

D'où

$p_n(t) = ((e^{\lambda t} - 1)^n + c_n)e^{-\lambda(n+1)t}$ avec $p_{n+1}(0) = 0$ donc

$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^n$

On reconnaît la distribution géométrique : $N(t) \sim \mathcal{G}[e^{-\lambda t}]$

Cas général $N(0) = n_0$**.**

N(t) est donc une somme de n_0 variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune une distribution géométrique de paramétre $e^{-\lambda t}$.

La distribution d'une telle somme est la loi binomiale négative de paramétres n_0 et $e^{-\lambda t}$

$N \sim \mathcal{BN}(n_0, e^{-\lambda t})$, $P_n(t) = \mathbb{C}_{n-1}^{n_0-1}(e^{-\lambda t})^{n_0}(1 - e^{-\lambda t})^{n-n_0} = P_r\{N(t) = n\}$

2.2.3 Propriétés :

En utilisant les défnitions de l'espérance et de la variance d'une la loi binomiale négative

$\mathbb{E}[N(t)] = n_0 e^{\lambda t}$

c'est à dire qu'avec ce modéle, la croissance de la population est exponentielle en espérance

D'autre part :

$\mathbb{V}[N(t)] = n_0 e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$.

On peut ainsi noter que le coeffcient de variation vaut

$C.V.[N(t)] = \dfrac{\mathbb{E}[N(t)]}{\sqrt{\mathbb{V}[N(t)]}} = \dfrac{n_0 e^{\lambda t}}{\sqrt{n_0 e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{n_0}}$

ce qui signife que la variabilité relative autour de l'espérance tend à devenir constante et d'autant plus faible que la population initiale est grande.

2.2.4 Loi de la durée entre deux événements successifs

Comme pour le processus de Poisson, on s'intéresse à la loi de la durée séparant deux événements successifs. On note X_k la variable aléatoire représentant la durée entre le kéme et le k + 1éme événement.

On a que $X_k = T_{k+1} - T_k$; si T_k représente le temps où le kéme événement se produit. Prenons tout d'abord k = 0. X_0 représente le temps d'attente jusqu'à la division d'une cellule sachant qu'il y a n0 cellules. Si on note X_0^i le temps d'attente jusqu'à que la cellule i se divise, le temps d'attente jusqu'au premier événement pour toute la population correspond au premier

temps d'attente des n_0 cellules, donc X_0 est $X_0 = inf\{X_0^i, i = 1, ..., n_0\}$
Par analogie avec le processus de Poisson, on a que X_0^i suit une loi exponentielle de paramétre λ. De plus, on a supposé que les n_0 cellules se comporter indépendamment les unes des autres, ce qui implique que les variables X_0^i sont indépendantes.
on montre que X_0 suit une loi exponentielle de paramétre la somme des paramétres des n_0 exponentielles, donc $X_0 \sim \mathcal{E}(\lambda n_0)$
De la même façon, on peut montrer que $X_k \sim \mathcal{E}(\lambda n_k)$
où n_k est le nombre de cellules à l'instant T_k, i.e. soit $n_0 + k$.

2.3 Processus de morts

On peut facilement construire un modéle analogue pour la décroissance d'une population en supposant qu'à chaque instant t, toutes les cellules vivantes ont une probabilité $\mu\Delta t$ de mourir dans un intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$.
Cela revient à supposer que la durée de vie des individus est distribuée exponentiellement avec un paramétre μ.
On obtiendra ainsi une décroissance aléatoire de l'effectif N(t) depuis une valeur initiale n_0 jusqu'à 0.

2.3.1 Loi de N(t) :

Si on considére que les durées de vie des individus sont exponentielles et indépendantes,
on a $Pr\{un\ individu\ donne\ est\ encorevivant\ en\ t\} = exp(-\mu t) = p(t)$ d'aprés la fonction de répartition de la loi exponentielle $F(t) = 1 - exp(-\mu t)$. Le nombre d'individu encore vivant à la date t parmi le n_0 initiaux suit donc une loi binomiale négligeable : $N(t) \sim \mathcal{BN}[n_0, p(t)]$
et donc $p_n(t) = Pr\{il\ y\ a\ encore\ n\ individu\ vivants\ en\ t\}$
$= P_n(t) = \mathbb{C}_{n-1}^{n_0-1}(e^{-\mu t})^{n_0}(1 - e^{-\mu t})^{n-n_0} \qquad (pour\ 0 \leqslant n \leqslant n_0)$.

2.3.2 propriétés :

$\mathbb{E}[N(t)] = n_0 p(t) = n_0 e^{-\mu t}$
$\mathbb{V}[N(t)] = n_0 p(t)[1 - p(t)] = n_0 e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$

c'est à dire que la taille de la population décroît, en espérance, à vitesse exponentielle et que sa variance diminue également à vitesse exponentielle.

Remarque : on remarque que $n(t) = n_0 e^{-\mu t}$ est une solution de l'équation défferentielle $n'(t) = -\mu n(t)$

2.3.3 Loi de la durée entre deux événements.

Comme pour le processus de naissances, la loi de la durée entre deux événements est une loi exponentielle qui dépend de la taille de la population.

Si on note $X_k = T_{k+1} - T_k$ la durée entre le kéme et le k + 1éme événement et si $N(0) = n_0$, $X_k \sim \varepsilon(\mu(n_0 - k))$.

2.3.4 Date d'extinction :

Loi de la date d'extinction :

On déduire la probabilité d'extinction de la population de la loi de N(t). Si on note T^* la date d'extinction : $T^* = inf\{t : N(t) = 0\}$, on a $p\{T^* \leqslant t\} = P_r\{N(t) = 0\} = p_0(t)$, donc $p\{T^* \leqslant t\} = (1 - e^{-\mu t})^{n_0}$.

