جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجةو تحليل عددي

من إعداد الطالبة : محمدي ربيعة

الموضوع

طريقة العددية لحل المعادلات التكاملية ذات الرتب الكسرية باستعمال كثيرات حدود تشيبيتشيف

تناقش يوم 2018/06/07 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة رئيسا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة مشرفا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة ممتحنا

شكر وعرفان

نحمد الله ونشكره شكرا جزيلا اذ هو خالقنا ومعيننا فهو الاولى بالشكر في كل الاوقات والظروف .
نحمد الله عز وجل ونثني عليه الخير كله على ان وفقنا لاتمام هذا العمل وعلى تسهيله لنا الطريق لجنينا ثمرة جهودنا ونساله ان يجعل هذا كله خالصا لوجهه الكريم وان ينفعنا به وينتفع به من بعدنا ثم انه من لم يشكر الناس لا يشكر الله فاعترافا منا لاهل الفضل من بعد فضل الله عزوجل .
نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :
إلى الأستاذ المشرف عباسي حسين بن محمد الذي لم يبخل علي بنصائحه وتوجيهاته، لك منا كل معاني التقدير والعرفان .
إلى كل من ساهم من قريب او بعيد في تكويننا طيلة مسارنا الدراسي الإبتدائي والمتوسط والثانوي.
إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مسارنا الجامعي .
إلى كل من قدم لنا يد العون والمساعدة في انجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .
إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .

اسال لله ان يجازي الجميع كل خير

إهداء

إليك أمي الغالية...يامن ضحيتي من أجلي بكل شيء....
جزاك الله عني كل خير...
إليك والدي الحبيب...لقد كنت نعم الأب ومازلت...
أسأل الله أن يحفظك لنا وأن يبارك لنا في عمرك...
إليكم إخوتي وأخواتي...لقد كنتم نعم السند....
أدعوا الله أن يوفقكم في حياتكم...
إلى كل من قاسمني حلو الحياة ومرها...
إلى جميع أساتذي الأفاضل في مشواري الدراسي....
إلى كل من نساه قلمي ولم ينساه قلبي...

اسال لله ان يجازي الجميع كل خير

الفهـــــــــــرس

ترميز

الرمز	معناه
$\Gamma(x)$	الدالة غاما
$B(x,y)$	الدالة بيتا
D^{α}	مؤثر الاشتقاق
I^{α}	مؤثر التكامل
$T_n(x)$	كثير حدود تشيبيشيف من النوع الأول
$T_n^*(x)$	كثير حدود تشيبيشيف المحول من النوع الأول
$U_n(x)$	كثير حدود تشيبيشيف من النوع الثاني
$U_n^*(x)$	كثير حدود تشيبيشيف المحول من النوع الثاني
$V_r(x)$	كثير حدود تشيبيشيف من النوع الثالث
$W_r(x)$	كثير حدود تشيبيشيف من النوع الرابع
δ_{ij}	دالة كرونيكر ($\delta_{ij}=0$ اذا كان $i \neq j$ و $\delta_{ij}=1$ اذا كان $i=j$)
$w(x)$	دالة الوزن

مقدمة

في السنوات الأخيرة اعتمد العديد من علماء الرياضيات من أجل تقريب الدوال على كثيرات الحدود من أجل حل العديد من المسائل الرياضية حيث ظهرت الكثير من الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية وعلى سبيل المثال حل حالات خاصة من معادلات التكاملية لفولتيرا المفرد من النوع الأول والثاني وهي معادلات آبل التكاملية ، المعرفة بواسطة :

$$f(x) = \int_0^x |x-t|^{-\alpha} y(t)dt \tag{1}$$

$$y(x) = f(x) + \int_0^x |x-t|^{-\alpha} y(t)dt \tag{2}$$

$$0 < \alpha < 1; \quad 0 \le x \le T;$$

حيث $f(x) \in C[0,T]$ هي الدالة المعروفة و $y(x)$هي دالةغير معروفة يتم تحديدها ، وتكون T ثابت موجب .
تاريخيامشكلة آبل هي المشكلة الأولى التي أدت إلى دراسة معادلات التكاملية . معادلات آبل التكاملية المعممة على جزء محدود ظهرت في ورقة لأول مرة.Zeilon [11]
المرجع الشامل لمعادلات آبل التكامليةبما في ذلك قائمة واسعة من التطبيقات ، يمكن العثور عليها في [13][12]
ولحل هذه المعادلات نعتمد على كثيرات الحدود .
ولقد حاولنا من خلال مذكرتنا هذه التطرق لحل بعض المعادلات التكاملية لفولتيرا المفرد من النوع الأول والثاني الناتجة من معادلات آبل التكاملية بواسطة كثيرات حدود تشيبيتشيف الذي يعتبر أحد اقدم كثيرات الحدود نسبيا والذي يعود انشاءه من طرف العالم الرياضي تشيبيتشيف في هذا الإطار قمنا بإنجاز مذكرتنا حيث قسمنها إلى ثلاثة فصول :

- ففي الفصل الأول :تعرضنا بإختصار الى لمحة عن الحساب الكسري جيث تطرقنا الى تعريف الدوال الخاصة ,الاشتقاق ذي الرتب الكسرية ,التكامل ذي الرتب الكسرية ثم المعادلات الخطية التكاملية وتصنيفها.

- الفصل الثاني :فقد تعرضنا إلى كثير حدود تشيبيتشيف وخصائصه ,المصفوفات التنفيذية لتشيبيتشيف ونخص بالذكر المصفوفةالتنفيذية للتكامل واالمصفوفة التنفيذية للإشتقاق.

- الفصل الثالث والأخير : عرضنا الطريقة ثم أثبتنا مدى فاعليتها من خلال تعرضنا إلى أمثلة حول استعمال المصفوفة التنفيذية للتكامل والمصفوفة التنفيذية للإشتقاق لكثير حدود تشيبيتشيف في تقريب في حل بعض المعادلات التكاملية .

الفصل الأول

لمحة عن الحساب الكسري

قائمة المحتويـــــــات

1.1 مقدمة

الحساب الكسري عملية رياضية ظهر ت في سنة 1695 على يد العالم لايبينز ثم تطور حتى العصر الحديث وبعد الثورة التكنولوجية وجدت طريقها للاستخدام في مختلف ميادين العلمية وخاصة الهندسة والفيزياء والمكانيك والكهرباء ...

