



# جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : نصير نور الهدى

الموضوع

## طريقة عددية لحل معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية باستعمال كثيرات حدود لوجندر

تناقش يوم 2018/06/07 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	الرتبة أستاذ محاضر "ب" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	معمري محمد
ممتحنا	الرتبة أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	عباسي حسين
مشرفا	الرتبة أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	بن الشيخ ع/الكريم

## شكر و عرفان

الحمد لله رب العالمين حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه يليق بجلال وجهه سبحانه  
وعظيم سلطانه والصلوة والسلام على قدوة المرين نبينا محمد وعلى آله  
وصحبه أجمعين .

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

<<من لم يشكر القليل لم يشكر الكثير ومن لم يشكر الناس لم يشكر الله >>

رواه أحمد والترمذي .

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :

إلى الأستاذ المشرف عباسي حسين بن محمد الذي لم يخل علي بنصافحه  
وتوجيهاته، لك منا كل معاني التقدير والعرفان .

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الإبتدائي والمتوسط والثانوي.

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الجامعي .

إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .

إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .



# الفهرس

2	1	لمحة عن الحساب الكسري و المعادلات التفاضلية و التكاملية
3	1.1	الدوال الخاصة . . . . .
3	1.1.1	دالة غاما . . . . .
5	2.1.1	دالة بيتا . . . . .
6	2.1	الإشتقاق ذي الرتب الكسرية . . . . .
6	1.2.1	الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل [1] . . . . .
7	2.2.1	الإشتقاق الكسري ل كايبتو [1] . . . . .
8	3.2.1	الإشتقاق الكسري ل غرينوالد-ليتينكوف [1] . . . . .
8	4.2.1	خواص الإشتقاق الكسري [1] . . . . .
9	3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية . . . . .
9	1.3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية ل ريمان ليوفيل : . . . . .
10	2.3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليساري : . . . . .
10	3.3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليميني : . . . . .
10	4.3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية لبعض الدوال لريمان ليوفيل : . . . . .
10	5.3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية لدالة الثابتة لريمان ليوفيل : [1] . . . . .
10	4.1	المعادلات التفاضلية: . . . . .
11	1.4.1	درجة المعادلة التفاضلية: . . . . .
11	2.4.1	أنواع المعادلات التفاضلية: . . . . .
12	5.1	المعادلات التكاملية: . . . . .
12	1.5.1	المعادلات التكاملية لفولتيرا . . . . .
12	2.5.1	المعادلات التكاملية لفريدهولم . . . . .
14	2	كثيرات حدود لوجندر و المصفوفات التنفيذية
15	1.2	كثيرات حدود لوجندر . . . . .
15	1.1.2	تعاريف كثيرات حدود لوجندر . . . . .
20	2.2	كثيرات حدود لوجندر المعدلة و خصائصها : . . . . .
21	1.2.2	تقريب تابع . . . . .
21	2.2.2	المصفوفة التنفيذية للتكامل ذي الرتب الكسرية . . . . .



---

24	3	طريقة عددية لحل معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية
25	1.3	تطبيق المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري: .....
26	2.3	تحليل الخطأ .....
28	3.3	تطبيق عددي .....

## ترميز

مدلوله	الرمز
الدالة غاما	$\Gamma(x)$
الدالة بيتا	$B(x, y)$
مؤثر الإشتقاق	$D^\alpha$
مؤثر التكامل	$I^\alpha$
كثيرات حدود لوجندر	$P_n(x)$
شعاع أساس كثيرات حدود لوجندر	$\Phi(x)$
المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري	$A^v$
تابع	$f(x)$

## مقدمة

يمكن صياغة العديد من المشاكل في مختلف المجالات بنجاح بواسطة المعادلات التفاضلية الكسرية ، مثل الفيزياء النظرية ، علم الأحياء ، اللزوجة ، الكيمياء الكهربائية والعمليات الفيزيائية الأخرى. في العقد الأخير ، جذبت المعادلة التفاضلية الكسرية انتباه علماء الرياضيات والفيزياء والمهندسين [2, 3]. لذلك ، فإن الطرق الدقيقة لحل المعادلات التفاضلية هي بحث تحدي هذه الأيام. هناك العديد من الطرق التحليلية. هناك أيضا العديد من الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية. قدم العديد من العلماء طرق عددية لحل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية حيث أظهرت نتائج جيدة وقد استعمل العديد منهم المصفوفة التنفيذية للتكامل للحصول على هذه النتائج.

في هذه مذكرة ، نقوم باستخدام المصفوفات التنفيذية للتكامل الكسري الخاصة بكثيرات حدود لوجندر المعدلة في حل معادلة تفاضلية ذات رتبة كسرية وذلك بعد تحويلها الى معادلة تكاملية لنحصل في النهاية على جملة معادلات جبرية يسهل حلها ، لنجد حلول التقريبية للمعادلات التفاضلية.

إن الغرض من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة التفاضلية ذات الرتبة الكسرية متعددة الترتيب التالية:

$$D^\alpha y(x) = \sum_{i=1}^k a_i D^{\beta_i} y(x) + a_{k+1} y(x) + g(x), \quad (1)$$

مع الشروط الأولية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

وقد قسمت المذكرة كالتالي:

الفصل الاول قنا بتعريف الحساب الكسري و كذا تعريف المعادلات التفاضلية و التكاملية.

أما الفصل الثاني قنا بتعريف كثيرات حدود لوجندر وكثيرات حدود لوجندر المعدلة وخصائصه وكذا المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري.

واخيرا الفصل الثالث قنا باستخدام طريقة عددية جديدة لحل معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية.

# الفصل الأول

## لمحة عن الحساب الكسري و المعادلات التفاضلية و التكاملية

### قائمة المحتويات

---

3	.....	1.1	الدوال الخاصة
6	.....	2.1	الإشتقاق ذي الرتب الكسرية
9	.....	3.1	التكامل ذي الرتب الكسرية
10	.....	4.1	المعادلات التفاضلية:
12	.....	5.1	المعادلات التكاملية:

---



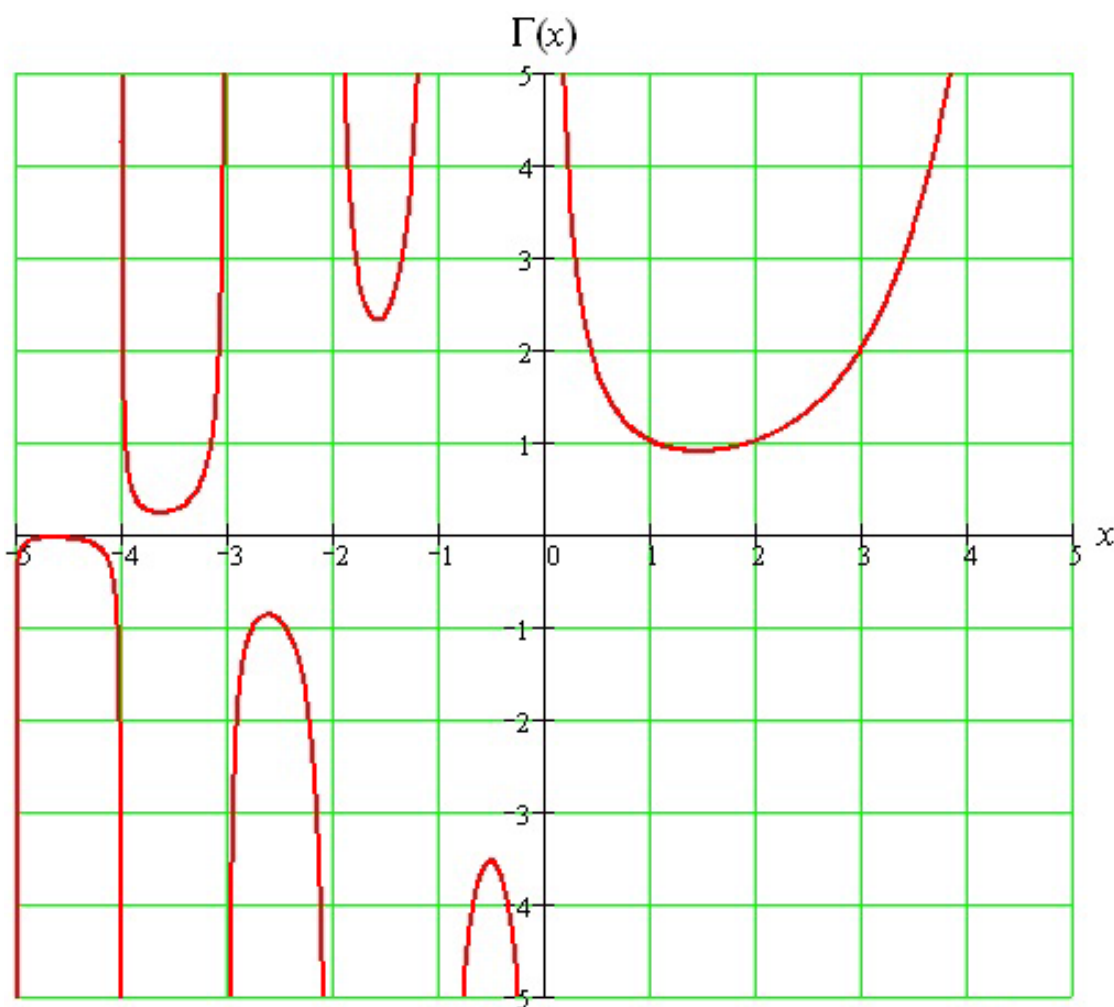
## 1.1 الدوال الخاصة

تتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتمد عليها في هذه المذكرة , كما أنها تلعب دورا هاما في الحساب الكسري وهي:

### 1.1.1 دالة غاما

تعرف دالة غاما على النحو التالي [1] :

$$\Gamma(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx \quad n > 0, x \in \mathbb{R}$$



شكل 1.1: تمثيل دالة غاما



فمثلا لإيجاد  $\Gamma(2)$

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{2-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{M}{e^M} - \frac{1}{e^M} + 0 + e^0 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

قواعد الأساسية للدالة غاما [1]:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad \forall n \neq 0 \quad .1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{إذا كانت } n \text{ عددا صحيحا فإن:} \quad .2$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad .3$$

ملاحظة 1.1.1 لا يمكن إيجاد  $\Gamma(n)$  إذا كان  $n$  عددا صحيحا سالبا .

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0_+) = +\infty$$

$$0 < n \leq 1 \text{ دالة متناقصة من أجل}$$

مثال 1.1.1

$$\Gamma(5) = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$\frac{\Gamma(5)}{2\Gamma(4)} = \frac{4!}{2 \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{2 \times 3!} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

### 2.1.1 دالة بيتا

تعرف الدالة بيتا كمايلي [1]:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad n > 0 \quad m > 0$$

فمثلا لإيجاد

$$\begin{aligned}B(2, 3) &= \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

### 2.1.1 ملاحظة

$$B(m, n) = B(n, m)$$

علاقة دالة بيتا بدالة غاما

$$\begin{aligned}B(m, n) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \\ B(2, 3) &= \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1!2!}{4!} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$



تكاملات يمكن إيجادها بإستعمال الدالتين بيتا وغاما [1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) \quad .1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1 \quad .2$$

## 2.1 الإشتقاق ذي الرتب الكسرية

### 1.2.1 الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل [1]

الإشتقاق الكسري اليميني:

$${}^R D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\forall t < b)$$

الإشتقاق الكسري اليساري:

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\forall t > a)$$

### الاشتقاق الكسري لبعض الدوال باستعمال صيغة ريمان ليوفيل

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t - a)^\beta \\
 {}^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \left( \frac{d}{dt} \right)^m \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta + m - \alpha} \right] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha} \\
 \left( \frac{d}{dt} \right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha} &= (\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) (t - a)^{\beta - \alpha} \\
 {}^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) \Gamma(\beta - \alpha + 1)} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = 1$$

$$\begin{aligned}
 {}^R D_t^1 (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} = \beta (t - a)^{\beta - 1} \\
 &= \frac{d}{dt} (t - a)^\beta
 \end{aligned}$$

الاشتقاق دالة ثابتة بواسطة ريمان ليوفيل  $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
 {}^R D_t^\alpha 1 &= \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \\
 {}^R D_t^\alpha C &= \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}
 \end{aligned}$$

#### 2.2.1 الإشتقاق الكسري ل كابتو [1]

$$\begin{aligned}
 {}^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau \quad (n - 1 < \alpha < n) \\
 &= I^{n - \alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)
 \end{aligned}$$



### 3.2.1 الإشتقاق الكسري ل غرينوالد-ليتنيكوف [1]

المشتقات الكسرية ل غرينوالد-ليتنيكوف معرفة على الشكل التالي :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{b-a}{n} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)$$

الإشتقاق الكسري لبعض الدوال بواسطة غرينوالد-ليتنيكوف

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (\tau - a)^{\alpha - n}$$

إذن

$${}_a D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \quad 0 < n-1 < p < n$$

بتغيير متغير نجد  $\tau = a + s(t-a)$

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) B(n-p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

### 4.2.1 خواص الإشتقاق الكسري [1]

العلاقة بين الإشتقاق الكسري ل ريمان ليوفيل و كاييتو:

1.  $p \geq 0$  و  $n-1 < p < n$  مع  $n \in \mathbb{N}^*$ ، المشتقات  ${}_a^R D_t^p f(t)$  و  ${}_a^C D_t^p f(t)$  موجودة إذا نجد

[12]:

$${}_a^R D_t^p f(t) = {}_a^C D_t^p f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}$$



نستنتج إذا كانت  $f^k(a) = 0$  من أجل  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  فإننا نجد أن

$${}^R D_t^p f(t) = {}^C D_t^p f(t)$$

2. إذا كانت  $f$  دالة مستمرة فإن [12]:

$${}^C D_t^p f(t) I_a^p = f(t)$$

و

$$I_a^p ({}^C D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^k}{k!}$$

### 3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

#### 1.3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية ل ريمان ليوفيل :

نعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل كما يلي [1, 8]:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad \alpha > 0, x > 0, \quad (1.1)$$

$$I^0 f(x) = f(x) \quad (2.1)$$

خاصية 1.3.1 من خواص المؤثر  $I^\alpha$  مايلي:

$$I^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \quad (3.1)$$

توطئة 1.3.1 إذا كان  $m-1 < \alpha \leq m, m \in N$ , إذن

$$D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x),$$

$$I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!}, \quad x > 0. \quad (4.1)$$

ملاحظة 1.3.1 التكامل الكسري لريمان ليوفيل يمكن كتابته على شكل جداء التونسوري  $f(t)$  و

$$[12] g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= g_\alpha(t) * f(t) \end{aligned}$$



### 2.3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليساري :

$$\forall t > a \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

### 3.3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليميني :

$$\forall t < b \quad {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

### 4.3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لبعض الدوال لريمان ليوفيل :

$$f(t) = (t - a)^\beta \quad \beta > -1$$

$$I_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau$$

بتغيير متغير نجد :

$$\tau = a + (t - a)s$$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} t^\beta dt \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta+\alpha} \end{aligned}$$

### 5.3.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لدالة الثابتة لريمان ليوفيل [1]:

$${}^R D_t^{-\alpha} c = I_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha$$

## 4.1 المعادلات التفاضلية:

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحوي مشتقات وتفاضلات لبعض التوابع الرياضية وتظهر فيها بشكل متغيرات للمعادلة. ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه التوابع الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه





المعادلات. تبرز المعادلات التفاضلية بشكل كبير في تطبيقات الفيزياء والكيمياء، وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية والاجتماعية والاقتصادية [11].