Temps moyen d'extinction

La date d'extinction s'exprime en fonction des durées entre deux événements successifs :

$T^* = X_0 + X_1 + ...x_{n_0-1}$.

D'aprés la loi de la durée entre deux événements, on en déduit que le temps moyen d'extinction vaut

$\mathbb{E}[T^*] = \sum_{i=0}^{n_0-1} X_i = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\mu_i}$

Chapitre 3

Processus de naissances et morts

3.1 Modéle

Une description réaliste du développement d'une population doit évidemment tenir compte à la fois des naissances et des morts des individus qui la compose. Un modéle simple s'obtient en combinant les deux modéles précédents. équation de récurrence. On utilise le méme raisonnement que dans les modéles précédents :

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)Pr\{aucune\ naissance\ ni\ mort\ durant\ [t;t+\Delta t]\}$$
$$+p_{n-1}(t)Pr\{une\ naissance\ durant\ [t;t+\Delta t]\}+p_{n+1}(t)Pr\{une\ mort\ durant\ [t;t+\Delta t]\}+o(\Delta t)$$

et on obtient, avec les notations des modéles précédents

$$P_n(t+\Delta t) = Pn(t)[1-n(\lambda+\mu)\Delta t] + p_{n-1}(t)(n-1)\lambda\Delta t + p_{n+1}(t)(n+1)\mu\Delta t + o(\Delta t) :$$

3.1.1 équation différentielle

: L'équation différentielle qui découle de la relation de récurrence précédente est
$p'_n(t) = -n(\lambda+\mu)p_n(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)$
mais sa résolution est particuliérement complexe dans le cas général, c'est à dire pour une taille initiale n_0 quelconque.

3.1.2 Remarque

: Comme pour le processus de naissances, on suppose que l'évolution d'une population de taille initiale n_0 est équivalente à l'évolution de n_0 populations indépendantes d'effectif initial 1.

3.1.3 Preuve

: dans le cas $n_0 = 1$ Dans le cas où la population initiale est de taille 1, la solution de cette équation différentielle est
$p_n(t) = [1 - \mu g(t)][1 - \lambda g(t)][1 - 1 + \lambda g(t)]^{n-1}$

$p_n(t) = [1 - \mu g(t)][1 - \lambda g(t)][\lambda g(t)]^{n-1}$.

avec

$$g(t) = \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}.$$

$P_n'(t) = -\mu g'(t)[(1 - \lambda g(t))(\lambda g(t))^{n-1}] - \lambda g'(t)[(1 - \mu g(t))(\lambda g(t))^{n-1}$

$$+(n-1)\lambda^{n-1} g'(t)[g(t)]^{n-2}][(1 - \mu g(t)(1 - \lambda g(t))]$$

$$= \lambda^{n-1}(g(t))^{n-2} g'(t)[-\mu(1 - \lambda g(t))g(t) - \lambda(1 - \mu g(t))g(t) + (n-1)(1 - \mu g(t)(1 - \lambda g(t))]$$

$$= \lambda^{n-1}(g(t))^{n-2} g'(t)[-\mu g(t) + \mu\lambda g^2(t) - \lambda + \mu\lambda g(t) + (n-1)[1 - \lambda g(t) - \mu g(t) + \lambda\mu g^2(t)]]$$

$$g'(t) = (1 - \mu g(t))(1 - \lambda g(t))?$$

$$(1 - \mu g(t))(1 - \lambda g(t)) = \left(1 - \mu\left(\frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)}}\right)\right)\left(1 - \lambda\left(\frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\right)\right)$$

$$= \left[\frac{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu(1 - e^{(\lambda-\mu)t})}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\right]\left[\frac{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda(1 - e^{(\lambda-\mu)t})}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\right]$$

$$\frac{\left[e^{(\lambda-\mu)t}(\mu-\lambda)\right](\mu-\lambda)}{(\mu-\lambda)} = \frac{(\mu-\lambda)^2 e^{(\lambda-\mu)t}}{(\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)})^2} = g'(t)$$

$$g(t) = \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}} \Longrightarrow$$

$$g'(t) = \frac{(-(\lambda-\mu)e^{(\lambda-\mu)t})(\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}) - (-\lambda(\lambda-\mu)e^{(\lambda-\mu)t})(1-e^{(\lambda-\mu)t})}{(\mu\lambda e^{(\lambda-\mu)t})^2}$$

$$\frac{(\mu-\lambda)^2 e^{(\lambda-\mu)t}}{(\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t})^2} = (1-\mu g(t))(1-\lambda g(t))$$

$$p_n'(t) = -n(\lambda+\mu)p_n(t)+(n-1)\lambda p_{n-1}(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t) = (1-\mu g(t))(1-\lambda g(t))\lambda[g(t)]^{n-1} \quad (3.1)$$

est une solution de l'equation déffernticlle (3.1)

$$\begin{cases} P_n = (\lambda g(t))^{n-1} g'(t) \\ P_1 = g'(t) \end{cases} \Longrightarrow P_n(t) = (\lambda g(t))^{n-1} P_1(t)$$

$$\mathbb{E}(N(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t)$$

$$\begin{cases} P_n'(t) = -n(\lambda+\mu)P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1} \\ P_n(0) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$g(t) \Longrightarrow 1 - e^{(\lambda-\mu)t} - \mu g(t) + \lambda g(t) e^{(\lambda-\mu)t} = 0$$

$$e^{(\lambda-\mu)t}(\lambda g(t) - 1) = \mu g(t) - 1$$

$$e^{(\lambda-\mu)t} = \frac{1-\mu g(t)}{1-\lambda g(t)}$$

$$P_n(t) = (1-\mu g(t))(1-\lambda g(t))(\lambda g(t))^{n-1}$$

$$= (1-\lambda g(t))^2 e^{(\lambda-\mu)t}(\lambda g(t))^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(N(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\lambda g(t))^2 e^{(\lambda-\mu)t}(\lambda g(t))^{k-1}$$

