No d'ordre :
No de série :

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTE DES MATHEMATIQUES
ET DES SCIENCES DE LA MATIERE
Département de physique

Mémoire
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences de la Matière
Filière : Physique
Spécialité : Théorique

Présenté par : Benzair Thouiba
Benheoud Zahra

Thème :

Etude de quelques équations relativistes dans le formalisme de la géométrie non commutative

Soutenu publiquement
Le : 10 /06/2018

Devant le jury composé de

H. Belgithar	MAA	Examinateur	UKM Ouargla
M.A.Benbitour	MCA	Présidons	UKM Ouargla
L. Khodja	MCA	Encadreur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2017/2018

Table des matières

Dédicace

A nos pères

A nostrès chères mères

A tous mes frères et soeurs

A toute la famille et tous mes amis

A tous mes professeurs de l'école primaire à la fin de cette mémoire

THOUIBA ET ZAHRA

Remerciements

Tout d'abord; nous remercions Dieu le tout puissant qui nous données la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

Notre respect et notre gratitude au Professeur L. Khodja, superviseur de ce mémoire , et nous lui devons beaucoup, nous apprécions particulièrement sa présence, sa gentillesse et son enthousiasme, ses compétences étaient très précieuses.

Nous voudrions vous exprimer notre sincère gratitude pour ce que vous faites pour nous.

Mes remerciements vont ensuite au jury de ce mémoire, pour l'honneur qu'il mes fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs: H. Belgithar et le présedent M.A.Benbitour qui ont bien voulu accepté de juger ce travail.

Nous remercions vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, même par un petit sourire d'encouragement.

Thouiba Benzair et Zahra Benhaoued

1

Le formalisme de la géométrie non commutative

1.1 Introducton

Les racines de la géométrie non-commutative (GNC) se trouvent dans la mécanique quantique. Comme on le sait, la mécanique quantique a également motivé dans la première moitié du $20^{ème}$ siècle un développement important dans la théorie des algèbres d'opérateur, nous savons, que de la mécanique classique à la mécanique quantique, l'algèbre commutative des fonctions sur l'espace des phases se change à une algèbre d'opérateur non-commutative sur un espace de Hilbert. Une procédure similaire pouvait être réalisée en géométrie, où les notions classiques perdent leur applicabilité et leur pertinence et pouvait aussi être remplacée par une nouvelle idée de l'espace, représentée par les algèbres non-commutatives [1].

La représentation de l'espace non-commutatif, pouvait être réalisé par les opérateurs de coordonnées $\tilde{x}^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ satisfaisant les relations de commutation:

$$[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad \text{(En mettant } \hbar = c = 1) \tag{1.1.1}$$

où $\theta^{\mu\nu}$ est une matrice anti-symétrique à (3+1)-dimensions avec ses éléments constants, où la matrice anti-symétrique peut-être tout simplement choisie comme $\theta^{\mu\nu} = \theta\epsilon^{\mu\nu}$ et $\theta^{\mu 0} = \theta^{0\mu} = 0$, où $\epsilon^{\mu\nu}$ est le symbole de Levi-Civita et θ est un paramètre qui mesure la non-commutativité sur l'espace-espace. Mais quand $\theta^{ij} = \theta^{ji} = 0$ qui s'appalle la GNC sur l'espace-temps. (voir, par exemple, la référence de la base de la géométrie non-commutative [2]).

1.2 Transformation de Weyl

Pour une autre définition de la transformée de Weyl en physique théorique la transformation de Weyl du non d'*Hermann Weyl*, est un redimensionnent local du tenseur métrique.

La connexion Levi-Civita ordinaire et les connexion de spin associées ne sont pas invariantes. Sous les transformation de weyl une notion invariante de maniére appropriée est la connexion Weyl, qui est une façon de spécifier la structure d'une connexion conforme.

On défini un espace non commutatif comme en a décrit avant, en remplaçant les coordonnées locales x^i par les opérateurs hermitien $\hat{x}^i$, obéissant aux relations de commutation: dans eq. (1.1.1).