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية على أنها أعلى رتبة لمشتق موجود في هذه المعادلة : فإذا إحتوت المعادلة مشتقا أولا ومشتقا ثانيا فقط تعتبر من الرتبة الثانية وهكذا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى تحتوي على مشتقات أولى فقط. وتعرف درجة المعادلة بأنها الأس التي رفع إليها أعلى تفاضل في [11]

#### 1.4.1 درجة المعادلة التفاضلية:

تحدد درجة المعادلة التفاضلية حسب أس المشتق ذو الرتبة الأعلى. مثلا إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة، أي أن أعلى تفاضل فيها هو التفاضل الثالث، فدرجة المعادلة تتحدد حسب أس هذا التفاضل، فإذا كان مرفوعا للأس 5 مثلا تكون المعادلة من الدرجة الخامسة، وهكذا دواليك [11].

#### 2.4.1 أنواع المعادلات التفاضلية:

##### العادية والجزئية:

يمكن تقسيم المعادلات التفاضلية إلى قسمين [11]:

- 1- معادلات تفاضلية اعتيادية تحتوي على توابع ذات متغير مستقل واحد ومشتقات هذا المتغير.
- 2- معادلات تفاضلية جزئية تحتوي دوال رياضية لأكثر من متغير مستقل مع مشتقاتها الجزئية .

##### الخطية وغير الخطية:

كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية. وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين :

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
  2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى.
- وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الأولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى هي خطية، لأن الدرجة تتحدد حسب أس التفاضل الأعلى، ومن الممكن أن تكون التفاضلات الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الدرجة، وهذا يخل بشرط المعادلة الخطية. معادلة برنولي معادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وليست معادلة خطية:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad n \neq 1 \quad (5.1)$$

## 5.1 المعادلات التكاملية:

نعلم أن أي معادلة تكاملية [7] تعطى بالعلاقة التالية:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (6.1)$$

حيث  $K(x, t)$  يسمى النواة التكاملية للعلاقة (6.1) ،  $\alpha(x)$  و  $\beta(x)$  هما حدود التكامل. وأن  $u(x)$  تابع غير معروف . ونشير إلى أن نواة  $K(x, t)$  و التابع  $f(x)$  في العلاقة (6.1) معلومين، و  $\lambda$  هو عدد ثابت.

المهدف من هذا هو تحديد التابع المجهول  $u(x)$  الذي من خلاله يمكن حل العلاقة (6.1) وذلك عن طريق استخدام بعض تقنيات الحلول.

### 1.5.1 المعادلات التكاملية لفولتيرا

الشكل الأكثر تقليدية من المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا هو النموذج التالي [7] :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (7.1)$$

حيث تستند حدود التكامل على المتغير  $x$  والعدد  $a$  ، التابع غير المجهول  $u(x)$  يظهر بصيغة خطية. إذا كان التابع  $\phi(x) = 1$  فإن المعادلة (7.1) تصبح ببساطة على الشكل التالي:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (8.1)$$

وهذه المعادلة معروفة باسم معادلة فولتيرا من النوع الثاني، أما من أجل  $\phi(x) = 0$  ، فإذا المعادلة (7.1) تصبح على الشكل التالي :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (9.1)$$

والذي يعرف باسم معادلة فولتيرا من النوع الأول.

### 2.5.1 المعادلات التكاملية لفريدهولم

الشكل الأكثر استعمالاً للمعادلة التكاملية الخطية لفريدهولم تعطى بالشكل التالي [7]:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (10.1)$$



وحدود التكامل  $a$  و  $b$  ثابتة و التابع المجهول  $u(x)$  يظهر بصيغة خطية .

إذا كان التابع  $\phi(x) = 1$  فإذا العلاقة (10.1) تصبح بالشكل التالي:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (11.1)$$

هذه المعادلة تسمى المعادلة التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني .  
أما من أجل  $\phi(x) = 0$  تصبح العلاقة بالشكل التالي:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (12.1)$$

والذي تعرف باسم معادلة فريدهولم من النوع الأول.

**ملاحظة 1.5.1**  $F(u(x)) = u^n(x), n \neq 1$  أو  $\sin u(x)$  ... الخ، ثم فولتيرا و المعادلة التكاملية لفريدهولم تصنف على أنها غير خطية. كما في الأمثلة التالية المعادلات غير خطية

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^2(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\sin(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\ln(u(t))dt$$

فيما بعد إذا عرفنا  $f(x) = 0$  فولتيرا أو المعادلة التكاملية لفريدهولم ، و نهاية هذه المعادلة تسمى معادلة تكاملية متجانسة، وخلافا لذلك تسمى بمعادلة تكاملية غير متجانسة.

# الفصل الثاني

## كثيرات حدود لوجندر و المصفوفات التنفيذية

### قائمة المحتويات

---

15	.....	1.2	كثيرات حدود لوجندر
20	.....	2.2	كثيرات حدود لوجندر المعدلة و خصائصها :

---

## 1.2 كثيرات حدود لوجندر

### 1.1.2 تعاريف كثيرات حدود لوجندر

التعريف المباشر لكثيرات حدود لوجندر:

كثيرات حدود لوجندر هي كثيرات الحدود المعرفة على المجال  $[1, -1]$  بالعلاقة التالية [10]:

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} (x)^{n-2k}. \quad (n \geq 1) \quad (1.2)$$

حيث [ ] تعني الجزء الصحيح. كثيرات الحدود من الدرجة  $n$  للمتغير  $x$ . وفيما يلي نورد

كثيرات حدود لوجندر الأولى من  $P_0(x)$  إلى  $P_{10}(x)$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

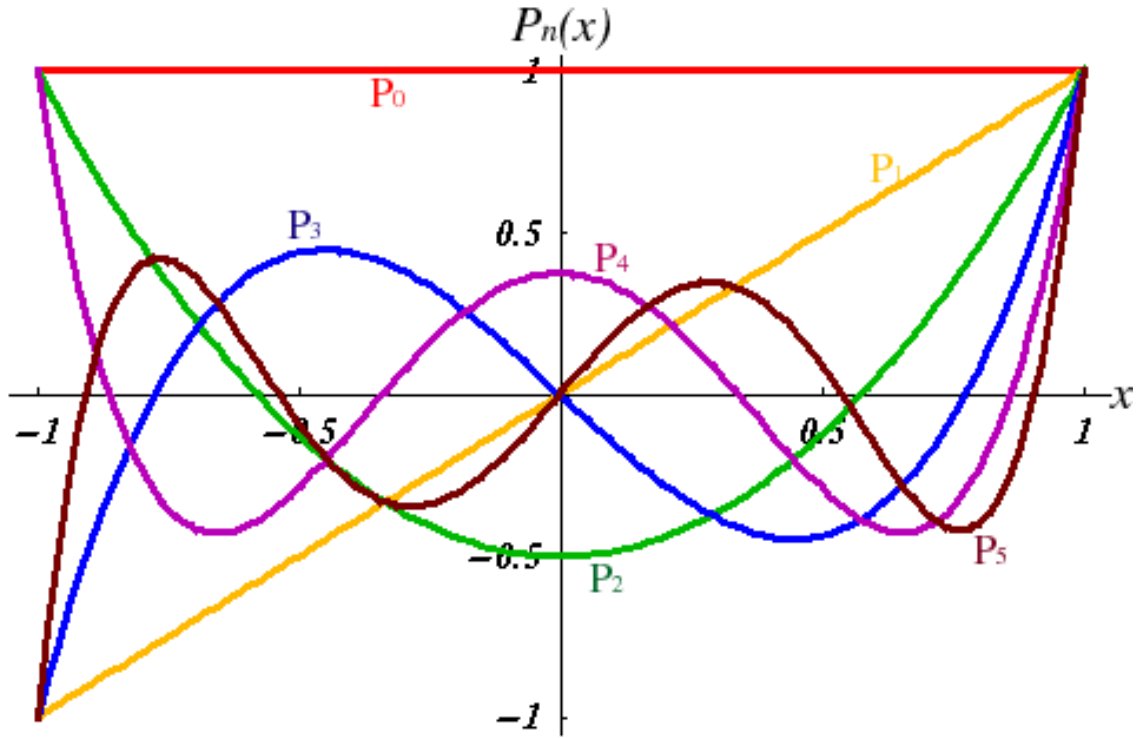
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(23x^6 - 315x^4 + 15x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{48}(1287x^7 - 2049x^5 + 945x^3 - 105x),$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(1237x^8 - 16024x^6 + 630x^4 - 1260x^2 + 35),$$