$= (1-\lambda g(t))^2 e^{(\lambda-\mu)t}\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda g(t))^{k-1} = e^{(\lambda-\mu)t}$
alors

$$\mathbb{E}[N(t)] = e^{(\lambda-\mu)t},$$

$Var(N(t)) = \mathbb{E}(N(t) - \mathbb{E}N(t))^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(k - e^{(\lambda-\mu)t})^2 P_k(t)$

$Var(N(t)) = e^{2(\lambda-\mu)t}\mu g(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(k - e^{(\lambda-\mu)t})^2(1-\lambda g(t))^2 e^{(\lambda-\mu)t}(\lambda g(t))^{k-1}$

$$= e^{2(\lambda-\mu)t}\mu g(t) + (1-\lambda g(t))^2 e^{(\lambda-\mu)t}\sum_{k=1}^{\infty}(k^2 - 2ke^{(\lambda-\mu)t} + e^{2(\lambda-\mu)t})(\lambda g(t))^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1) + k - 2ke^{(\lambda-\mu)t} + e^{2(\lambda-\mu)t}) + \lambda g(t)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(\lambda g(t))^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda g(t))^{k-1}(1-e^{(\lambda-\mu)t}) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{2(\lambda-\mu)t}(\lambda g(t))^{k-1}\lambda g(t)\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(\lambda g(t))^{k-2}$$

$$\frac{2\lambda g(t)}{(1-\lambda g(t))^3} + \frac{(1-e^{(\lambda-\mu)t)}}{(1-\lambda g(t))^2} + \frac{e^{2(\lambda-\mu)t}}{(1-\lambda g(t))}$$

alors

$$\mathbb{V}[N(t)] = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$$

Conditionnellement au fait que la population n'est par éteinte à la date t (probabilité P(t)=1 -$\mu g(t)$), on reconnaît une distribution géométrique pour $N(t)$:

$$N(t)|\{N(t) > 0\} \sim g[1 - \lambda g(t)]$$

La probabilité $p_0(t)$ est appelée probabilité d'extinction de la population est $N(t) = 0$:

$$P_0(t) = \mu g(t) = Pr\{la\ population\ s'est\ \ eteinte\ avant\ t\}.$$

3.1.4 Extension au cas général :

On utilise donc le résultat pour $n_0 = 1$ pour étudier le comportement d'une population d'effectif initial n_0 quelconque. On obtient ainsi l'espérance

$$\mathbb{E}\{N(t)/N(0) = n_0\} = n_0\mathbb{E}\{N(t)/N(0) = 1\} = n_0 e^{(\lambda-\mu)t}$$

et la variance

$$\mathbb{V}ar\{N(t)/N(0) = n_0\} = n_0\mathbb{V}ar\{N(t)/N(0) = 1\} = n_0\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]$$

Le résultat sur l'espérance généralise de façon naturelle les résultats obtenus pour les modéles de naissances et de morts étudiés séparément. En ce qui concerne la variance, il faut également tenir compte de la différence relative entre λ et μ. On peut noter les résultats suivants concernant la variabilité relative de l'évolution :

$\lambda > \mu : C.V(N(t)) = \dfrac{\mathbb{E}(N(t))}{\sqrt{Var(N(t))}} = \dfrac{n_0 e^{(\lambda-\mu)t}}{\sqrt{n_0(\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu})e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}} \approx \dfrac{n_0}{\sqrt{n_0}(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu})} \approx$
$\sqrt{\dfrac{(\lambda+\mu)}{n_0(\lambda-\mu)}}$

$\lambda = \mu : C.V(N(t)) = \sqrt{\dfrac{2\lambda t}{n_0}}$

$\lambda < \mu : C.V(N(t)) \approx \sqrt{\dfrac{(\lambda+\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{n_0(\mu-\lambda)}}$

3.1.5 Extinction de la population :

Probabilité d'extinction de la population Dans le cas oû la taille initiale de la population est n_0, la probabilité d'extinction de la population est égale à la probabilité que toutes les populations (indépendantes) de tailles initiales 1 soient éteintes

$$P_0(t) = (\mu g(t))^{n_0} = \left(\mu - \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}\right)^{n_0} = \left(\frac{\mu e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}\right)^{n_0}$$

Comportement asymptotique :

On en déduit le comportement de la probabilité d'extinction ultime de la population (la probabilité d'extinction de la population à l'infni)

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} = P_0(t)$$

si $\lambda < \mu$

$$P_0(t) = \left(\frac{-\mu}{-\mu}\right)^{n_0} = 1;$$

et l'extinction est certaine. si $\lambda > \mu$:

$$P_0(t) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n_0}$$

donc même si le taux de naissances est supérieure au taux de morts, la population peut s'éteindre : par exemple si $n_0 \leq 3 \log_{10}(\frac{\lambda}{\mu})$ alors la probabilité d'extinction est inférieure à 0,001.

si $\lambda = \mu$ (il faut dans ce cas recommencer le calcul de la probabilité d'extinction)

$$P_0(t) = \left(\frac{\lambda t}{1 + \lambda t}\right)^{n_0} = 1$$

et donc dans ce cas aussi l'extinction est certaine.

3.1.6 Comparaison avec le modéle déterministe :

Si on veut construire le modéle déterministe correspondant, on écrit l'équation différentielle qui rend compte du fait que les naissances et les morts se font en proportion de la taille de la population à l'instant t

$$n'(t) = + \underbrace{\lambda n(t)}_{naissances} - \underbrace{\mu n(t)}_{mort}$$

(avec la condition initiale $n(0) = n_0$) dont la solution correspond à l'espérance du processus de naissances et morts

$$n'(t) = n(t)(\lambda - \mu)$$

d'où

$$n(t) = n_0 e^{(\lambda - \mu)} t$$

.