On définit le symbole de Weyl par

$$\hat{w}\left[f\right] = \int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} \tilde{f}\left(k\right) e^{ik_i \hat{x}^i}. \tag{1.2.1}$$

Où $f\left(k\right)$ est la transformation de Fourier de $f\left(x\right)$ par [3]

$$\tilde{f}\left(k\right) = \int e^{-ik_i x^i} f\left(x\right) d^D x. \tag{1.2.2}$$

L'opèrateur de weyl est hermitien si $f\left(x\right)$ est une fonction réelle.

$$\begin{aligned} \hat{w}^+\left[f\right] &= \int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} \tilde{f}^*\left(k\right) e^{-iK_i \hat{x}^i} = \int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} \tilde{f}\left(-k\right) e^{-ik_i \hat{x}^i} \\ &= \int \frac{d^D k'}{\left(2\pi\right)^D} \tilde{f}\left(k'\right) e^{ik'_i \hat{x}^i} \\ &= \hat{w}\left[f\right]. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

On peut écrire l'opèrateur de Weyl comme suit

$$\begin{aligned} \hat{w}\left[f\right] &= \int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} \tilde{f}\left(k\right) e^{ik_i \hat{x}^i} \\ &= \int\int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} d^D x f\left(x\right) e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i} = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}\left(x\right). \\ \text{avec} \quad \hat{\Delta}\left(x\right) &= \int \frac{d^D k}{\left(2\pi\right)^D} f(x) e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$\hat{\Delta}\left(x\right)$ décrit une base mixte pour les opèrateurs et les champs sur un espce-temps, et comme l'opèrateur de Weyl est hermitien donc $\hat{\Delta}\left(x\right)$ aussi est hermitiene $\hat{\Delta}^+\left(x\right) = \hat{\Delta}\left(x\right)$.

On utilise la formule de Baker -Campbell -Hausdforff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^2[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^3[[A,B],A]+.......} \tag{1.2.5}$$

$$e^{iki\hat{x}^i} e^{ik'_i\hat{x}^i} = e^{i\left(k_i k'_i\right)\hat{x}^i} e^{\frac{1}{2}(ik_i)\left(ik'_j\right)\left[\hat{x}^i,\hat{x}^j\right]} = e^{i\left(k_i+k'_i\right)\hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j \theta^{ij}}. \tag{1.2.6}$$

Pour trouver le produit des opèrateurs $\hat{\Delta}\,(x)$

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}\,(x)\,\hat{\Delta}\,(y) &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{ik_i\hat{x}^i} e^{ik'_i\hat{x}^i} e^{-ik_i x^i} e^{-ik'_i y^i} \\ &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i\left(k_i+k'_i\right)\hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j\theta^{ij}} e^{-i\left(k_i x^i + k'_i y^i\right)}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

On a $\hat{w}\left[e^{ik_i x^i}\right] = e^{ik_i\hat{x}^i}$ donc

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}\,(x)\,\hat{\Delta}\,(y) = &\int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D Z e^{i\left(k_i+k'_i\right)Z^i}\,\hat{\Delta}\,(Z) \\ &\times e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j\theta^{ij}} e^{-i\left(k_i x^i + k'_i y^i\right)}. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

1.3 Produit Star (Moyal)

En mathématiques, le produit Moyal (aussi appelé produit star ou produit Weyl-Groenewold) est un exemple de plus connu d'un produit de l'espace des phases. C'est un produit associatif, non-commutatif, sur les fonctions de R^{2n}, muni de sa parenthèse de Poisson (avec une généralisation aux variétés symplectiques, décrites ci-dessous). C'est un cas particulier du produit de l'algèbre des symboles d'une algèbre enveloppante universelle.

Le produit star (noté $\star$) est une déformation associative de la loi du produit habituelle. Il apparit comme un outil pour exprimer les lois quantique en termes des variables de commutation $(x^i \star x^j)$ correspondant au produit d'opèrateur $\hat{x}^i\ \hat{x}^j$. La commutateur - $[x^i, x^j]_\star = x^i \star x^j - x^j \star x^i$ correspandant à $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$. Alors tel que le produit de deux opèrateurs de weyl $\hat{w}\,[f]$ et $\hat{w}\,[g]$ correspondant aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ égal à l'opèrateur de weyl associe au produit star de deux fonction [3] $\hat{w}\,[f]\,\hat{w}\,[g] = \hat{w}\,[f \star g]$. On commence par le premiére terme:

$$\begin{aligned}\hat{w}\,[f]\,\hat{w}\,[g] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k) e^{iK_i\hat{x}^i} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\tilde{g}(k') e^{ik'_i\hat{x}^i} \\ &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{ik_i\hat{x}^i} e^{ik'_i\hat{x}^i}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