حيث تطرقنا في هذا الفصل الاول لمحة عن الحساب الكسري وتناولنا فيه :

-الدوال الخاصة

-الاشتقاق ذي الرتب الكسرية

-التكامل ذي الرتب الكسرية

-المعادلات الخطية التكاملية وتصنيفها

2.1 الدوال الخاصة

1.2.1 الدالة غاما

تعريف 1.2.1 تعرف دالة غاما كالاتي:

$$\Gamma(n) = \lim_{M \to \infty} \int_0^M x^{n-1} \exp^{-x} dx \quad n > 0$$

فمثلا لايجاد $\Gamma(2)$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \lim_{M \to \infty} \int_0^M x^{2-1} \exp^{-x} dx \\
&= \lim_{M \to \infty} \int_0^M x \exp^{-x} dx \\
&= \lim_{M \to \infty} [-x \exp^{-x} - \exp^{-x}]_0^M \\
&= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{-M}{\exp^M} - \frac{1}{\exp^M} + 0 + \exp^0\right) = 1
\end{aligned}$$

قواعد اساسية

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \quad \forall n \neq 0$

اذا كانnعددا صحيحا موجبا فان $\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

ملاحظة 1 لا يمكن ايجاد $\Gamma(n)$ اذا كان n عددا صحيحا سالبا

ملاحظة 2

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n.(n-1)!$$

مثال 1.1

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!,$$

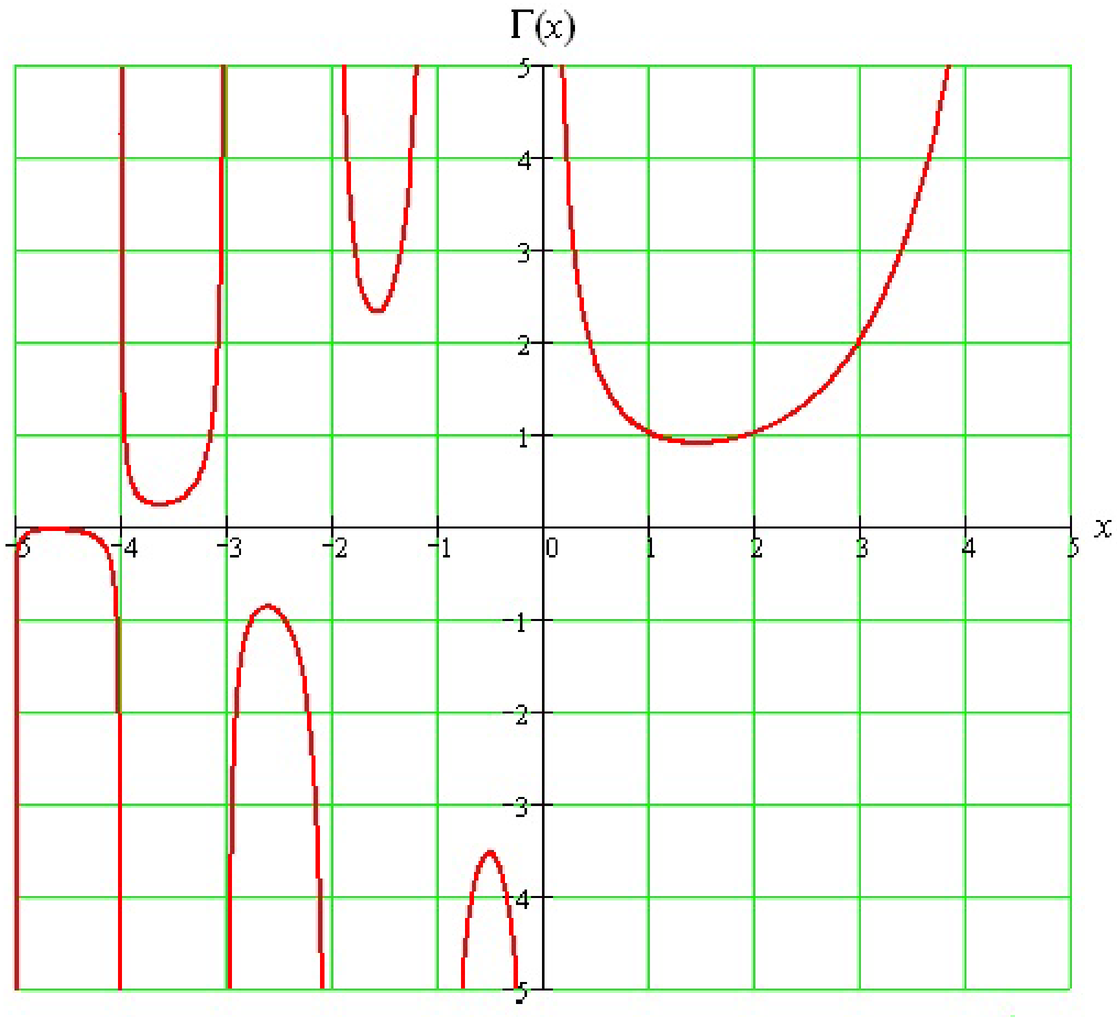
..

مثال 2.1

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2\times 2!} = \frac{60}{2} = 30$$

مثال 3.1 برهان $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \exp^{-x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \exp^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \exp^{-x^2} dx \\
[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp^{-(x^2+y^2)} dxdy \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} \exp^{-r^2} drd\theta = \pi \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$



شكل 1.1: منحنى بياني للدالة غاما

2.2.1 الدالة بيتا

تعريف 2.2.1 الدالة بيتا من الدوال الاساسية في الحساب الكسري و تعطى عبارتها على النحو التالي [14] :

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad ,n>0, \quad m>0$$

فمثلا لايجاد $B(2,3)$

$$\begin{aligned}B(2,3)&=\int_0^1 x(1-x)^2dx\\&=\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx\\&=\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

ملاحظة 3

$$B(m,n)=B(n,m)$$

3.2.1 علاقة دالة غاما و بيتا

تعطى العلاقة بين غاما و بيتا [14] :

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad n>0, \quad m>0$$

فمثلا لايجاد $B(2,3)$

$$B(2,3)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)}=\frac{1!.2!}{4!}=\frac{1}{12}$$

3.1 الاشتقاق ذي الرتب الكسرية

كلنا نعرف الاشتقاق العادي و هذ االاشتقاق هو و ذو رتب صحيحية $1, 2, \ldots, n$ لكننا في هذا الجزء سنتعرف تعميما للاشتقاق حيث تكون الرتب غير صحيحة يعني قد تأخذ رتبة الاشتقاق قيما عشرية مثل 2,3 أي n<x<n+1 و يسمى بالاشتقاق الكسري أو الاشتقاق المعمم تجدر الاشارة إلى أن هناك تعريفات عديدة للاشتقاق الكسري منها :
الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل.
الاشتقاق الكسري لكابتو.
الاشتقاق الكسري لغرينوالد -ليتنيكوف.

1.3.1 الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل

تعريف 3.3.1 لتكن $x \in [a, b]$و$f \in C[a, b]$, الاشتقاق الكسري اليميني واليساري لريمان ليوفيل للدالة f في نقطة x يعرف كمايلي [2] :

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad a < t < x $$

$$ {}_xD_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_x^b (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad x < t < b \tag{1.1} $$

الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل لبعض الدوال

$f(t) = (t-a)^{\beta}$

$$ {}_a^RD_t^{\alpha} (t-a)^{\beta} = [(\frac{d}{dt})^m [\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}](t-a)^{\beta+m-\alpha}] $$

$$ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (\frac{d}{dt})^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} $$

$$ (\frac{d}{dt})^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)\alpha(\beta+m-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} $$

$$ {}_a^RD_t^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)-(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} $$

$$ = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)-(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)-(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} $$

$$ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} $$

$\alpha = 1$

$$ {}_a^RD_t^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^{\beta} $$

اشتقاق دالة ثابتة بواسطة ريمان ليوفيل

$$ {}_a^R D_t^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} $$

2.3.1 الاشتقاق الكسري لكابيتو

تعريف 4.3.1 لتكن الدالة $f \in C[0,\infty[$, الاشتقاق الكسري لكابيتو للدالة يعرف f كمايلي [5]:

$$ D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{d^n f(t)}{dt^n}, & \alpha = n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & t > 0, (n-1 < \alpha < n) \end{cases} . \quad (2.1) $$

العلاقة بين الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل وكابيتو

لتكن الدالة $f \in C[0,\infty[$ [5]

$$ I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{k}(0^{+}) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (3.1) $$