3.1.7 Temps de séjour dans un état

proposition 1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov en temps continu, de générateur infinitésimal A. Le temps de séjour dans l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $-a_{ii} = \sum_{i\neq j} a_{ij}$. De plus, lorsqu'il quitte l'état i, le processus se retrouve dans l'état j_0 avec probabilité :

$$\frac{a_{ij_0}}{\sum_{i\neq j} a_{ij}} = -\frac{a_{ij_0}}{aii}.$$

3.1.8 (Loi stationnaire et convergence en loi)

proposition 2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus irréductible.
Alors, s'il admet une loi stationnaire π, celle-ci est unique. De plus, pour toute loi initiale μ de X_0, on a convergence de la loi de X_t vers π : $\mu P(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \pi$.
Soyons pragmatiques : pour savoir si un processus admet une loi stationnaire, on ne va pas chercher un vecteur π tel que $\pi P(t) = \pi$ pour tout $t \geq 0$, pour la simple et bonne raison qu'il est déjà difficile en général de calculer P(t). Le processus étant souvent défini par sa matrice de sauts A, on va donc donner une façon de trouver π à partir de celle-ci. En effet, passant à la limite en t dans l'équation P'(t) = AP(t), on obtient : $P'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} A\pi = 0$.
puisque les lignes de A somment à 0. De l'équation P'(t) = P(t)A, on déduit en passant à la limite que $\pi A = 0$, c'est-à-dire que le vecteur π est solution du système d'équations : $\pi A = 0$.
Le vecteur $\pi = 0$ est toujours solution de ce système d'équations. Pour s'assurer qu'on a bien une loi stationnaire, il faut rajouter la condition que c'est un vecteur de probabilité.

proposition 3. Le processus admet pour loi stationnaire π si et seulement si π est solution du système linéaire : $\begin{cases} \pi A = 0 \\ \sum_{j\in E} \pi = 1 \end{cases}$

Preuve :

On a montré le résultat dans un sens, il suffit maintenant de vérifier la réciproque. Supposons donc que le vecteur de probabilités π vérifie $\pi A = 0$, alors pour tout entier n > 0, on a aussi $\pi A_n = 0$, donc pour tout $t \geq 0$:

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\pi A^n \Leftrightarrow \pi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\right) = \pi$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0 \qquad \pi = \pi e^{tA} = \pi P(t)$$

donc π est bien la loi stationnaire du processus.

Remarque :

Le système d'équations $\pi A = 0$ s'interprète comme suit : à l'équilibre, le taux de départ d'un état est égal au taux d'entrée dans cet état.
Il faut maintenant préciser le lien entre la nature des états d'un processus et l'existence d'une loi stationnaire. Un état est dit transitoire, ou transient, si une fois qu'on l'a quitté, on n'est pas certain d'y revenir.
Si on est certain d'y revenir, l'état est dit récurrent.
Un état récurrent est dit récurrent positif si, de plus, le temps moyen de retour est fini. Si un état récurrent est tel que le temps moyen de retour est infini, il est dit récurrent nul.
On comprendra mieux ces notions lors de l'étude des processus de vie et de mort. Pour l'instant, il importe surtout de retenir que tous les états d'une chaîne irréductible sont pareils.

3.1.9 (Nature des états d'une chaîne irréductible)

proposition 4. Tous les états d'une chaîne irréductible $(X_t)_{t\geq 0}$ sont de la même nature : ou bien tous transitoires, ou bien tous récurrents nuls, ou bien tous récurrents positifs. On dit alors que le processus est transitoire, ou récurrent nul, ou récurrent positif.
Et la situation confortable est celle où tous les états sont récurrents positifs.

Théoréme 3.1. (Distribution asymptotique)

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu irréductible, alors il existe une unique loi stationnaire π si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.

Si l'espace d'états est fini, tout se passe paisiblement.

proposition 5. (Espace d'états fini)

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu irréductible sur un espace d'états fini, alors il existe une unique loi stationnaire π.

Chapitre 4

Processus de vie et de mort :

Les processus de vie et de mort peuvent servir à modéliser l'évolution d'une population au cours du temps, le nombre de clients dans une file d'attente, etc. Après les avoir définis, on cherche à quelle condition un tel processus admet une loi stationnaire. On verra enfin leur application aux files d'attente markoviennes.

4.1 Modèle général :

Matrice de sauts d'un processus de vie et de mort.

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -\mu_4 \end{pmatrix}$$

on à $\qquad P'(t) = P(t)A$

alors

$$\begin{pmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_n'(t) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_n(t) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -\mu_4 \end{pmatrix}$$

4.1.1 Processus de vie et de mort

Définition :

On appelle processus de vie et de mort toute chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont le générateur infinitésimal A est de la forme :

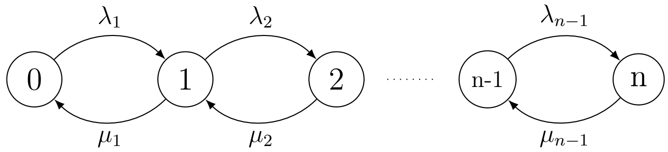
$$a_{ij} \neq 0 \Longleftrightarrow j \in \{i-1, i, i+1\}.$$

Autrement dit, les transitions à partir de l'état i ne peuvent se faire que vers l'état (i - 1), en cas de décès, ou vers l'état (i + 1), en cas de naissance. Par rapport aux chaînes de vie et de mort en temps discret, la différence réside dans le fait qu'une naissance ou un décès peut arriver à n'importe quel moment, et non uniquement à des instants entiers.