En utilisant la formule de Baker -Campbell -Hausdorff

$$e^{A}e^{B}=e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^{2}[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^{2}[[A,B],A]+\dots}. \tag{1.3.2}$$

On pose $k+k'=q$, et on trouve:

$$\begin{aligned}\hat{w}\left[f\right]\hat{w}\left[g\right] &= \int\int\frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}}\frac{d^{D}k'}{(2\pi)^{D}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k')e^{i(k_{i}+k'_{i})\hat{x}^{i}}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_{i}k'_{j}}\\ &= \int\int\frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}}\frac{d^{D}q}{(2\pi)^{D}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{i(q_{i})\hat{x}^{i}}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}(k_{i}q_{j}-k_{i}k_{j})}.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Est symétrique $(k_{i}k_{j}=k_{j}k_{i})$

$$\hat{w}\left[f\right]\hat{w}\left[g\right]=\int\int\frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}}\frac{d^{D}q}{(2\pi)^{D}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{iq_{i}\hat{x}^{i}}e^{-\frac{1}{2}\theta^{ij}k_{i}q_{j}}. \tag{1.3.4}$$

On passe au deuxiéme terme:

$$\hat{w}\left[f\star g\right]=\int\frac{d^{D}q}{(2\pi)^{D}}(\widetilde{f\star g})(q)e^{iq_{i}\hat{x}^{i}}, \tag{1.3.5}$$

d'aprés

$$\hat{w}\left[f\right]\hat{w}\left[g\right]=\hat{w}\left[f\star g\right]. \tag{1.3.6}$$

L'espritd

$$(\widetilde{f\star g})(q)=\int\frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_{i}q_{j}}. \tag{1.3.7}$$

Où $\left(\widetilde{f\star g}\right)(q)$ est la transformée de fourier de $(f\star g)\,(q)$.

$$\begin{aligned}(f\star g)\,(q) &= \int\frac{d^{D}q}{(2\pi)^{D}}\left(\widetilde{f\star g}\right)(q)\,e^{iq_{i}x^{i}}\\ &= \int\int\frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}}\frac{d^{D}q}{(2\pi)^{D}}\tilde{f}\,(k)\,\tilde{g}\,(q-k)\,e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_{i}q_{j}}e^{iq_{i}x^{i}}\\ &= f\,(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_{i}}\theta^{ij}\overrightarrow{\partial_{j}}\right)g\,(x)\\ &= f\,(x)\,g\,(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\frac{1}{n!}\theta^{i_{1}j_{1}}...\theta^{i_{1}j_{1}}\partial_{i_{1}}...\partial_{j_{n}}f\,(x)\,\partial_{j_{n}}...\partial_{j_{n}}g\,(x)\,.\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

On peut écrire le produit star de deux fonctions au premiére ordre de θ,comme suit:

$$\begin{aligned}f\star g &= f\,(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_{i}}\theta^{ij}\overrightarrow{\partial_{j}}\right)g\,(y)\mid_{x=y}\\ &= f\,(x)\,g\,(y)+\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_{i}f\,(x)\,\partial_{j}g\,(y)+O\left(\theta^{2}\right)\mid x=y.\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

1.4 Transformations de Seiberg-Witten

Pour résoudre le problème de la charge en gèomètrie non-commutatif en utilisant les groupe unitaires $U(N)$, $SU(N)$ et $SO(N)$, et pour conserver la forme des transformations de Jauje avec différents de la dynamiques des champs il faut travailler avec les Seiberg-Witten maps de ces champs.$\left(\hat{\Psi}[\Psi, A], \hat{A}_\mu[A] ....\text{ect}\right)$.

D'abord on doit étudier la théorie abélienne de sorte que tous les commutateurs disparaissent et les experessions simplifient , Quand on travaille avec une théorie non abélienne la structure de Jauje sera alors codée dans les commutateurs et les anticommutateurs.