بالنسبة للاشتقاق الكسري لكابيتو لدينا $D^{\alpha} C = 0$, حيث c ثابت.

$$ D^{\alpha} t^n = \begin{cases} 0, & n < [\alpha], n \in \mathbb{Z}^+. \\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} t^{n-\alpha}, & n \geq [\alpha], n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (4.1) $$

3.3.1 الاشتقاق الكسري لغرينوالد -ليتنيكوف

تعريف 5.3.1 المشتقات الكسرية لغرينوالد -ليتنيكوف معرفة على الشكل [14]:

$$ {}_a D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{b-a}{h}]} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} f(t-jh) \quad (5.1) $$

4.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

كما رأينا تعميما للإشتقاق حيث رأينا أنه يمكن الاشتقاق دالة برتبة غير صحيحة، كذلك يمكننا أن نعمم التكامل إلى رتب عشرية و قد قام العلماء بذلك و أعطوا تعريفات للتكامل المعمم سنتطرق إلى بعض منها :

1.4.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل

تعريف 6.4.1 لتكن $0 < \alpha < 1$ و $f \in C[a,b]$. التكامل الكسري اليميني واليساري لريمان ليوفيل يعرف كمايلي [2] :

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt $$

$$ {}_xI_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt $$

$$ x \in [a,b]; \quad \alpha > 0. $$

مبرهنة 1 التكامل الكسري اليميني واليساري لريمان ليوفيل يحقق الخصائص التالية [2]:

$$ (1) \quad I^\alpha \left(\ \textstyle\sum_{i=0}^n \mu_i f_i(x) \ \right) = \sum_{i=0}^n \mu_i I^\alpha f_i(x) $$

$$ (2) \quad I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} x^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1 $$

برهان 1

$$ \begin{aligned} I^\alpha \left(\ \textstyle\sum_{i=0}^n \mu_i f_i(x) \ \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\ \textstyle\sum_{i=0}^n \mu_i f_i(t) \ \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^n \mu_i \left(\ \textstyle\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_i(t)dt \ \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \mu_i \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\ \textstyle\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_i(t)dt \ \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \mu_i I^\alpha f_i(x) \end{aligned} $$

برهان 2

$$ I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt $$

بتغيير المتغير $t{=}rx$ نحصل على :

$$ I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} r^\beta x^\beta x dr $$

باستعمال الدالة بيتا نتحصل على مايلي :

$$I^{\alpha}x^{\beta}=\frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^{\beta}dr=\frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)$$

من ناحية أخرى نعرف أن الدالةبيتا يمكن أن تكون مكتوبة بواسطة الدالة غاما على النحو التالي :

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ومنه لدينا:

$$I^{\alpha}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}.$$

5.1 المعادلات التكامليةالخطية وتصنيفها

نعلم أن أي معادلة تكاملية تعطى بالعلاقة التالية [9]:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{6.1}$$

حيث $K(x,t)$ يسمى النواة التكاملية للعلاقة (6.1) ، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ هما حدود التكامل. حيث $u(x)$ تابع غير معروف . و تجدرالإشارة هنا إلى أن نواة $K(x,t)$ و التابع $f(x)$ في العلاقة (6.1) معلومين، و λ هو عدد ثابت.
الهدف من هذا هو تحديد التابع المجهول $u(x)$ الذي من خلاله يمكن حل العلاقة (6.1) وذالك عن طريق استخدام بعض تقنيات الحلول.

1.5.1 المعادلات التكاملية لفولتيرا

الشكل الأكثر تقليدية من المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا هو النموذج التالي :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{7.1}$$

حيث تستند حدود التكامل على المتغير x والعدد a ، التابع غير المجهول $u(x)$ يبدو خطيا.
إذا كان التابع $\phi(x) = 1$ فإن المعادلة (7.1) تصبح ببساطة :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{8.1}$$

وهذه المعادلة معروفة باسم معادلة فولتيرا من النوع الثاني.
من أجل $\phi(x) = 0$ إذا المعادلة (7.1) تصبح :

$$f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt = 0 \tag{9.1}$$

والذي يعرف باسم معادلة فولتيرا من النوع الأول.

2.5.1 المعادلات التكاملية لفريدهولم

الشكل الأكثر استعمال للمعادلة التكاملية الخطية لفريدهولم تعطى بالشكل :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt \tag{10.1}$$

وحدود التكامل a و b ثابثة .

إذا كان التابع $\phi(x)=1$ إذا العلاقة (10.1) تصبح بالشكل التالي :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{11.1}$$

هذه المعادلة تسمى المعادلة التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني .
من أجل $\phi(x)=0$ تصبح العلاقة : (10.1)

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt=0 \tag{12.1}$$

والذي يعرف باسم معادلة فريدهولم من النوع الأول.

3.5.1 المعادلات التكاملية الشاذة

المعادلة التكاملية الشاذة معرفة بحدود تكاملية غير منتهية أو عندما تكون نواة التكامل غير متعلقة بأي جزء من المجال، على سبيل المثال :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt \tag{13.1}$$

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}u(t)dt,\quad 0<\alpha<1 \tag{14.1}$$

الفصل الثاني

كثير حدود تشيبتشيف ومصفوفات العمليات

قائمة المحتويـــــــــات

1.2 كثير حدود تشيبتشيف

كثيرات حدود يعود اسمها إلى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي تشيبيشيف و عضو اكاديمية العلوم الروسية والذي أوردنا سيرته في الملحق
في هذا الفصل سوف نتطرق الى تعاريف وخصائص كثير حدود تشيبيتشيف في البعد الاول المعرفة على المجال[1, 1-] و هي مستمرة ولديه 4 انواع :

1.1.2 كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_n(x)$:

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع لأول من الدرجة n بالشكل التالي [1] :

$$T_n(x) = \cos\ (n \cos^{-1}\ x) \quad (n \geq 0)... \tag{1.2}$$

$$T_0(x) = 0$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xnT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

نظرية 1.1.2 كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الأول متعامدة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [2]
بحيث :

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0; & n \neq m. \\ \frac{\pi}{2}; & n = m \neq 0. \\ \pi; & m = n = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

تقريب التابع باستعمال كثير حدود تشيبيتشيف [1]

ان كثيرات حدود تشيبتشيف تشكل أساس للفضاء $L_2[-1,1]$ و منه يمكن كتابة كل دالة f(x) من الفضاء $L_2[-1,1]$ استعمال كثيرات حدود تشيبيتشيف على النحو التالي :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(x).. \tag{3.2}$$

اذا كانت السلسلة (2,3) منتهية ,اذن السلسلة (2,3) يمكن كتابتها كمايلي :

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^{N} a_i T_i(x) = T(x)^t A \tag{4.2}$$

حيث

$$T(x) = [T_0(x), T_1(x), ..., T_N(x)]^t \quad A = [a_0, a_1, \ldots, a_N] \tag{5.2}$$

و

$$a_i = \frac{\gamma_i}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_i(x) w(x) dx, \quad [1]$$

حيث

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2, & i \geq 1. \end{cases}$$

2.1.2 كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني $U_n(x)$:

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني من الدرجة n على المجال[-1,1]بالشكل التالي [8] :

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

(6.2)

حيث $\theta = \arccos(x)$ و

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x$$

حيث يحقق العلاقة التراجعيةالتالية:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

3.1.2 كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثالث $V_r(x)$

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الثالث من الدرجة n على المجال[-1,1]بالشكل التالي [3] :

$$V_r(x) = \frac{\cos(r+\frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} \tag{7.2}$$