4.1.2 Notation :

On note $\lambda_i = a_{i,i+1}$les taux de naissance et, pour i>0 ,
$\mu_i = a_{i,i-1}$les taux de décès.
On suppose $\mu_i > 0$ *et* $\lambda_i > 0$ arepresente la matrice de transition
D'après ce qui a été vu Proposition 1., le temps de séjour dans l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $(\lambda_i + \mu_i)$. De plus, avec probabilité $\dfrac{\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)}$, cette transition est un décès ; avec probabilité$\dfrac{\lambda_i}{(\lambda_i+\mu_i)}$, c'est une naissance. Ce résultat n'est pas étonnant si on repense au processus de Poisson : si on n'avait que des naissances, ce temps de séjour suivrait une loi $\varepsilon(\lambda_i)$. Si on n'avait que des décès, il suivrait une loi $\varepsilon(\mu_i)$. Ici les deux peuvent se produire, le temps de séjour est donc le minimum d'une loi $\varepsilon(\lambda_i)$ et d'une loi $\varepsilon(\mu_i)$, les deux

variables étant indépendantes entre elles.
On veut savoir si un tel processus admet une distribution stationnaire p. Puisque les λ_i et les μ_i sont tous strictement positifs, tous les états communiquent entre eux et la chaîne est irréductible. On résout donc le système d'équation $pA = 0$, ce qui donne :



Graphe de transition d'un processus de vie et de mort.

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0(t) - \lambda_1 p_1(t) = 0 \qquad \ldots \qquad (1) \\ \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t) = 0 \qquad \ldots (2) \end{cases}$$

(1) d'où $\Rightarrow p_1(t) = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\ p_0(t)$
(2) d'où $-(\lambda_1 + \mu_1)p_1(t) + \lambda_0 p_0(t) + \mu_2 p_2(t)$
$\Rightarrow (\lambda_1 + \mu_1)P_1(t) = \lambda_0(t) + \mu_2 p_2(t) \Rightarrow \mu_2 p_2(t) = (\lambda_1 + \mu_1)p_1(t) - \lambda_0 p_0(t) =$

$(\lambda_1 + \mu_1)[\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\ p_0(t)] - \lambda_0 p_0(t) \Rightarrow \mu_2 p_2(t) = \dfrac{(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_0\mu_1)p_0(t) - \lambda_0\mu_1 p_0(t)}{\mu_1}$

$\Rightarrow p_2(t) = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_2\mu_1}\ p_0(t)$

$p_3(t) = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_2\mu_1\mu_3}\ p_0(t)$
:

.
$p_n(t) = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} p_0(t) = p_0(t) \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \dfrac{\lambda_j - 1}{\mu_j}$ En écrivant qu'on doit avoir de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$$

l'existence d'une loi stationnaire dépend de :

$$p_0(t) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{\mu_j}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}}$$

avec la convention usuelle qu'un produit vide $\prod_{j=1}^{0}$ vaut 1.

Bilan des courses : si la série $\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}$ est convergente, alors il y a une distribution stationnaire. Sinon, on a $p_0 = 0$, d'où de proche en proche $p_n = 0$ pour tout n : il n'y a pas de loi stationnaire. Dans ce cas, le processus est transitoire ou récurrent nul.

CNS de récurrence positive

proposition 6. Le processus de naissance et de mort est récurrent positif si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}$$

est convergente. Dans ce cas, la loi stationnaire p est donnée par

:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}} \quad et \quad p_n = p_0\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}$$

. **Remarque** :

Intuitivement, pour qu'on ait une loi stationnaire, il faut empêcher le processus de partir à l'infini : ceci est possible si les μ_n sont plus grands que les λ_n, ce que traduit la convergence de la série.

Rappelons que le processus est récurrent nul si la probabilité de revenir en un état vaut 1, mais que le temps moyen de retour en cet état est infini. Le processus est transitoire si la probabilité de retour en un état est strictement inférieure à 1. La chaîne étant irréductible, tous les états sont de même nature et il suffit donc de s'intéresser à l'état 0. Un processus partant de l'état 0 va passer dans l'état 1 au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ_n. Ainsi le processus est récurrent si la probabilité P_1 de revenir en 0 partant de l'état 1 est égale à 1. Pour calculer P_1, on va établir une relation générale sur pn, probabilité de retour en 0 partant de l'état n $>$ 0. En notant $T_0 = 0, T_1, ..., T_k, ...$ les instants où le processus change d'état, P_n s'écrit :

$$P_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k} = 0\} \quad /X_{T_0} = n\right)$$

En conditionnant par rapport à X_{T_1} , on obtient :

$$P_n = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n-1, X_{T_0}=n\Big)\mathbb{P}(X_{T_1}=n-1/X_{T_0}=n)+...$$

$$...P_n = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n+1, X_{T_0}=n\Big)\mathbb{P}(X_{T_1}=n+1/X_{T_0}=n).$$

Mais vu les taux de transition du processus, on sait que :

$$\mathbb{P}(X_{T_1}=n-1/X_{T_0}=n)=\frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}\ et\ \mathbb{P}(X_{T_1}=n+1/X_{T_0}=n)=\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}.$$

D'autre part, le processus étant markovien et homogène, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n-1, X_{T_0}=n\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n-1\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_0}=n-1\Big)\\ &= P_{n-1}\end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n+1, X_{T_0}=n\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_1}=n+1\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k}=0\}\ \ /X_{T_0}=n+1\Big)\\ &= P_{n+1}\end{aligned}$$