$$P_9(x) = \frac{1}{256}(35530x^9 - 51480x^7 + 4036x^5 - 105x^3 + 630x),$$

$$P_{10}(x) = \frac{4}{256}(24086x^{10} - 109395x^8 + 360360x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 36).$$



شكل 1.2: تمثيل لبعض حدوديات لوجندر

تعريف كثيرات حدود لوجندر بالاشتقاق :

يمكن تعريف كثير حدود لوجندر من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.1.2 تعطي كثيرات حدود لوجندر من أجل  $x \in [-1, 1]$  بعلاقة رودريج [9]

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

حيث الثوابت  $C_n$  كيفية كما يمكن أن تأخذ قيما معطاة بشكل ملائم.

برهان 1.1.2 كثير الحدود  $X_n(x)$  لها  $n$  جذر محتوى في المجال  $[-1, 1]$  ولليس نضع  $C_n = 1$  عندها من الواضح أن  $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$  والمشتقات لهذا الحد من المراتب  $0, 1, 2, \dots, n-1$  تنعدم في النقطتين  $x = 1, x = -1$  وعندها حسب مبرهنة "رول" ينعدم المشتق الأول في نقطتين تقعان بين  $1$  و  $-1$  وأيضا اعتمادا على نفس المبرهنة فإن المشتق الثاني ينعدم في نقطتين تقعان بين  $1$  و  $-1$  وهكذا  $\dots$  اعتمادا على نفس المبرهنة المشتق الثاني من المرتبة  $n - 1$  ينعدم في  $n - 1$  نقطة أي له  $n - 1$  جذرا

و جميع هذه الجذور تقع بين 1 و -1 وحسب قاعدة "لايبنتر" في الإشتقاق يمكن أن نكتب العلاقة

$$\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} = (x + 1)^n \frac{d^n(x - 1)^n}{dx^n} + C_n^1 \frac{d(x + 1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x - 1)^n}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^n(x + 1)^n}{dx^n} (x - 1)^n$$

باعتبار  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  وعن هذا ينتج أن  $X_n(1) = 2^n n!$  و  $X_n(-1) = -2^n n!$  لذا بإختيار الثابت بالشكل  $C_n = \frac{1}{2^n n!}$  نجد كثيرات حدود نرمر لها بالرمز  $P_n(x)$  تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n \geq 0) \quad (3.2)$$

ملاحظة 1.1.2 يمكن الحديث على كثيرات حدود لوجندر المعرفة على المجال  $[a, b]$  والتي تعطى بالشكل التالي:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x - a)^n (x - b)^n]}{dx^n}. \quad (4.2)$$

يمكن تطبيق دستور لايبنتر على هذه العلاقة لإعطائها بتعبير مماثل للتعبير الذي أوردناه أعلاه.

ملاحظة 2.1.2 يمكن اختيار التحويل الخطي

$$x = \alpha t + \beta \quad (5.2)$$

للانتقال من الشكل (4.2) إلى الشكل (3.2) بعد ضربه بثابت ملائم وعندها بوضع:  $x = b$  من أجل  $t = 1$  و  $x = a$  من أجل  $t = -1$  نجد المعادلتين

$$a = -\alpha + \beta, \quad (6.2)$$

$$b = \alpha + \beta \quad (7.2)$$

ومن المعادلتين (6.2)، (7.2) نجد

$$\beta = \frac{a + b}{2} \quad (8.2)$$

$$\alpha = \frac{b - a}{2} \quad (9.2)$$

و بتعويض المعادلتين (8.2) و (9.2) في المعادلة (5.2) يأخذ التحويل الخطي الشكل التالي:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \quad (10.2)$$

وعندها من المعادلة (10.2) نجد المعادلتين التاليتين:

$$x - b = \frac{b-a}{2}(t-1) \quad (11.2)$$

$$x - a = \frac{b-a}{2}(t+1), \quad (12.2)$$

بضرب المعادلة (11.2) في المعادلة (12.2) و في الأخير نجد:

$$(x-a)(x-b) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (t^2-1) = c(t^2-1) \quad (13.2)$$

تعريف كثيرات حدود لوجندر بالمكاملة :

يمكن تعريف كثيرات حدود لوجندر اعتمادا على المكاملة بالمبرهنة التالية [10]:

مبرهنة 2.2.2 تعرف كثيرات حدود لوجندر من الدرجة  $n$  من أجل  $x \in [a, b]$  بدلالة كثيرات حدود من الدرجة  $2n$  نرمز لها بالرمز  $R(x) = R_{2n}(x)$  . وبحيث لكل كثير حدود  $Q(x)$  من كثيرات حدود لوجندر التي هي من درجة أقل من  $n$  يتحقق أن

$$\int_a^b R_n(x)Q_n(x)dx = 0 \quad (14.2)$$

و

$$(15.2)$$

$$R(a) = R'(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0, \quad R(b) = R'(b) = \dots = R^{(n-1)}(b) = 0.$$

برهان 1.2.2 يمكن إيجاد كثير حدود  $X_n(x)$  من الدرجة  $n$  معرفة من أجل  $x \in [a, b]$  باعتبار  $a, b$  ثابتان اختياريان وبحيث لكل كثير حدود  $Q_n(x)$  أقل من  $n$  ومعرفة على نفس المجال يتحقق أن

$$\int_a^b X_n(x)Q_n(x)dx = 0$$

إن لكل كثير حدود  $X_n(x)$  من الدرجة  $n$  يمكن النظر إليها كمشتق من الدرجة  $n$  لكثير حدود من الدرجة  $2n$  ولتكن  $R_n(x)$  . أو أن  $R_n(x)$  يمكن الحصول عليها من  $X_n(x)$  بالمكاملة  $n$  مرة متتالية وفي كل مرة نختار ثابت التكامل بحيث أن  $R(a) = R'(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0$  ولهذا تؤول



المسألة إلى إيجاد كثير الحدود  $R_n(x)$  الذي يحقق الشرط (14.2) لكل كثير حدود  $Q_n(x)$  من درجة أقل من  $n$  وبإجراء مكاملة الطرف الأيسر في (14.2) بالتجزئة نجد

$$\int_a^b R^n(x)Q_n(x)dx = [Q(x)R^{n-1}(x) - Q'(x)R^{n-2}(x) + \dots + (-1)^{n-1}Q(x)^{n-1}R(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b Q^n(x)R(x)dx$$