حيث $x = \cos\theta$ لدينا ايضا:

$$V_{r+1}(x) = 2xV_r(x) - V_{r-1}(x) \tag{8.2}$$

مع الشروط الأولية:

$$V_0(x) = 1$$

$$V_1(x) = 2x - 1, \quad r = 1, 2, \ldots$$

الحدود الاربعة الاولى :

$$V_0(x) = 1$$
$$V_1(x) = 2x - 1$$
$$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$$
$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

4.1.2 كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الرابع $W_r(x)$

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الرابع من الدرجة n على المجال[-1,1]بالشكل التالي [3] :

$$W_r(x) = \frac{\sin(r+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \qquad (9.2)$$

حيث $x = \cos\theta$

نضطر احيانا في دراسة كثير حدود تشيبيتشيف تحويله من المجال الى المجال [1 , 1-] الى [1, 0] ,وهذا ما يسمى بمحول كثير حدود تشيبيتشيف الذي يعرف كالاتي :

5.1.2 محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_n^*(x)$

محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_n^*(x)$ يعرف كمايلي[4]:

$$T_n^*(x) = \cos(2n\theta) \tag{10.2}$$

حيث $0 \leq x \leq 1$ و $x = \cos^2\theta$ العلاقة التراجعية تعطى كمايلي :

$$T_n^*(x) = 2(2x-1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{11.2}$$

الشروط الأولية:

$$T_0^*(x) = 1.$$
$$T_1^*(x) = 2x - 1.$$

محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_n^*(x)$ يمكن توسيعها في سلسلة :

$$T_n^*(x) = n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(2)^{2k}(n+k-1)(x)^k}{(2k)(n-k)}, \quad n > 0 \tag{12.2}$$

تعريف 7.1.2 محول كثير حدود تشيبيتشيف النوع الاول معرف على النحو التالي:

$$\int_0^1 T_i^*(x)T_j^*(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0, \quad 0 \leq i, \quad j \leq N \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases} \tag{13.2}$$

6.1.2 محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني $U_n^*(x)$

تعريف 8.1.2 كثير حدود تشيبتشيف المعرف على المجال[0,1]يسمى كثير حدود تشيبتشيف المحول ويكون بتغيير المتغير $2x$-1 و منه [8]

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1) \tag{14.2}$$

كثير حدود تشيبتشيف المحول يحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$U_n^*(x) = (4x-2)U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x), \quad n = 2, 3\ldots \tag{15.2}$$

والحدود الاولية :

$$U_0^*(x) = 1.$$
$$U_1^*(x) = 4x - 2$$

يعطى كثير حدود تشيبتشيف المحول $U_n^*(t)$ من الدرجة n بالعلاقة التالية :

$$U_n^*(x) = \sum_{r=0}^{n+1} r(-1)^{(n+1-r)} \frac{(n+r)!2^{2r-1}}{(n+1-r)!(2r)!} x^{r-1}, \tag{16.2}$$

من الواضح ان :

$$U_n^*(0) = (-1)^n$$
$$U_n^*(1) = 2$$

ومنه شروط التعامد :

$$\int_0^1 U_m^*(t)U_n^*(t)w(t)dt = \tau\delta_{mn} \tag{17.2}$$

حيث : $w(t) = \sqrt{t-t^2}$ $\tau = \frac{1}{8}\pi,$ و δ_{mn} دالة كرونيكير وفق المرجع [[10]نستطيع الحصول على معادلة التابع لكثير حدود تشيبتشيف

$$A.U = T \tag{18.2}$$

حيث :

$$T = [1, t, t^2, \ldots, t^N]^T,$$
$$U = [U_0^*(t), U_1^*(t), \ldots, U_N^*(t)]^T$$

حيث المصفوفة A هي من $(N+1)*(N+1)$, كما أنها مصفوفة مثلثية سفلى حيث عناصرها معرفة كالتالي :

$$A[i,j] = \frac{1}{4^{i-1}} \frac{j}{i}(2i, i-j),$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, N+1.$$

2.2 مصفوفات العمليات لكثير حدود تشيبتشيف

1.2.2 مصفوفة كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول:

يمكن تمثيل كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول بمصفوفة التالية [2]:

$$T(x) = (T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x))^T, \quad X = (1, X, \ldots, X^n)^T \tag{19.2}$$

ايضايمكن ان نكتب :

$$T(x) = TX, \tag{20.2}$$

حيث $T \in (n+1) \times (n+1)$ مصفوفةT معرفة كما يلي :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & t_{21} & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_{31} & t_{32} & 2^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & 2^3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \cos(\frac{n\pi}{2}) & t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & t_{n4} & \ldots & \ldots & 2^{n-1} \end{bmatrix} \tag{21.2}$$

حيث

$$t_{i0} = \cos(\frac{i\pi}{2}), \quad i = 0, \ldots, n$$

بالاضافة العناصر الاخرى معرفة كمايلي : $t_{ij} = sign(t_{i-1,j-1})(2|t_{i-1,j-1}| + |t_{i-2,j}|)$

2.2.2 مصفوفة محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول

كثير حدود تشيبيتشيف معرف على المجال [1 ,1-], لكن مجال التكامل المعادلة (1)و(2) هو [T,0] لتحويل المجال من [1 ,1-] الى $[0, T]$ نعرف المصفوفة $R \in (n+1) \times (n+1)$[2]

$$R_{ij} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \gamma_1^{i-j} \gamma_2^j, \quad j = 0, 1, \ldots, i. \quad i = 0, 1, \ldots, n. \\ 0, \quad i < j \end{cases} \tag{22.2}$$

R_{ij} مصفوفة التحويل من أساس لآخر حيث $\gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = \frac{2}{T}$
المصفوفة التنفيذية لمحول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول يكتب X ,WX الاساس القانوني حيث W=TR و T مصفوفة كثير حدود تشيبيتشيف .

3.2.2 تقريب دالة

الدالة $y(x) \in L_2[0,T]$ يمكن التعبير عنها بواسطة كثير حدود تشيبيتشيف المحول [2] :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) dx = C^T W X \tag{23.2}$$

حيث W مصفوفة محول كثير حدود تشيبيتشيف . و φ_j كثير حدود تشيبيتشيف المحول من درجة j, المعاملات c_j تعطى بواسطة

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{f(x)\varphi_0(x)}{\sqrt{\frac{4x}{T} - \frac{4x^2}{T^2}}} dx$$

و

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{f(x)\varphi_j(x)}{\sqrt{\frac{4x}{T} - \frac{4x^2}{T^2}}} dx, \quad j = 1, 2, \ldots$$

4.2.2 المصفوفة التنفيذية للتكامل لكثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول :

خاصية 1.2.2 كثير حدود تشيبيتشيف يحقق الخاصية [1] :

$$\int_{-1}^{x} T_{N-1}(s) ds = \frac{1}{2N} T_N(x) - \frac{1}{2(N-2)} - T_{N-2}(x) + \frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2} T_0(x)$$

$N \geq 3$

كذلك من اجل $T_0(x)$و$T_1(x)$

$$\int_{-1}^{x} T_0(s) ds = T_0(x) + T_1(x) \tag{24.2}$$

$$\int_{-1}^{x} T_1(s) ds = \frac{-1}{4} T_0(x) + \frac{1}{4} T_2(x) \tag{25.2}$$