Du côté non commutatif, la multiplication habituelle des fonctions remplacée par le produit star $(f \star g)$, et on peut écrire les commutateur star au premier ordre de θ comme suit

$$
\begin{aligned}
[f, g]_* &= f * g - g * f \\
&= fg + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\ \partial_\sigma g - gf - \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\sigma g\ \partial_\rho f + O\left(\theta^2\right) \qquad (1.4.1) \\
&= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\ \partial_\rho g - \frac{i}{2}\theta^{\sigma\rho}\partial_\rho g\ \partial_\rho g + O\left(\theta^2\right) \\
&= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\ \partial_\sigma g + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho g\ \partial_\sigma f + O\left(\theta^2\right) \\
[f, g]_* &= [f, g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\left\{\partial_\rho f, \partial_\sigma g\right\} + O\left(\theta^2\right). \qquad (1.4.2)
\end{aligned}
$$

$$
[f, g]_* = [f, g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\left\{\partial_\rho f, \partial_\sigma g\right\} + O\left(\theta^2\right).
$$

Dans le cas abélien ($[f, g] = 0$), réduit:

$$
[f, g]_\star = i\ \theta^{\rho\sigma} g_\rho f\ \partial_\sigma g + O\left(\theta^2\right). \tag{1.4.3}
$$

Sur un espace non commutatif vit la théorie de jauje non commutative avec le potentiel de jauje $\hat{A}_\mu$et l'intensité de champ [4, 5].

$$
\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i\left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu\right]_\star. \tag{1.4.4}
$$

La transformation de Jauje $\hat{\delta}$ a le paramêtre de Jauje $\hat{\lambda}$ [4, 5] et:

$$
\hat{\delta}\hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i\left[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu\right]_\star \equiv \hat{D}_\mu \hat{\lambda} \tag{1.4.5}
$$

$$
\hat{\delta}\hat{F}_{\mu\nu} = i\left[\hat{\lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}\right]_\star. \tag{1.4.6}
$$

Les cartes de Seiberg-Witten sont des cartes entre la théorie de Jauje commutative et non commutative, qui sont compatible avec des transformations de Jauje. Autrement,les cartes des Seiberg-Witten nous permettent de cousiderer les champs non commutatifs $\hat{\Psi}, \hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu}$, comme de fonctiennelles des champs ordinaires $\Psi, A_\mu, F_{\mu\nu}$. Les cartes se résument au diagramme suivant:

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i \left[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu \right]_\star . \tag{1.4.7}$$

Pour résoudre l'équation, on développe les varibles non commutatives ordre par en θ:

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} + ... \tag{1.4.8}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)} + ... \tag{1.4.9}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + ... \tag{1.4.10}$$

Les équations de champ de Jauje $U\left(1\right)$ [6]:

$$\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} - ie \left[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu} \right]_\star = 0. \tag{1.4.11}$$

Avec

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + ie \left[\hat{\lambda}, \hat{A}^\mu \right]_\star . \tag{1.4.12}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ie \left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu \right]_\star . \tag{1.4.13}$$

Utilisant les cartes de Seiberg-Witten $\left(\hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu} \right)$ et le choix $\left(\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} - ie \left[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu} \right]_\star = 0 \right)$, nous pouvous obtenir le potentiel de coulomb déformé suivant

$$\hat{A}_0 = -\frac{e}{r} - \frac{e^3}{r^4} \theta^{0j} x_j + O\left(\theta^2\right). \tag{1.4.14}$$

$$\hat{A}_i = \frac{e^3}{4r^4} \theta^{ij} x_j + O\left(\theta^2\right). \tag{1.4.15}$$

1.5 Le décalage de Bopp " Bopp-shift "

L'algèbre non commutative sur un espace des phases non commutatif peut être écrite comme

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\overline{\theta}_{ij}, \qquad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \tag{1.5.1}$$

Où θ_{ij} est liée à la non commutativité des coordonnées de l'espace alors que $\overline{\theta}_{ij}$ refléte la non commutativité des moments et les deux sont des matrices antisymétriques avec des éléments constants réels.