وإذا أخذنا (15.2) بعين الاعتبار كون  $Q^n(x) \equiv 0$  لكل كثير حدود درجته أصغر من  $n$  فإننا نجد أن  $Q(b)R^{n-1}(b) - Q'(b)R^{n-2}(b) + \dots + (-1)^{n-1}Q(b)^{n-1}R(b) = 0$  والقيم  $Q(b), Q'(b), Q''(b), \dots, Q^{(n-1)}(b)$  هي قيم عديدة كيفية وهكذا نجد علاقات التساوي  $R(b) = R'(b) = R''(b) = \dots = R^{(n-1)}(b) = 0$  ومنه نجد أن لكثير الحدود  $R(x)$  الجدران  $a, b$  من المرتبة  $n$  ويكون له الشكل  $R(x) = (x-a)^n(x-b)^n$  وبالتالي نجد أن

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n[(x-a)^n(x-b)^n]}{dx^n}$$

أو باختيار  $a = -1, b = 1$  و  $C_n = \frac{1}{2^n n!}$  نجد (4.2) وعادة نختار  $P_0(x) = 1$  من تعريف كثيرات حدود لوجندر فإن

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_n(x)dx = 0$$

حيث  $Q_n(x)$  كثيرات حدود لوجندر التي هي من درجات أقل من  $n$  ولهذا فإنه من أجل  $m \neq n$  نجد

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_m(x)dx = 0$$

لكن من أجل  $m = n$  وبالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{dx^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx \\ &= 2(2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1} . \end{aligned}$$

التعريف من خلال الدوال المولدة :

تعريف كثيرات حدود لوجندر اعتمادا على الدالة المولدة نورد في المبرهنة التالية [10]:

مبرهنة 3.3.2 تعطي كثيرات حدود لوجندر بدلالة الدالة المولدة وفق العلاقة التالية:

$$G(t, x) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (16.2)$$

برهان 1.3.2 لنشر الدالة  $G(t, x)$  وفق ثنائي الحد حيث نجد

$$\begin{aligned} G(t, x) &= (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \\ &= [1 - (2x + t)t]^{-1/2} \\ &= -1[-t(2x - t)] + \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r + 1)!!}{2^n \cdot r!} (-1)^r t^r (2x - t)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^r \cdot r!} \sum_{q=0}^{\infty} C_q^r (-1)^q t^r (2x)^{r-q} \end{aligned}$$

والمعاملات أمام  $t^n$  هي

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \binom{n}{2k}}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

وبهذا يتم الاثبات .

## 2.2 كثيرات حدود لوجندر المعدلة وخصائصها :

ليكن  $x \in (0, 1); P_i(x)$  كثيرات حدود لوجندر المعدلة. وتكتب بالعلاقة التالية [8]:

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{(i+1)} P_i(x) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (17.2)$$

حيث أن  $P_0(x) = 1$  و  $P_1(x) = 2x - 1$ . ويمكن كتابة كثيرات حدود لوجندر المعدلة  $P_i(x)$  على شكل تحليلي من الدرجة  $i$  كما يلي [8]:

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \frac{(i+k)! x^k}{(i-k)(k!)^2}. \quad (18.2)$$

حيث أن  $P_i(1) = 1$  و  $P_i(0) = (-1)^i$

كثيرات حدود لوجندر من كثيرات حدود المتعامدة وشرط التعامد لكثيرات حدود لوجندر المعدلة هو:

$$\int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (19.2)$$

### 1.2.2 تقريب تابع

ليكن التابع  $y(x) \in L^2(0, 1)$  , نقوم بتقريبه بكثيرات حدود لوجندر المعدلة من الدرجة  $i$  على النحو التالي [8]:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x),$$

حيث أن المعاملات  $c_i$  تكتب على الشكل التالي:

$$c_i = (2i + 1) \int_0^1 y(x) P_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (20.2)$$

عمليا نحتاج فقط عدد منتهي من الأساسات وليكن  $N$  ومنه نضع التقريب التالي :

$$y_N(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \Phi(x), \quad (21.2)$$

حيث  $C$  يسمى شعاع معاملات لوجندر و  $\Phi(x)$  شعاع أساس لوجندر المعدل ، تعطى على الشكل التالي:

$$C^T = [c_0, c_1, \dots, c_N],$$

$$\Phi(x) = [P_0, P_1, \dots, P_N]^T. \quad (22.2)$$

### 2.2.2 المصفوفة التنفيذية للتكامل ذي الرتب الكسرية

في هذا الجزء نقوم بتعريف المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري لكثيرات حدود لوجندر المعدلة وهي كالتالي [8]:

مبرهنة 1.1.2 ليكن  $\Phi(x)$  أساس كثيرات حدود لوجندر إذن :

$$I^v \Phi(x) \simeq A^v \Phi(x), \quad (23.2)$$

حيث أن  $A^v$  هي مصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري من درجة  $(N + 1)(N + 1)$

$$A^v = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^0 \xi_{0,0,k} & \sum_{k=0}^0 \xi_{0,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^0 \xi_{0,N,k} \\ \sum_{k=0}^1 \xi_{1,0,k} & \sum_{k=0}^{k=1} \xi_{1,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^1 \xi_{1,N,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^i \xi_{i,0,k} & \sum_{k=0}^i \xi_{i,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^i \xi_{i,N,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \xi_{N,0,k} & \sum_{k=0}^N \xi_{N,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^N \xi_{N,N,k} \end{pmatrix}, \quad (24.2)$$

حيث أن:

$$\xi_{i,j,k} = (2j + 1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j+k+l} (i+k)! (l+j)!}{(i-k)! k! (k+\alpha+1) (j-1)! (l!)^2 (k+l+\alpha+1)}. \quad (25.2)$$

برهان 2.1.2 لدينا الشكل التحليلي لكثيرات حدود لوجندر المعادلة (2.18) وباستخدام المعادلتين (1.1) و (1.3) نحصل على مايلي :

$$\begin{aligned} I^\alpha P_i(x) &= \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!)^2} I^\alpha (x^k) \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! k!} \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (26.2)$$

نقوم الآن بتقريب  $x^{\alpha+k}$  من الدرجة  $(N+1)$  بكثيرات حدود لوجندر المعادلة كيلي :

$$x^{\alpha+k} \simeq \sum_{j=0}^N a_{k,j} P_j(x), \quad (27.2)$$

حيث

$$\begin{aligned} a_{k,j} &= (2j+1) \int_0^1 x^{\alpha+k} P_j(x) dx \\ &= (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2} \int_0^1 x^{\alpha+k+l} dx \\ &= (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2 (k+l+\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (28.2)$$

من خلال توظيف المعادلات (2.26) - (2.28) نحصل على مايلي:

$$\begin{aligned} I^\alpha P_i(x) &\simeq \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! k! \Gamma(k+\alpha+1)} a_{k,j} P_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^i \xi_{i,j,k} \right) P_j(x), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (29.2)$$

حيث أن  $\xi_{i,j,k}$  معطى في المعادلة (2.25), نكتب المعادلة السابقة على شكل شعاع كيلي :

$$I^\alpha P_i(x) \simeq \left[ \sum_{k=0}^i \xi_{i,0,k}, \sum_{k=0}^i \xi_{i,1,k}, \dots, \sum_{k=0}^i \xi_{i,N,k} \right] \Phi(x), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (30.2)$$

وهو المطلوب.