من

(2 . 24) و (2 . 25) اذن

$$\int_{-1}^{x} T(s) ds = PT(x),$$

حيث $P \in (N+1) \times (N+1)$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2N} \\ \frac{(-1)^N}{1-(N)^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2N-2} & 0 \end{bmatrix}, N \geq 3$$

5.2.2 المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري لكثير حدود تشيبتشيف

التكامل الكسري لكثير حدود تشيبتشيف يمكن ان يكتب على الشكل التالي [2]:

$$I^{\alpha}(TX) = (A * T)X^{\alpha} \tag{26.2}$$

حيث TX هو مصفوفة كثير حدود تشيبتسيف و

$$X^{\alpha} = x^{\alpha}.X = [x^{\alpha}x^{\alpha+1}\dots x^{\alpha+n}]^{T}$$

وكذلك عملية $*$ هي عملية ضرب عنصر بعنصر. حيث $A \in (n+1)\times(n+1)$ هي المصفوفة المثلثية السفليةالمحددة بواسطة :

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}, & i \geq j \\ 0, i < j \end{cases} \tag{27.2}$$

بالإضافة إلى ذلك لكل دالة $g(x)$ تقريباً بواسطة دالة تشيبيتشيف المحول
$g(x) = D^{T}WX$
التكامل الكسري يمكن كتابتها:

$$I^{\alpha}(g(x)) = I^{\alpha}(D^{T}WX) = D^{T}(A * W)X^{(\alpha)} \tag{28.2}$$

الفصل الثالث

طريقة حل معادلات التكاملية باستخدام كثير حدود تشيبتشيف

قائمة المحتويـــــــات

1.3 طريقة حل معادلات التكاملية باستخدام كثير حدود تشيبتشيف

في هذا الفصل نتطرق إلى حل معادلة تكاملية لفولتيرا من النوع الاول و الثاني باستعمال محول كثير حدود تشبتشيف , وهي معادلات آبل التكاملية (1) و (2). [2] باستخدام حساب ريمان ليوفيل نضع $-\alpha = \beta - 1-$ ومنه

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t)dt = \Gamma(\beta)(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1} y(t)dt);$$

من خلال تعريف التكامل الكسري لريمان ليوفيل يمكن إعادة كتابة العلاقة الحالية :

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t)dt = \Gamma(\beta) I^\beta y(x). \qquad (1.3)$$

الدالة $y(x)$ تقرب بواسطة كثير حدود تشيبتشيف المحول على النحو التالي

$$y(x) \simeq y_n(x) = C^T W X \qquad (2.3)$$

حيث C^T هو الشعاع المجهول الذي يتم تحديده وW المصفوفة محول كثير الحدود تشيبيتشيف. فيما يلي نتعرف على معادلات التكاملية لفولتيرا الشاذة نوع الأول والثاني :

1.1.3 النوع الاول :

من خلال النظر في معادلة التكاملية لفولتيرا نوع الأول (1) وفقا لمعادلة (1 . 3) لدينا :

$$f(x) = \Gamma(\beta) I^\beta y(x) \qquad (3.3)$$

استبدال المعادلات(2,32) و (3,2) في (3,3) يمكننا الحصول عليها:

$$f(x) = \Gamma(\beta) C^T (A * W) X^\beta \qquad (4.3)$$

لذلك يتم تحويل المعادلة التكاملية (1) الى جملة معادلات جبرية أعلاه. لحل جملة المعادلات هذه نقوم باستعمال طريقة غالركين (Galerkin) باستعمال كثير حدود تشيبتشيف المحول .
نضع

$$\Gamma(\beta)(A * W) = \Lambda$$

ليكن $\varphi_i(x)$ كثير حدود تشيبتشيف المحول من الدرجةi يمكن كتابته كما يلي :

$$\varphi_i(x) = W_i X, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

حيث W_i , i هو صف من المصفوفة W مكافئ.نضرب (4 . 3) في $\varphi_i(x)$ نحصل على مايلي :

$$C^T \Lambda X^\beta W_i X = f(x) W_i X, \quad i = 0, 1, \dots, n. \qquad (5.3)$$

بوضع

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^n & x^{n+1} & x^{n+2} & \dots & x^{2n} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

و

$\tilde{X}^{\beta} = x^{\beta}\tilde{X}$ نحصل على

$$C^T \Lambda \tilde{X}^{\beta} W_i^T = f(x) W_i X, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

باستعمال التكامل من 0الى T نتحصل

$$W_i P^{\beta} \Lambda^T C = W_i P x, \tag{8.3}$$

حيث P^{β}وP_x مرتبطين بمصفوفة التكامل المعرف بمايلي

$$P_x = \int_0^T X f(x) dx, \quad (P_x)_{il} = \int_0^T x^i f(x) dx$$

$$P^{\beta} = \int_0^T \tilde{X}^{\beta} dx; \quad (P^{\beta})_{ij} = \frac{T^{i+j+\beta+1}}{i+j+\beta+1}$$

$$i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n.$$

باعتبار المعادلة(8 . 3) من اجل $i = 0, \dots, n$
نتحصل على مايلي :

$$W P^{\beta} \Lambda^T C = W P_x, \tag{9.3}$$

جمل المعادلات التي يمكن أن تحل بسهولة

2.1.3 النوع الثاني :

ومن أجل النوع الثاني من المعادلة التكاملية (2) لدينا :

$$y(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt = f(x) + \Gamma(\beta) I^{\beta}(C^T W X) \tag{10.3}$$

المعادلة (10 . 3)يمكن كتابتها :

$$C^T W X - \Gamma(\beta) C^T (A * W) X^{\beta} = f(x) \tag{11.3}$$

نضرب المعادلة (3 . 11) في $\varphi_i(x)$ والتكامل من 0 الى T نكتب المعادلة كما يلي :

$$(WPW^T - WP^{\beta}\Lambda^T)C = WPf(x) \qquad (12.3)$$

حيث

$$P = \int_0^T \tilde{X}dx, \quad P_{ij} = \frac{T^{i+j+1}}{i+j+1}$$

المعادلة (3 . 12) جمل المعادلات التي يمكن أن تحل بسهولة.

2.3 امثلة

في هذا القسم لإظهار دقة وكفاءة الطريقة الموضحة نقدم بعض الأمثلة. علاوة على ذلك رقم شرط المصفوفات التنفيذية محددة من قبل [2] :

$$cand(A) = \|A\|.\|A^{-1}\| \qquad (13.3)$$

الجداول المقابلة في الأمثلة 1 و 2 المعادلة التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني، و في المثالين 3 و 4 معادلة فولتيرامن النوع الأول .
يشير الاختصار c.n.m في الجداول رقم الشرط للمصفوفات التنفيذية.