On a ainsi abouti à une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur les P_n :

$$\forall n>0 \qquad P_n=\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}P_{n+1}+\frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}P_{n-1}$$

laquelle s'écrit encore :

$$P_n-P_{n+1}=\frac{\mu_n}{\lambda_n}(P_{n-1}-P_n)$$

ou encore, en raisonnant de proche en proche :

$$P_{n-1}-P_n=\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}(P_{n-2}-P_{n-1})=\frac{\mu_1...\mu_{n-1}}{\lambda_1...\lambda_{n-1}}(P_0-P_1)=\frac{\mu_1...\mu_{n-1}}{\lambda_1...\lambda_{n-1}}(1-P_1)$$

puisque par définition $P_0=1$. On écrit de la sorte $(P_{k-1}-P_k)$ pour k variant de 1 à n, on somme le tout et il vient :

$$1 - P_n = (1 - P_1)\left(1 + \frac{\mu_1 ... \mu_{n-1}}{\lambda_1 ... \lambda_{n-1}}\right)$$

Puisque $0 \leqslant 1 - P_n \leqslant 1$ pour tout n, il est clair que si la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\mu_1 ... \mu_{n-1}}{\lambda_1 ... \lambda_{n-1}}$$

est divergente, on a nécessairement $P_1 = 1$ et par suite $P_n = 1$ pour tout n. Le processus est alors récurrent. Sinon, le processus est transitoire.

Processus de Poisson et processus de naissances Pour ces deux processus, le comptage augmente de 1 à chaque temps. On a donc :

$$P_r(N_{i+1} = j/N_i = n) = \begin{cases} 1 & si\ j = n + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Processus de morts Il y a une décroissance de la population, donc :

$$P_r(N_{i+1} = j/N_i = n) = \begin{cases} 1 & si\ j = n - 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour ces processus, les probabilités de transition de la chaîne de Markov sont donc déterministes, ce qui n'est plus le cas pour un processus de naissances et morts.

Processus de naissances et morts

Si la taille de la population à l'instant "i" est n, alors il y a deux états possibles à l'instant suivant, soit il y a une naissance et la taille de la population augmente de 1, soit c'est une mort et la taille de la population diminue de 1. Pour calculer les probabilités de ces deux transitions possibles, on utilise les résultats suivants :

$$P_r(N_{i+1} = j/N_i = n) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n)+\mu(n)} & si\ j = n+1 \\ \\ \dfrac{\mu(n)}{\lambda(n)+\mu(n)} & si\ j = n-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où $\lambda(n)$ et $\mu(n)$ sont respectivement les taux de naissances et de morts pour une taille de population égale à n. Si on suppose que les taux de naissances et morts ne dépendent pas de la taille de population ($\lambda(n) = \lambda$ et $\mu(n) = \mu$), ces expressions se simplifent : par exemple $P_r\{N_{i+1} = n+1|N_i = n\} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ Plus généralement, la matrice de transition de la chaîne de Markov P est

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \dfrac{\mu(n-1)}{\lambda(n-1)+\mu(n-1)} & 0 & \dfrac{\lambda(n-1)}{\lambda(n-1)+\mu(n-1)} & & \\ & & \dfrac{\mu(n)}{\lambda(n)+\mu(n)} & 0 & \dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n)+\mu(n)} & \\ & & & \dfrac{\mu(n+1)}{\lambda(n+1)+\mu(n+1)} & 0 & \dfrac{\lambda(n+1)}{\lambda(n+1)+\mu(n+1)} \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Matrice de taux de transition

La matrice de transition de la chaîne de Markov P et les temps d'attente peuvent êetre résumés dans une matrice appelée matrice de taux de transition, notée R qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \lambda(n-1)(n-1) & -[\lambda(n-1)+\mu(n-1)](n-1) & \mu(n-1)(n-1) & & \\ & & & \lambda(n)n & -[\lambda(n)+\mu(n)]n & \mu(n) \\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

la diagonale de cette matrice correspond à l'opposé du paramétre de l'exponentiel que suit le temps d'attente avant le prochain événement. C'est donc l'opposé de l'inverse du temps d'attente moyen. Par exemple si le nombre d'événements à la date t est n, le temps d'attente moyen avant le prochain événement est $\dfrac{1}{\lambda(n)+\mu(n)}$ si on ajoute 1 à chaque ligne divisée par la valeur de la diagonale correspondante, on retrouve les probabilités de transition de la chaîne de Markov : par exemple

$$\frac{\lambda(n)}{\lambda(n)+\mu(n)}+1=\frac{-\mu(n)}{-(\lambda(n)+\mu(n))}=\frac{\mu(n)}{\lambda(n)+\mu(n)}$$

Systéme d'équations différentielles

On peut écrire le systéme d'équations différentielles, sous la forme suivante : si on note $p(t)=[p_0(t)p_1(t)...p_n(t)...]$ alors $p'(t)=p(t)R$ et sa solution est $p(t)=p(0)e^{Rt}=p(0)(e^R)^t$

4.1.3 Processus linéaire de naissance et de mort

$\lambda=n\lambda\,;\,\mu=n\mu\Rightarrow P_0'(t)=\mu P_1(t)$

$p_n'(t)=-(\lambda+\mu)np_n(t)+\lambda(n-1)p_{n-1}(t)+\mu(n+1)p_{n+1}(t)$

on a $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}p_0'(t)=0\Rightarrow\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}p_1(t)=0$

De même que

$\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}p_n'(t)=0$ ceci implique que $p_n(t)=p_n$

si $p_0(\infty)=1\Rightarrow$ La probabilité d'extinction ultime est de 1

si $p_0(\infty)=p_0<1$; les relations $p_1=p_2=p_3...=0$ impliquer avec prob :$1-p_0$la population peut augmenter sans limites. La population doit soit s'éteindre ou augmenter indéfiniment.