# الفصل الثالث

## طريقة عددية لحل معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية

### قائمة المحتويات

---

25	.....	1.3 تطبيق المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري:
26	.....	2.3 تحليل الخطأ
28	.....	3.3 تطبيق عددي

---



### 1.3 تطبيق المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري:

نقوم الان بعرض طريقة عددية لحل معادلة تفاضلية ذات رتبة كسرية باستعمال المصفوفة التنفيذية للتكامل الناتجة من كثيرات حدود لوجندر  
لتكن المعادلة التفاضلية متعددة الترتيب التالية [8]:

$$D^\alpha y(x) = \sum_{i=1}^k a_i D^{\beta_i} y(x) + a_{k+1} y(x) + g(x), \quad (1.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.3)$$

حيث  $a_j (j = 1, \dots, k+1)$  هي معاملات ثابتة حقيقية وأيضا  $n-1 < \alpha \leq n$

$0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \alpha$  تدل على المشتقات الكسرية لريمان ليوفيل من رتبة  $\alpha$   
لحل المعادلة (3.1) و (3.2) نقوم بتطبيق ريمان ليوفيل للتكامل من الرتبة  $\alpha$  على المعادلة (3.1)  
وإستخدام التوطئة للحصول على

(3.3)

$$y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!} = \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} \left( y(x) - \sum_{i=0}^{n_j-1} y^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!} \right) + a_{k+1} I^\alpha y(x) + I^\alpha g(x),$$

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

حيث  $n_j \in N, \quad n_j - 1 < \alpha \leq n_j$  بالتالي

$$y(x) = \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} y(x) + a_{k+1} I^\alpha y(x) + f(x), \quad (4.3)$$

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

حيث

$$f(x) = I^\alpha g(x) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \frac{x^i}{i!} - \sum_{j=1}^k a_j I^{\alpha-\beta_j} \left( \sum_{i=0}^{n_j-1} d_i \frac{x^i}{i!} \right).$$

نقوم بتقريب التابع  $y(x)$  و  $f(x)$  بواسطة كثيرات حدود لوجندر المعدلة

$$y_N(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) = C^T \Phi(x), \quad (5.3)$$



$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^N f_i P_i(x) = F^T \Phi(x), \quad (6.3)$$

حيث أن الشعاع  $F^T = [f_0, f_1, \dots, f_N]$  معلوم و  $C^T = [c_0, c_1, \dots, N]$  شعاع مجهول . باستخدام المبرهنة 1.1.2 يمكن مقارنة الحل التقريبي (3 . 5) كإيلي :

$$I^\alpha y_N(x) = C^T I^\alpha \Phi(x) = C^T A^\alpha \Phi(x), \quad (7.3)$$

حيث أن معرفة في المبرهنة 1.1.2 . باستخدام المعادلات (3 . 5) - (3 . 7) نجد  $R_N(x)$  والمعادلة (3 . 4) تكتب على الشكل التالي :

$$R_N(x) = \left( C^T - C^T \sum_{i=1}^k a_i A^{\alpha-\beta_i} - a_{k+1} C^T A^\alpha - F^T \right) \Phi(x). \quad (8.3)$$

كما هو الحال في طريقة tau النموذجية (انظر [5] ) ، فإننا ننتج  $N - n + 1$  المعادلات الجبرية الخطية من خلال تطبيق

$$\langle R_N(x), P_j(x) \rangle = \int_0^1 R_N(x) P_j(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, N - n \quad (9.3)$$

لتحديد  $c_i$  نحتاج  $n - 1$  من معادلات . أيضا ، عن طريق استبدال المعادلة (3 . 5) بالمعادلة (3 . 2) نحصل على

$$y^{(i)}(0) = C^T \Phi^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^N c_i P_i^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (10.3)$$

حيث أن  $P_i^{(n)}$  معرفة كإيلي :

$$P_i^{(n)} = \frac{(-1)^{i+n} (i+n)!}{(i-n)! n!}, \quad n \leq i. \quad (11.3)$$

الآن ، من خلال حل هذه المجموعة من المعادلات الخطية وتحديد معامل غير معروف  $C$  ، ويمكن حساب  $y(x)$  كما في المعادلة (3 . 5) .

### 2.3 تحليل الخطأ

في هذا القسم ، يتم تقديم تحليل الخطأ لطريقتنا. ومن المعروف أن كثيرات حدود لوجندر المعدلة  $P_i(x)$  تشكل مجموعة كاملة من  $L^2(\Omega)$  متعامدة [5] ، حيث أن  $\Omega = [-1, 1]$  . نذكر أن  $H^m(\Omega)$  هو فضاء





سوبوليف لجميع الدوال  $u(t)$  على  $\Omega$  مثل ذلك  $u(t)$  وكل مشتقاته من درجة  $m$  هي في  $L^2(\Omega)$  وتعريف  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$  كمايلي [8]:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ونصف نظم يعرف كمايلي:

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)}^2 = \sum_{i=\min(m,N)}^N \|u^{(i)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

نلاحظ أنه كلما كان  $N \geq m - 1$  لدينا

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)} = \|u^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} = |u|_{H^m(\Omega)}.$$

نفرض أن  $u_N = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k P_k$  هو تقريب لوجندر للتابع  $u \in H^m(\Omega)$  كما ثبت في [5] ، فإن خطأ هو

$$\|u - u_N\|_{H^{m;N}(\Omega)} \leq CN^{-m} |u|_{H^{m;N}(\Omega)}, \quad (12.3)$$

حيث  $C$  هو ثابت موجب حسب  $m$ . لأسلوبنا المقترح النظر في المعادلة (4 . 3) وليكن  $y(x)$  هو الحل الدقيق لهذا خطأ اقتطاع  $e_N(x) = y(x) - y_N(x)$  حيث  $y_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k P_k(x)$  هي سلسلة لوجندر المقتطعة من  $y$  ، ويمكن تقديرها على النحو التالي:

$$e_N(x) = \sum_{i=1}^k a_i I^{\alpha-\beta_i} e_N(x) + a_{k+1} I^\alpha e_N(x) + e_f(x),$$

حيث  $e_f(x) = f(x) - f_N(x)$ . بادخال النظم ينتج

$$\begin{aligned} \|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} &\leq \sum_{i=1}^k a_i I^{\alpha-\beta_i} \|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} + a_{k+1} I^\alpha \|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} + \|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=1}^k a_i \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta_i)} \int_0^x \|(x - \tau)^{\alpha-\beta_i-1} e_N(\tau)\|_{H^m(\Omega)} d\tau \\ &\quad + a_{k+1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \|(x - \tau)^{\alpha-1} e_N(\tau)\|_{H^m(\Omega)} d\tau + \|e_f(x)\|_{H^m(\Omega)} \\ &\leq M \int_0^x \|e_N(\tau)\|_{H^m(\Omega)} d\tau + \|e_f(x)\|_{H^m(\Omega)} \end{aligned}$$



حيث  $M$  هو ثابت مستقل عن  $x$ . باستخدام (3.12) الى  $N$ ، نجد ان خطأ  $e_f(x)$  حيث  $x \in \Omega$

$$\|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} \leq M \int_0^x \|e_N(\tau)\|_{H^m(\Omega)} d\tau + K.$$

$$\|e_N(x)\|_{H^m(\Omega)} \leq K e^{Mx}, \quad \forall x \in \Omega.$$

### 3.3 تطبيق عددي

لإعطاء نظرة عامة واضحة على هذه الطريقة، نقدم بعض الأمثلة التوضيحية.

مثال 1.3.3 لدينا المعادلة التفاضلية التالية [8]:

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = x^2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad y(0) = 0, \quad (13.3)$$

وحلها بالضبط هو  $y(x) = x^2$ .