مثال 4.3 لتكن معادلة فولتيرا من النوع الثاني [2]:

$$y(x) + \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}}$$

مع الحل الدقيق $y(x) = x^2$,
للحصول على c_i معاملات غير معروفة من خلال الطريقة الموضحة في النوع الثاني من اجل N=4
الحل لـ $y(x)$ يمكن الحصول عليها بالطريقة في من اجل12, N=4,8 و يتم الحصول على معاملات مجهولة لـ ci من خلال الطريقة الموضحة سابقا و بأخذ N = 4:

$$c_0 = \frac{3}{8} \quad ,c_1 = \frac{1}{2} \quad ,c_2 = \frac{1}{8} \quad ,c_3 = 0 \quad ,c_4 = 0$$

تعتبر الدالة $y(x)$ كثير حدود من الدرجة 2 والأقل مستوى تقريب لمتعددحدود تشيبتشيف في هذه دراسة حيث N = 4.
لذلك فإن الحل يقترب من خلال الطريقة المعروضة هي نفس الطريقة بالضبط الحل ، وهذا هو $y_4(x) = x^2$

مثال 5.3 لتكن معادلة فولتيرا من النوع الثاني [2]:

$$y(x) + \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt = x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}\pi x^2$$

مع الحل الدقيق $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$,

الحل لـ $y(x)$ يمكن الحصول عليها بالطريقة في النوع الثاني من اجل12, N=4,8 يتم الحصول على معاملات مجهولة لـ ci من خلال الطريقة الموضحة سابقا و بأخذ N = 4:

$$c_0 = 0.4242 \quad , c_1 = 0.5097 \quad , c_2 = 0.0724 \quad , c_3 = -0.0076 \quad , c_4 = 0.0018$$

ويتم حساب الحل التقريبي لـN = 4 كمايلي :

$$y_4(x) = 0.2253x^4 + 0.6927x^3 + 1.2240x^2 + 0.2477x - 0.0038$$

فيt الجدول (1) قدمنا الحل المضبوط والتقريبي للمثال (2) عند بعض النقاط المختلفة ,بالاضافة السطر الاخير في الجدول (1) تظهر شروط رقم المصفوفة التنفيذية . الخطا التقريبي للحل في المستوى N=4,8,12 يظهر في الصورة(1).

مثال 6.3 لتكن معادلة فولتيرا من النوع الاول [2]:

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} dt = x^{\frac{7}{6}}$$

مع الحل الدقيق

$$, \ y(x) = \frac{7\Gamma(1/6)}{18\Gamma(2/3)} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

الحل لـ $y(x)$ يمكن الحصول عليها بالطريقة في النوع الاول اجل 12, N=4,8 يتم الحصول على معاملات مجهولة لـ ci من خلال الطريقة الموضحة سابقا و بأخذ N = 4:

$$c_0 = 0.5739 \quad , c_1 = 0.3719 \quad , c_2 = -0.0768 \quad , c_3 = 0.0218 \quad , c_4 = -0.0172$$

يتم حساب الحل التقريبي لـN = 4 كمايلي :

$$y_4(x) = -2.1983x^4 + 5.0939x^3 - 4.4082x^2 + 0.2999x - 0.0862$$

الجدول (2) قدمنا الحل المضبوط والتقريبي للمثال (3) عند بعض النقاط المختلفة من اجل n=20 , بالاضافة السطر الاخير في الجدول (2) تظهر شروط رقم المصفوفة التنفيذية . الخطا التقريبي للحل في المستوى N=4,8,12 يظهر في الصورة(2).

الجدول (3) قدمنا الحل المضبوط والتقريبي للمثال (6,3) عند بعض النقاط المختلفة .

مثال 7.3 لتكن معادلة فولتيرا من النوع الاول [2]:

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt = \pi x$$

مع الحل الدقيق $, \ y(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^{2/3}$

الحل لـ $y(x)$ يمكن الحصول عليها بالطريقة في من اجل 12 ,N=4,8 يتم الحصول على معاملات مجهولة لـ ci من خلال الطريقة الموضحة سابقا و بأخذ N = 4:

$$c_0 = 0.7539, c_1 = 0.5968, c_2 = -0.0738, c_3 = 0.0212, c_4 = -0.0118$$

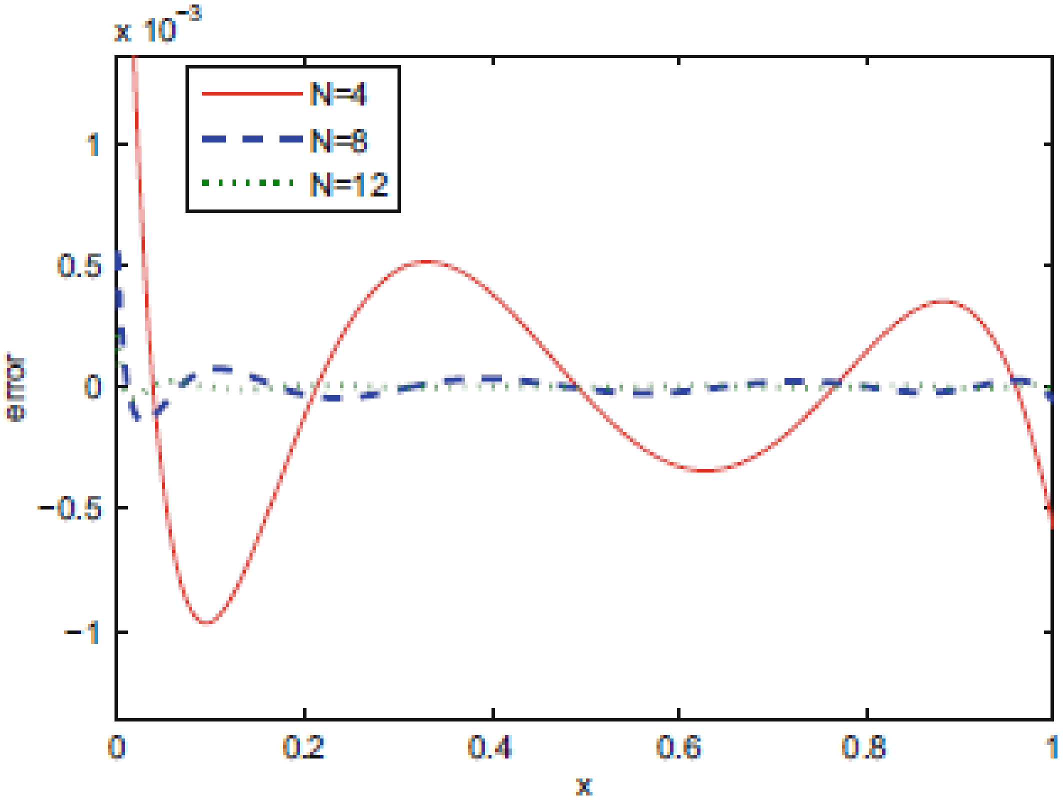
يتم حساب الحل التقريبي لـ N = 4 كمايلي :