$p_n'(t)=-(\lambda+\mu)np_n(t)+\lambda(n-1)p_{n-1}(t)+\mu(n+1)p_{n+1}(t)$

Défini comme

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)\text{ donc }N'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n'(t)$$

$$N'(t)=-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n^2P_n(t)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)P_{n-1}(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P_{n+1}(t)$$

en écriée $(n-1)n=(n-1)^2+(n+1);(n+1)n=(n+1)^2-(n+1)$

$$N'(t)=-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n^2P_n(t)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2P_{n-1}(t)+\mu\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2P_{n+1}(t)+1.P_1(t)\right]$$

$$+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(t)-\mu\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2P_{n+1}(t)+P_1(t)\right]\Rightarrow$$

$$N'(t)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)-\mu\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)=(\lambda-\mu)N(t)\ N(t)=n_0e^{(\lambda-\mu)t}$$

si $\quad p_{n_0} = 1 \; N(t) \longrightarrow 0$ ou ∞ depending on $\lambda < \mu$ ou $\lambda > \mu$.

Similaire si $N_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t)$ d'où $N_2(t) = 2(\lambda - \mu)N_2(t) + (\lambda + \mu)N(t)$

et si $\lambda > \mu$ $Var(N(t)) = n_0 e^{2(\lambda-\mu)t}\{1 - e^{(\mu-\lambda)t}\}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$

CNS de récurrence

proposition 7. Le processus est récurrent si et seulement si la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\mu_1 ... \mu_n}{\lambda_1 ... \lambda_n}$$

est divergente. Sinon, il est transitoire.

On peut retrouver la différence entre récurrent positif et récurrent nul en calculant le temps moyen de retour à l'état 0. Soit donc e_n le temps moyen de passage de l'état n à l'état (n-1). Si e_1 est fini, alors le processus est récurrent positif, sinon il est récurrent nul. On obtient cette fois l'équation :

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n + \mu_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}\left(\frac{1}{\lambda_n} + e_n + e_{n+1}\right).$$

car lorsqu'on part de l'état n :

– ou bien on rentre dans l'état (n-1), ce qui prend un temps moyen $\dfrac{1}{\mu_n}$ et arrive avec probabilité $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}$;

– ou bien on rentre dans l'état (n+1), ce qui arrive avec probabilité $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}$, prend un temps moyen $\dfrac{1}{\lambda_n}$, et il faudra en plus en moyenne le temps $(e_n + e_{n+1})$ pour arriver dans l'état (n-1).

On en déduit :

$$\frac{\lambda_1 ... \lambda_n}{\mu_1 ... \mu_n} e_{n+1} = e_1 - \frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} + ... + \frac{\lambda_0 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 ... \mu_n}\right)$$

Le membre de gauche est toujours supérieur ou égal à 0. Il s'ensuit que si la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_0 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 ... \mu_n}$$

est divergente, alors nécessairement e1 doit être infini : on retrouve bien le résultat de la proposition.

Remarque : On en déduit que si la série$\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j - 1}{\mu_j}$est divergente, mais la série$\sum_{n\geq 0}\frac{\mu_1...\mu_n}{\lambda_1...\lambda_n}$est convergente, alors le processus est récurrent nul.

4.1.4 Etude de cas

En face de la gare, les usagers arrivent un par un pour prendre un ticket. Si elles sont libres, la première occupera la cabine, sinon elle partira définitivement.
On suppose que dans l'intervalle$[t; t + \Delta t]$ l'accès de l'utilisateur est $\lambda + o(\Delta t)$ et dans le même laps de temps $\mu + o(\Delta t)$ la probabilité de sortie de l'utilisateur, ceci indépendamment des événements qui précèdent le moment t.
Le système est conçu sur le modèle de la naissance et de la mort dans deux états : libre(E_0) et bondé(E_1) Nous avons :
$\lambda_0 = \lambda$ et $\mu_1 = \mu$ avec $\lambda, \mu > 0$
Rappelons en effet que λ_k est le taux de naissance pour une population de taille k et vaut 0 pour $k \geq 1$ dans cet exemple. De même$\mu_0 = \mu$ et μ_k n'existe pas pour k>1 puisque la population ne peut pas dépasser 1.
Par conséquent, le processus admet le diagramme de transition suivant :
$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$
$p_1'(t) = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t)$
$p_0(t) + p_1(t) = 1$

Portons la valeur $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ dans la première équation ; il vient :
$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu - \mu p_0(t) = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu$. C'est une équation différentielle linéaire avec second membre. La solution de l'équation sans second membre associée est $p_0(t) = ke^{-(\lambda+\mu)t}$. on pose $p_0(t) = f(x)e^{-(\lambda+\mu)t}$ Portant cette valeur dans l'équation avec second membre, après les simplifications nécessaires, on aura : $f(x)e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu$ Donc $f(x) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$
On en déduit : $f(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C$.
Nous aurons finalement :

$$p_0(t) = e^{(\lambda+\mu)t}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C\right] = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

Si l'on impose la condition initiale que la cabine est libre à l'instant t = 0, on aura $p_0(t) = 1$ et donc $C = \lambda$

Nous aurons alors des expressions explicites et simples pour la probabilité pour que la cabine soit libre et la probabilité pour qu'elle soit occupée. On a :

$p_0(t) = \dfrac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu}$

et $p_1(t) = 1 - p_0(t) = \dfrac{\lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu}$

si $t \longrightarrow \infty$, nous aurons :

$p_0(t) \longrightarrow p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$ et $p_0(t) \longrightarrow p_0 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Conclusion :

Les chaînes de Markov jouent un rôle central dans la modélisation stochastique. les processus de naissance et de mort sont des cas particuliers de chaînes de Markov et sont utilisés pour décrire l'évolution du nombre d'individus d'une population, au cours du temps. Nous nous intéressons essentiellement aux processus de naissance et mort .