من خلال تطبيق الطريقة الموضحة في القسم 1.3 مع  $N = 2$ ، نكتب الحل التقريبي كالتالي:

$$y(x) = \sum_{i=0}^2 c_i P_i(x) = C^T \Phi(x),$$

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^2 g_i P_i(x) = F^T \Phi(x), \quad (14.3)$$

من المبرهنة 1.1.2، لدينا

$$A^{3/2} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{35} & \frac{1}{63} \\ -\frac{1}{35} & -\frac{1}{45} & \frac{1}{77} \\ \frac{1}{315} & -\frac{3}{385} & -\frac{1}{117} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (15.3)$$

وباستخدام المعادلة (3.9) نحصل على

$$c_0 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{c_0}{15} - \frac{c_1}{35} + \frac{c_2}{315} \right) - f_0 = 0, \quad (16.3)$$

$$c_1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3c_0}{35} - \frac{c_1}{45} - \frac{3c_2}{385} \right) - f_1 = 0. \quad (17.3)$$



من خلال تطبيق المعادلة (3 . 10) نحصل على

$$c_0 - c_1 + c_2 = 0. \quad (18.3)$$

أخيرا ، من خلال حل المعادلات (3 . 16)-(3 . 18) نحصل على

$$c_0 = \frac{1}{3}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{6}.$$

ومن ثم يمكننا أن نكتب

$$y(x) = \sum_{i=0}^2 c_i P_i(x) = x^2,$$

وهو الحل بالضبط.

$x$	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$
0.1	$1.9 \times 10^{-2}$	$7.7 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-3}$
0.2	$9.5 \times 10^{-3}$	$5.2 \times 10^{-3}$	$7.3 \times 10^{-4}$
0.3	$4.2 \times 10^{-3}$	$2.4 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$
0.4	$1.6 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-4}$
0.5	$2.3 \times 10^{-2}$	$5.2 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$
0.6	$2.4 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$7.0 \times 10^{-4}$
0.7	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$
0.8	$4.9 \times 10^{-4}$	$6.2 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-3}$
0.9	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3}$
1	$6.3 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	$7.9 \times 10^{-3}$

جدول 1.3: الخطأ المطلق من أجل  $\alpha = 0.85$  للمثال 2.3.3

مثال 2.3.3 لدينا المعادلة التفاضلية التالية [8]:

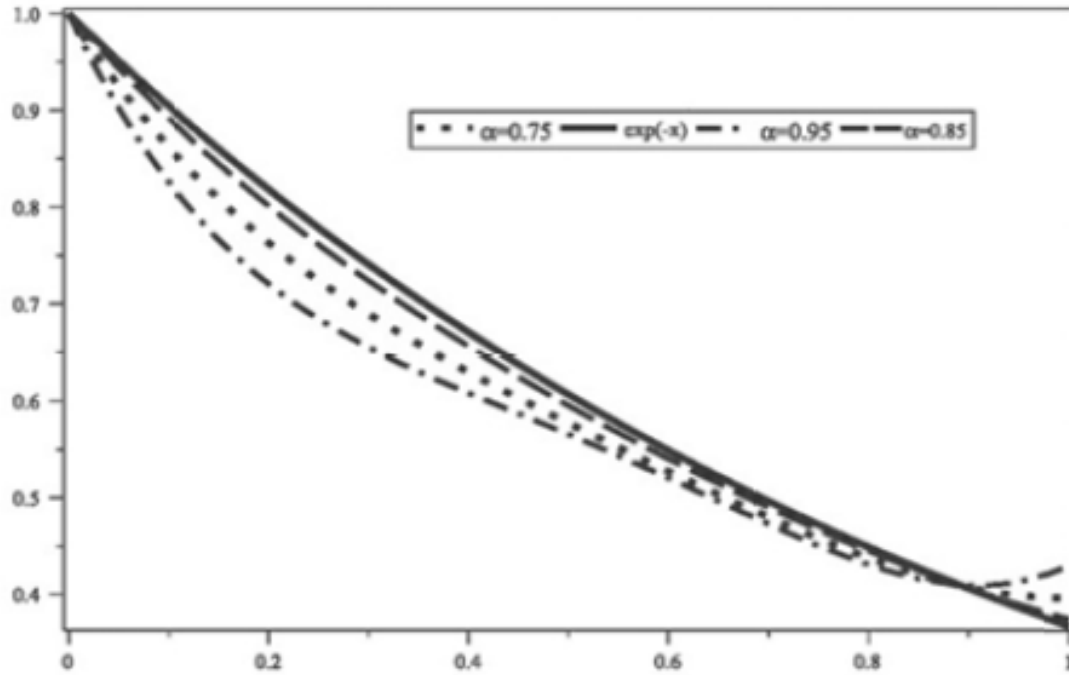
$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (19.3)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

الشرط الثاني هو  $\alpha > 1$  فقط. الحل الدقيق لهذه المعادلة هو على النحو التالي:

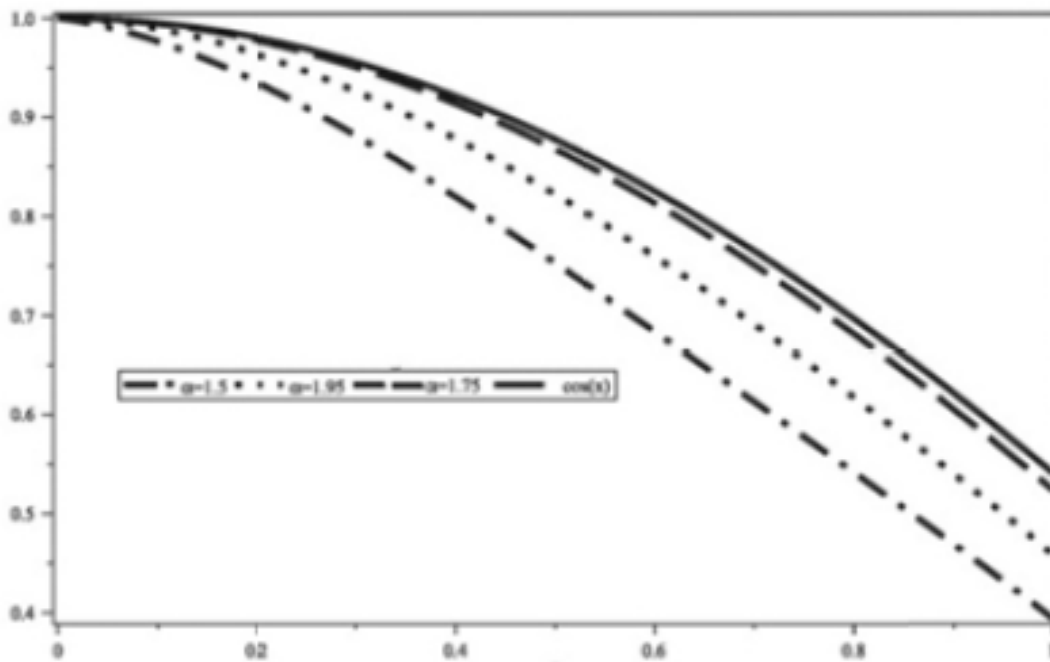
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

من خلال تطبيق التقنية الموضحة في القسم 3.1 وحل هذه المعادلة ، يظهر انخفاً المطلق لعدد  $\alpha = 0.85$  و  $N = 2, 4$  و 6 في الجدول 3.1 . في الجدول 3.1 ، نرى أنه يمكن تحقيق حل تقريبي جيد من خلال أخذ عدد قليل من شروط كثيرات حدود لوجندر المعدلة . هذه النتائج مشابهة لتلك النتائج في [4] . يتم توضيح النتائج العددية لـ  $y(x)$  مع  $N = 4$  و  $\alpha = 0.75, 0.85, 0.95$  و 1 في الشكل 3.1 .