$$y_4(x) = -1.5114x^4 + 3.7014x^3 - 3.4978x^2 + 2.5439x - 0.0502$$

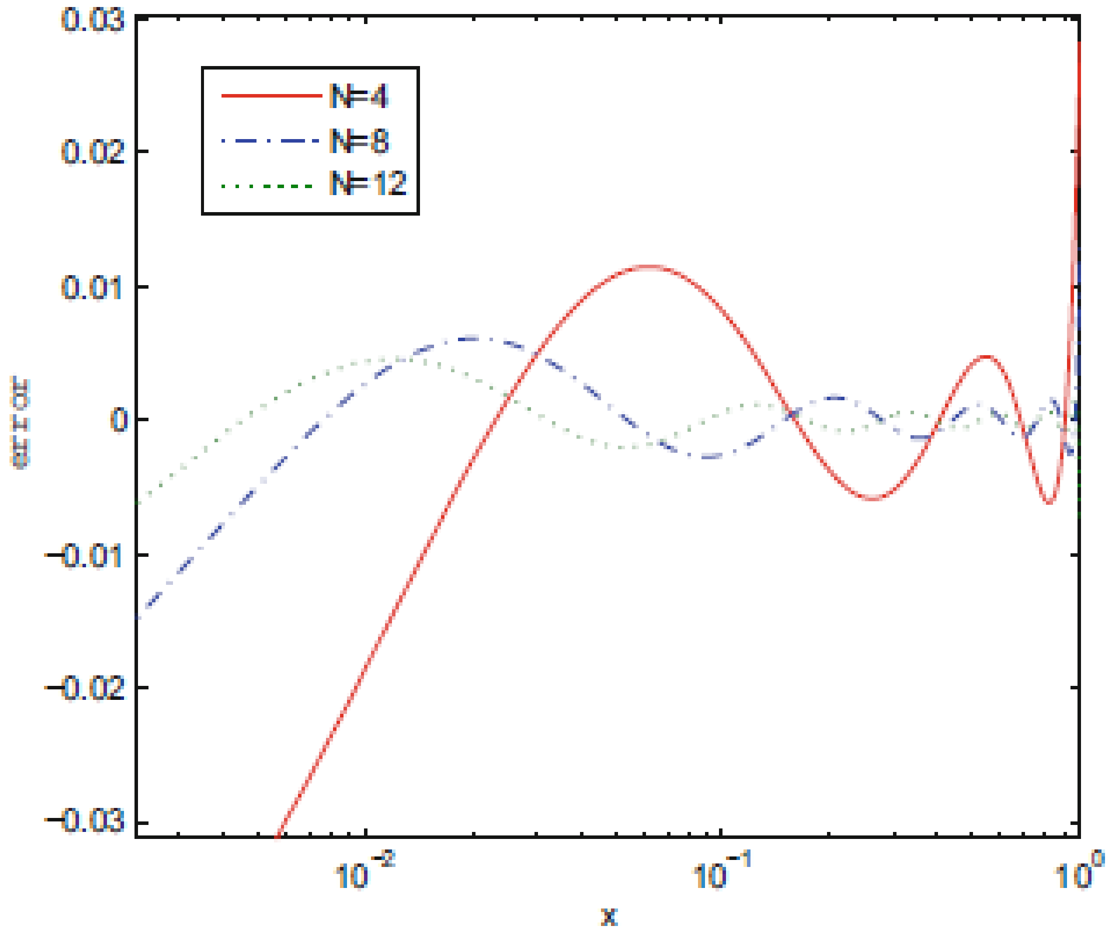
الجدول (3) تظهر شروط رقم المصفوفة التنفيذية . الخطا التقريبي للحل في المستوى N=4,8,12 يظهر في الشكل (3، 5).

x	$N = 4$	$N = 8$	$N = 12$	Exact
0.1	0.0326	0.0316	0.0316	0.0316
0.2	0.0896	0.0895	0.0894	0.0894
0.3	0.1638	0.1643	0.1643	0.1643
0.4	0.2526	0.2529	0.2530	0.2530
0.5	0.3536	0.3536	0.3536	0.3536
0.6	0.4651	0.4648	0.4648	0.4648
0.7	0.5859	0.5856	0.5857	0.5857
0.8	0.7154	0.7155	0.7155	0.7155
0.9	0.8535	0.8538	0.8538	0.8538
1	1.0006	1.0001	1.0000	1.0000
$c.n.m^*$	11.23	22.32	32.85	

شكل 3.1: الجدول 1:يمثل الحل المضبوط والتقريبي للمثال (3,5)



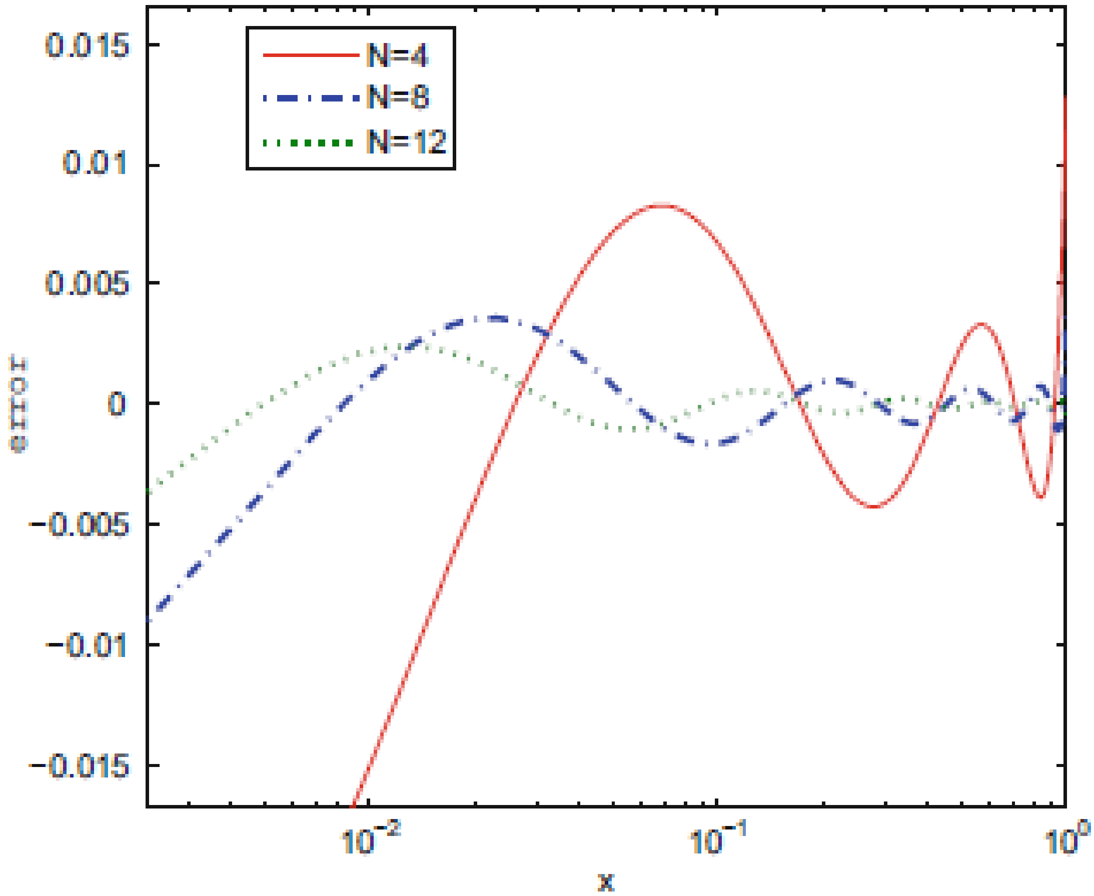
شكل 2.3: منحنى تقدير الحل للمثال (3,5) من اجل N=4,8,12



شكل 3.3: منحنى تقدير الحل للمثال(3,6) 3من اجل N=4,8,12

x	Approximate $N=4$	$N=8$	$N=12$	Method of [1] $N=20$	Exact
0.1	0.2870	0.2878	0.2852	0.2848	0.2852
0.2	0.4071	0.4017	0.4033	0.4032	0.4033
0.3	0.4940	0.4992	0.4936	0.4944	0.4936
0.4	0.5706	0.5713	0.5703	0.5704	0.5704
0.5	0.6335	0.6366	0.6378	0.6374	0.6377
0.6	0.6946	0.6985	0.6986	0.6989	0.6986
0.7	0.7556	0.7558	0.7546	0.7547	0.7546
0.8	0.8126	0.8055	0.8066	0.8063	0.8067
0.9	0.8567	0.8565	0.8556	0.8551	0.8556
1	0.8736	0.8890	0.9018	0.8992	0.9019
$c.n.m^*$	13.94	26.78	43.68		