Dans ce mémoire nous avons étudié des processus stochastiques de naissance et mort .

Ainsi que leurs principales propriétés , Plusieurs de ces propriétés sont utilisées dans la modélisation stochastique.

4.2 Annexes

4.2.1 Propriétés de la loi exponentielle

Loi conditionnelle : On peut remarquer que

$$P_r\{T > s+t | T > s\} = \frac{P_r\{T > s+t, T > s\}}{P_r\{T > s\}} = \frac{P_r\{T > s+t\}}{P_r\{T > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P_r\{T > t\}$$

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T - t \mid T > t) = \frac{1}{\lambda}$$

Loi de l'inf de deux variables exponentielles. Soient X et Y deux variables exponentielles indépendantes de paramétres respectifs λ et μ :

$X \sim \varepsilon(\lambda)$, $Y \sim \varepsilon(\mu)$, (X,Y) indépendante ;

soit Z la plus petite de ces deux variables $Z = inf(X, Y)$,

on a :

(i) $Z \sim \varepsilon(\lambda + \mu)$;

(ii) $P_r\{Z = X\} = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$, $P_r\{Z = Y\} = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Démonstration :

(i) on a $P_r\{Z > z\} = P_r\{X > z, Y > Z\} = P_r\{X > z\}\{Y > Z\} = e^{-\lambda z}e^{-\mu z} = e^{-(\lambda+\mu)z}$.

(ii) on a $P_r\{Z = X\} = P_r\{X < Y\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t)P_r\{Y > t\}dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}e^{-\mu t}dt =$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ l'autre résultat s'obtient par symétrie.

Table des matières

Dédicace 2

Remerciements 3

Notation 4

Introduction 5

la problématique 6

0.1 revue de littérature 7

1 *Processus de Poisson* **10**

1.1 Loi de probabilité : 11

1.2 Systéme différentiel : 11

1.2.1 Loi du nombre d'événement et interprétation 12

1.2.2 Résolution du systéme : 13

1.2.3 Loi des dates d'arrivée des événements : 14

1.2.4 Comparaison avec un modéle déterministe : 15

1.2.5 Temps séparant deux événements successifs 15

1.2.6 Date du n-éme événement 17

1.2.7 Densité de la loi gamma 17

2 Processus de naissances, processus de morts, processus de naissances et morts **18**

2.1 Processus de naissances 18

2.1.1 Equation de récurrence : 18

2.2 Loi de la taille de la population . . . 19
2.2.1 Equations différentielles : . . . 19
2.2.2 Loi de N(t) : . . . 19
2.2.3 Propriétés : . . . 21
2.2.4 Loi de la durée entre deux événements successifs . . . 21
2.3 Processus de morts . . . 22
2.3.1 Loi de N(t) : . . . 22
2.3.2 propriétés : . . . 22
2.3.3 Loi de la durée entre deux événements. . . . 23
2.3.4 Date d'extinction : . . . 23

3 Processus de naissances et morts **24**
3.1 Modéle . . . 24
3.1.1 équation différentielle . . . 24
3.1.2 Remarque . . . 25
3.1.3 Preuve . . . 25
3.1.4 Extension au cas général : . . . 28
3.1.5 Extinction de la population : . . . 28
3.1.6 Comparaison avec le modéle déterministe : . . . 29
3.1.7 Temps de séjour dans un état . . . 30
3.1.8 (Loi stationnaire et convergence en loi) . . . 30
3.1.9 (Nature des états d'une chaîne irréductible) . . . 31

4 Processus de vie et de mort : **32**
4.1 Modèle général : . . . 32
4.1.1 Processus de vie et de mort . . . 33
4.1.2 Notation : . . . 33
4.1.3 Processus linéaire de naissance et de mort . . . 39
4.1.4 Etude de cas . . . 41
4.2 Annexes . . . 44
4.2.1 Propriétés de la loi exponentielle . . . 44

[1] Bruno Sericol," chaîne de Markov "

[2] Arnaud Guyader,"Processus markoviens de sauts ", Université de Rennes 2 Master de Statistiques,Année 2006/2007 Second Semestre.

[3] Olivier Scaillet , "Processus de naissance et de Poisson" ,University of Geneva and Swiss Finance Institute .

[4] E. Lebarbier, S. Robin,"Processus de Poisson Processus de Naissances et Morts",AgroParisTech .

ملخص : في هذه المذكره قمنا بدراسة سيرورة بدون ذاكرة التي تسمح بزيادات وتناقصات بمعدلات متغيرة اعتماداً على الحالة الراهنه للعملية. تسمى هذه العمليات المشاركة في نمذجة فئات عديده من ظواهر الانتظار ، سيروره الولادة والوفاة. وهي بدورها حالات خاصة من عمليات ماركوف المتجانسة في وقت مستمر .

الكلمات المفتاحية سيروره بواسون، سيروره العد ،سيروره الولادة ، سيروره الموت .

Résumé : Dans ce mémoire nous avons étudié des processus sans mémoire qui admettent des incrémentations et des décrémentations avec des taux variables, dépendants de l'état actuel du processus. Ces processus, intervenant dans la modélisation de larges classes de phénomènes d'attente, sont appelés processus de naissance et de mort. Ils sont à leur tour des cas particuliers des processus de Markov homogènes dans le temps continu.

Mots clés : Processus de poisson , processus de comptage , Processus de naissace , Processus de mort .

Abstract : In this memory we studied processes without memory which accept incrementations and decrementations with variable rates , dependent on the current state of the process. These processes, which are involved in the modeling of large classes of waiting phenomena, are called birth and death processes. They are in turn special cases of homogeneous Markov processes in continuous time.

Keywords Fish process, counting process, Birth process, Death process.