شكل 1.3: مقارنة  $y(x)$  لمختلف قيم  $\alpha$  و  $N = 4$  في المثال 2.3.3

بالنسبة إلى  $\alpha = 1$  ، يتم إعطاء الحل الدقيق بواسطة  $y(x) = \exp(-x)$  . لاحظ أنه نظراً لأن  $\alpha$  تقترب من 1 ، تتقارب الحلول العددية مع الحلول التحليلية  $y(x) = \exp(-x)$  . في الحدود ، يقترب حل المعادلات التفاضلية الكسرية إلى حل المعادلات التفاضلية العادية مثل  $\alpha \rightarrow 0$  . علاوة على ذلك ، نقدم نتائج لـ  $\alpha > 1$  . يوضح الشكل 3.2 النتائج العددية لـ  $y(x)$  مع  $N = 4$  و  $\alpha = 1.5, 1.75, 1.95$  و 2 . لما  $\alpha = 2$  ، يتم إعطاء الحل الدقيق لـ  $y(x) = \cos(x)$  . على غرار الحالة السابقة ، من الشكل 3.2 ، نرى أنه عندما تقترب  $\alpha$  إلى 2 ، يتقارب الحل العددي مع حل المعادلة التفاضلية العادية.



شكل 2.3: مقارنة  $y(x)$  لما  $N = 4$  مع  $\alpha = 1.5, 1.75, 1.95$  في المثال 2.3.3

مثال 3.3.3 لدينا المعادلة التالية [8]:

$$D_t^2 y(x) - a D_t^\alpha y(x) - b y(x) = 8, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (20.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

لنفترض في الحالة خاصة  $a = b = -1$ ، باستخدام الطريقة الموضحة في المثال 1.3.3 مع  $N = 4$  يمكن الحصول على الحل التقريبي لما  $\alpha = 0.5$  و  $1.5$ . وتورد النتائج العددية في الجدول 2 . 3 بالمقارنة مع الحل الدقيق. الحل الدقيق يشير إلى حل سلسلة مغلقة الشكل المقدمة في [6]. بين الجدول 2 . 3 حل تقريبي العددي الجيد مع الحل الدقيق.

$\alpha = 1.5$		$\alpha = 0.5$		
الحل الدقيق	الحل العددي	الحل الدقيق	الحل العددي	$x$
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0
0.125221	0.032615	0.039750	0.039995	0.1
0.033507	0.124678	0.157036	0.157331	0.2
0.267609	0.268427	0.347370	0.347274	0.3
0.455435	0.457321	0.604695	0.604066	0.4
0.684335	0.686033	0.921768	0.920928	0.5
0.950393	0.950455	1.290457	1.290060	0.6
0.249959	1.247710	1.702008	1.702643	0.7
1.579557	1.576113	2.147287	2.148833	0.8
1.935832	1.935220	2.617001	2.617766	0.9
2.315526	2.325795	3.101906	3.097559	1.0

جدول 2.3: مقارنة بين الحل العددي والحل الدقيق للمثال 3.3.3

## خاتمة

لقد عرضنا صيغة عامة للمصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري. استخدمنا هذه الطريقة لتقريب الحل العددي لفئة المعادلات التفاضلية الكسرية. استند في ذلك على خصائص كثيرات حدود لوجندر المحولة. كما رأينا في الأمثلة الموضحة ، تتميز هذه الطريقة بالدقة في الحل. علاوة على ذلك ، هناك حاجة إلى عدد قليل فقط من كثيرات حدود لوجندر المحولة للحصول على نتيجة مرضية و الامثلة المدروسة دليل على ذلك.

## Adrien-Marie Legendre

## أدريان ماري لوجندر



الميلاد: 18 سبتمبر 1752 باريس, فرنسا

الوفاة: 10 يناير 1833 (80 سنة) باريس, فرنسا

الإقامة: فرنسا

الجنسية: فرنسي

هو عالم كان له دور معطاء في عدة فروع من الرياضيات ومنها الاحصاء ونظرية العداد والجبر التجريدي والتحليل الرياضي. عضو في الجمعية الملكية، والأكاديمية الفرنسية للعلوم، والأكاديمية الأمريكية للفنون والعلوم، والأكاديمية البروسية للعلوم



## المراجع العلمية

- [1] SHANTANU DAS ,Functional Fractional Calculus ,DOI 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [2] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M. & TRUJILLO, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science Amsterdam.
- [3] PODLUBNY, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. New York, Academic Press.
- [4] SAADATMANDI, A. & DEGHAN, M. (2010). *A new operational matrix for solving fractional-order differential equations* . Comput Math Appl., 59, 1326-1336.
- [5] CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. (1988). *Spectral Methods in Fluid Dynamic*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- [6] ARIKOGLU, A. & OZKOL, I. . *Solution of fractional differential equations by using differential transform method*. Chaos Soliton Fract. (2007), 34(5), 1473- 1481.
- [7] A.M. WAZWAZ, *The combined Laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro-differential equations*, Appl.
- [8] M. H. AKRAMI, M. H. ATABAKZADEH AND G. H. ERJAEI, “*The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials*” Iranian Journal of Science Technology,IJST (2013) 37A4: 439-444.
- [9] YUCHENG LIU,*Application of Legendre Polynomials in Solving Volterra Integral Equations of the Second Kind*,Applied Mathematics 2013, 3(5): 157-159.
- [10] B. M. MOHAN,S. K. KAR,*Continuous Time Dynamical Systems*
- [11] LIONS, JACQUES LOUIS. *Optimal control of systems governed by partial differential equations* (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften). Vol. 170. Berlin: Springer, .1971
- [12] GUERMIT DJAMILA. *Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, théorie et applications*

### ملخص

في هذه المذكرة نطبق المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري لكثيرات حدود لوجندر. اقترحنا خوارزمية للحصول على حل تقريبي للمعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية باستخدام أساس كثيرات حدود لوجندر المحولة. تم تطبيق هذه الطريقة على حل المعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الرتب مع الشروط الأولية، إن الحلول الدقيقة التي تم الحصول عليها لبعض الأمثلة الموضحة. تكشف هذه النتائج العددية أن هذه الطريقة تعطي تقريبًا مثاليًا للمعادلات التفاضلية متعددة الترتيب.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية، المصفوفة التنفيذية، كثيرات حدود لوجندر المحولة، مؤثر التكامل الكسري لريمان-ليوفيل.

### Abstract

In this article we implement an operational matrix of fractional integration for Legendre polynomials. We proposed an algorithm to obtain an approximation solution for fractional differential equations, described in Riemann-Liouville sense, based on shifted Legendre polynomials. This method was applied to solve linear multiorder fractional differential equation with initial conditions, and the exact solutions obtained for some illustrated examples. Numerical results reveal that this method gives ideal approximation for linear multi-order fractional differential equations.

**Keywords:** Fractional-order differential equation; operational matrix; shifted Legendre polynomials; Riemann-

### Résumé

Dans cet article, nous implémentons une matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire pour les polynômes de Legendre. Nous avons proposé un algorithme pour obtenir une solution d'approximation pour les équations différentielles fractionnaires, décrite dans le sens de Riemann-Liouville, basée sur des polynômes de Legendre décalés. Cette méthode a été appliquée pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire multi-ordre linéaire avec des conditions initiales, et les solutions exactes obtenues pour certains exemples illustrés. Les résultats numériques révèlent que cette méthode donne une approximation idéale pour les équations différentielles fractionnaires multi-ordre linéaires.

**Mots-clés:** Equation différentielle à ordre fractionnel; matrice opérationnelle; polynômes de Legendre décalés; Opérateur intégral fractionné Riemann-Liouville