شكل 4.3: الجدول 2:يمثل الحل المضبوط والتقريبي للمثال (3,6)



شكل 5.3: منحنى تقدير الحل للمثال (3,7) من اجل N=4,8,12

x	$N=4$	$N=8$	$N=12$	Exact
0.1	0.2732	0.2815	0.2797	0.2799
0.2	0.4445	0.4463	0.4433	0.4443
0.3	0.5863	0.5823	0.5820	0.5822
0.4	0.7063	0.7058	0.7052	0.07052
0.5	0.8159	0.8178	0.8185	0.8183
0.6	0.9209	0.9239	0.9240	0.92418
0.7	1.0237	1.0248	1.0242	1.0241
0.8	1.1227	1.1191	1.1194	1.1195
0.9	1.2131	1.2110	1.2110	1.2109
1	1.2863	1.2951	1.2995	1.2990
$c \cdot n \cdot m^*$	16.01	40.32	64.18	

شكل 6.3: الجدول 3:يمثل الحل المضبوط والتقريبي للمثال (3,7)

خاتمة

لقد حاولنا من خلال هذا العمل إعطاء لمحة قصيرة عن الحساب الكسري (التكامل و الاشتقاق) و كيفية حسابهما ثم عرفنا كثير حدود تشيبيتشيف وخصائصها والمصفوفات التنفيذية لكثير حدود تشيبيتشيف واستعمالها في حل بعض المعادلات التكاملية . واقتصرت تطبيقاتها على بيان كيفية تطبيق المصفوفة التنفيدية للتكامل في حل معادلات التكاملية لفولتيرا الناتجة عن معادلات ابل التكاملية . وذلك بتحويل المعادلات التكاملية لفولتيرا الى بعض الجمل الخطيةالجبرية .

وختاما إننا لا ندعي أننا أوفينا البحث حقه كاملا إلا أننا اجتهدنا قدر الإمكان فيما يسمح به الوقت لإنجاز هذه المذكرة.

المراجع العلمية

[1] Azim Rivaz1. Samane Jahan ara. Farzaneh Yousefi, *Two-dimensional Chebyshev Polynomials for Solving Two-dimensional Integro-Differential Equations. Cankaya University Journal of Science and Engineering Volume 12, No. 2 (2015) 001–011.*

[2] Monireh Nosrati Sahlan . Hadi Feyzollahzadeh R,*Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations.Received: 25 November 2016 / Accepted: 10 March 2017.*

[3] Olagunju, A. S. Joseph Folake L.,*Third-kind Chebyshev Polynomials Vr(x) in Collocation Methods of Solving Boundary value Problems.IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM) e-ISSN: 2278-5728,p-ISSN: 2319-765X, Volume 7, Issue 2 (Jul. - Aug. 2013), PP 42-47.*

[4] M. El-Kady, Amaal El-Sayed,*FRACTIONAL DIFFERENTIATION MATRICES FOR SOLVING FRACTIONAL ORDERS DIFFERENTIAL EQUATIONS.International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 84 No. 2 2013, 1-13.*

[5] FakhrodinMohammadi,*Numerical solution of Bagley-Torvik equation using Chebyshev wavelet operational matrix of fractional derivative.Int. J. Adv. Appl. Math. andMech. ISSN: 2347-2529.2(1) (2014) 83 - 91*

[6] S. Kazem, S. Abbasbandy, S. Kumar, *Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations, Applied Mathematical Modelling, In press, http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.026*

[7] S. Esmaeili, M. Shamsi, Y. Luchko,,*Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on M¨untz polynomials, Comput. Math. Appl., 62 (2011) 918-929.*

[8] Mohammadreza Ahmadi Darani. Mitra Nasiri,*A fractional type of the Chebyshev polynomials for approxima-tion of solution of linear fractional differential equations,Computational Methods for Differential Equations http://cmde.tabrizu.ac.ir Vol. 1, No. 2, 2013, pp. 96-107*

[9] A.M.Wazawaz,*The combined laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro -differential equations*,Appl.Math.comput.216(2010)1304-1309.

[10] A.Nkwanta and E.R.Barnes*Two Catalan-type Riordan arrays and their connections to the Chebyshev polynomials of the first kind.Journal of Integer Sequences,15(2012)1-19*

[11] Zeilon, N.:*Sur quelques points de la theorie de l'equation integrale d'Abel [On some points of the theory of integral equation of Abel type]. Arkiv. Mat. Astr. Fysik. 18, (1924)1–19*

[12] Nieto, J.J., Okrasinski, W.:*Existence, uniqueness, and approximation of solutions to some nonlinear diffusion problems. J. Math. Anal. Appl. 210(1), (1997)231–240*

[13] Okrasinski, W., Vila, S.:*Determination of the interface position for some nonlinear diffusion problems. Appl. Math. Lett. 11(4),(1998) 85–89*

[14] Shantanu Das ,*Functional Fractional Calculus,Doi 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg*

ملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التكاملية لفولتيرا الناتجة من معادلة ابل التكاملية . و ذلك باستخدام كثيرحدودتشيبيشيف . ثم تطبيق هذه الطريقة على بعض الأمثلة و مقارنة النتائج مع الحل الحقيقي و النتائج المحصل عليها باستخدام طرق عددية أخرى لرؤية مدى دقة و كفاءة هذه الطريقة.
الكلمات المفتاحية: المعادلات التكامليةلفولتيرا ، معادلة ابل التكاملية،كثيرات حدود تشيبيشيف،المصفوفة التنفيذية لكثير حدود تشبيتشيف .

Abstract

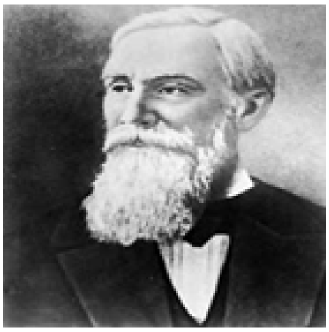
The main objective of thisworkis to present a numericalmethod for solving the Voltiredifferntialequations of the first and second kindsresultingfrom the Abel'sintegralequations . usingthe Chebyshevpolynomials . Then, applyingthismethod on someexamples and comparing the resultswith exact solution and the obtainableresultsusingothernumericalmethods to show the accuracy and the effectiveness of thismethod.
Key words: Voltireintegro-differential of the first and second kindsequations,Abel'sintegralequations , Chebyshevpolynomials, Operational matrix .

Résume

L'objectif principal de ce travail est de présenter une méthode numérique pour résoudre les équations intégro-différentielles de Voltaire résultant de Abel est integralequations .En utilisant le Chepyshevpolynomials. Il suffit donc d'appliquer cette méthode sur un échantillon d'exemples et de compares les résultats réalisés avec la solution exacte et les résultats obtenus par d'autres méthodes numériques et ce pour s'assurer de l'efficacité et la fiabilité de cette méthode.

Mots-clés equationsintégro-différentielles de Voltaire, Abel integralequations ,lespolynomes de Chepyshev ,Operational matrix .

بافنوتي تشيبيتشيف



• ولد بافنوتي تشيبيتشيف في16 ماي 1821 بعائلة مكونة من تسعة أطفال في قرية أوكاتوفو في مدينة بوروفسك في إقليم كالوغا, الإمبراطورية الروسية
• عرف تشيبيشيف أساسا بفضل أعماله في مجالات الاحتمال والإحصاء والميكانيكا ونظرية الأعداد
• توفي في08 ديسمبر 1894 اعن عمر 73 سنة بسانت بطرسبرغ.