On peut trouver les opérateurs d'espace-temp non commutatifs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$ en termes des opérateurs ordinaires des positions x_i et d'impulisions p_i en utilisant la transformation suivante:

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j. \tag{1.5.2}$$

$$\hat{p}_i = p_i. \tag{1.5.3}$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= f(x)\, g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1 \cdots\cdots} \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} f_{(x)} \partial_{j_1} \ldots \partial_{j_n} g(x) \\ &= f(x)\, g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} f_{(x)} \widetilde{p}^{i_1} \ldots \widetilde{p}^{i_n} g(x). \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

On a utilisé les relations suivantes:

$$\partial_i = i p_i \qquad \widetilde{p}^i = \theta^{ij} p_j. \tag{1.5.5}$$

On a aussi

$$f(x) = \int dk \widetilde{f}(k)\, e^{ikx} \Rightarrow \partial f(x) = \int dk \widetilde{f}(k)\, (ik)\, e^{ikx}. \tag{1.5.6}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
f(x) * g(x) &= f(x)\, g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} \frac{1}{n!} \int dk \widetilde{f}(k)\, (ik_{i_1}) \ldots (ik_{i_n})\, \widetilde{p}^{i_1} \ldots \widetilde{p}^{i_n} g(x)\, e^{ikx} \\
&= f(x)\, g(x) + \int dk \widetilde{f}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} \frac{1}{n!} (k\widetilde{p})\, q(x)\, e^{ikx} \\
&= f(x)\, g(x) + \int dk \widetilde{f}(k)\, e^{ik\left(x-\frac{\widetilde{p}}{2}\right)} g(x) - \int dk \widetilde{f}(k)\, e^{ikx} g(x) \\
&= \int dk \widetilde{f}(k)\, e^{ik\left(x-\frac{\widetilde{p}}{2}\right)} g(x) \\
&= f\left(x - \frac{\widetilde{p}}{2}\right) g(x) .
\end{aligned}
\tag{1.5.7}
$$

Puisque $\widetilde{p}$ et k commutent.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a montré que pour coder la non commutativité de l'espace-temps nous pouvons utiliser deux méthodes, que ce soit en utilisant un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl ou on doit déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace-temps commutatif.

2

L'equation de Klein-Gordon en présence d'un champ Coulombien dans le cadre de la géométrie non commutative:

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier l'équation de Klein-Gordon non commutative dans un champ coulembien $\left(-\frac{e}{r}\right)$. Avec l'utilisation des applications de Seiberg-Witten pour trouver cette équation aprés on va examiner les niveaux d'énergie du systeme et à la fin de ce chapitre, on va utiliser la théorie des perturbations pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergie au second ordre du paramètre θ.

2.2 L'action

Pour commencer, nous considérons une théorie non commutative des champs d'un scalaire chargé p en présence d'un champ de jauge électrodynamique dans un espace-temps Minkowski.

Nous pouvons écrire l'action sous la forme

$$S = \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} \left(\hat{D}_\mu \hat{\varphi} \right)^\dagger * \hat{D}_\mu \hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi}^\dagger * \hat{\varphi} - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} \right), \tag{2.2.1}$$

Où la dérivée covariante de Jauge est définie comme: $\hat{D}_\mu \hat{\varphi} = \left(\partial_\mu + ie\hat{A}_\mu \right) * \hat{\varphi}$.

Ensuite, nous utilisons les transformations infinitésimales de champ. En faisant varier la densité scalaire sous la transformation de la Jauge et à partir de l'équation du champ et le théorème de Noether, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\varphi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \hat{\varphi}\right)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi}\right)} - \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma \hat{\varphi}\right)} + O\left(\theta^3\right). \tag{2.2.2}$$

Cela signifie que nous allons traiter des solutions des équations de champ non commutatives sans jouer. Pour sela, nous utilisons le équation de champ et le champ générique $\hat{A}_\mu$de sorte que:

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} - ie\hat{A}_\mu \star \hat{\lambda} + ie\hat{\lambda} \star \hat{A}_\mu, \tag{2.2.3}$$

Et les équations de champ libres non commutatives :

$$\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} - ie\left[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu}\right]_\star = 0, \tag{2.2.4}$$

Et le potentiel de coulomb déformé suivant:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= -\frac{e}{r} - \frac{e^3}{r^4}\theta^{0j}x_j + O\left(\theta^2\right), \\ \hat{A}_i &= \frac{e^3}{4r^4}\theta^{ij}x_j + O\left(\theta^2\right), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

avec le champ générique φ de sorte que :

$$\delta_\lambda \hat{\varphi} = i\hat{\lambda} \star \hat{\varphi}. \tag{2.2.6}$$

2.3 L'équation de KG modifiée

L'equation de KG dans un espace-temps non commutatif en présence du vecteur potentiel $\hat{A}_\mu$ peut être dérivée à partir de (2.2.1) et (2.2.2)

$$\begin{gathered} \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\hat{\varphi} + \\ \left(ie\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \hat{A}_\nu - e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu \star \hat{A}_\nu + 2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu\right)\hat{\varphi} = 0. \end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Maintenant, en utilisant le fait que:

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \Delta, \tag{2.3.2}$$

et

$$2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_{\mu}\partial_{\nu} = i\frac{2e^2}{r}\partial_0 - i\frac{2e^6}{20r^5}\left(\theta^{ij}\right)^2\partial_0 - \frac{e^4}{2r^4}\theta.L, \tag{2.3.3}$$

et

$$-e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_{\mu}\star\hat{A}_{\nu} = \frac{e^4}{r^2} - \frac{2e^8}{20r^6}\left(\theta^{ij}\right)^2 - \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2. \tag{2.3.4}$$

Pour démontrer l'equation (**??**), nous suivons les donneés suivantes:

$$-e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_{\mu}\star\hat{A}_{\nu} = -e^2\eta^{\mu\nu}\left[\hat{A}_{\mu}\hat{A}_{\nu} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\hat{A}_{\mu}\partial_{\sigma}\hat{A}_{\nu} - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\hat{A}_{\mu}\partial_{\beta}\partial_{\sigma}\hat{A}_{\nu}\right]. \tag{2.3.5}$$

D'autre part

$$-e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_{\mu}\star\hat{A}_{\nu} = -e^2\eta^{00}\hat{A}_0\star\hat{A}_0 - e^2\eta^{ij}\hat{A}_i\star\hat{A}_j \tag{2.3.6}$$

$$= -e^2\left[\hat{A}_0\hat{A}_0 + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\hat{A}_0\partial_{\sigma}\hat{A}_0 - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\hat{A}_0\partial_{\beta}\partial_{\sigma}\hat{A}_0\right] + e^2\left(\hat{A}_i\star\hat{A}_i\right). \tag{2.3.7}$$

$$e^2\left(\hat{A}_i\star\hat{A}_i\right) = e^2\left[\hat{A}_i^2 + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\hat{A}_i\partial_{\sigma}\hat{A}_i - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\hat{A}_i\partial_{\beta}\partial_{\sigma}\hat{A}_i\right]. \tag{2.3.8}$$

En remplaçant de $\hat{A}_0$ et $\hat{A}_i$ on trouve:

$$-e^2\left[\hat{A}_0\hat{A}_0 + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\hat{A}_0\partial_{\sigma}\hat{A}_0 - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\hat{A}_0\partial_{\beta}\partial_{\sigma}\hat{A}_0\right] = \frac{e^4}{r^2} - \frac{2e^8}{20r^6}\left(\theta^{ij}\right)^2, \tag{2.3.9}$$

$$e^2\left[\hat{A}_i^2 + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\hat{A}_i\partial_{\sigma}\hat{A}_i - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha}\partial_{\rho}\hat{A}_i\partial_{\beta}\partial_{\sigma}\hat{A}_i\right] = \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2. \tag{2.3.10}$$

Où $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Avec $\theta^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$ (ϵ^{ijk} est le Levi est le sympôle de Levi-Civita) .

Alors l'équation de KG (**??**) jusqu'a$O\left(\theta^3\right)$ prend la forme:

$$\left[\begin{array}{c} -\partial_0^2 + \Delta - m_e^2 + \frac{e^4}{r^2} + i\frac{e^2}{r}\partial_0 - \frac{e^4}{2r4}\theta.L \\ -\frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2 - i\frac{4e^6}{20r^5}\theta^2\partial_0 - \frac{4e^8}{20r^6}\theta^2 \end{array}\right]\hat{\varphi} = 0. \tag{2.3.11}$$

La solution de l'équation.(2.3.11) en coordonnées sphériques(r, θ, φ) prend à la forme de trois fonctions séparables.

$$\hat{\varphi}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{r}R(r)\,Y(\theta, \phi)\exp(-iEt). \tag{2.3.12}$$

Alors Eq.(2.3.11) se réduit à l'équation radiale:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{d^2}{dr^2}-\frac{\ell(\ell+1)-e^4}{r^2}+\frac{2Ee^2}{r}+E^2-m_e^2 \\ -\frac{e^4}{2r^4}\theta.L-\frac{e^6}{5r^5}E\theta^2-\frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2-\frac{e^8}{5r^6}\theta^2 \end{array}\right]R\left(r\right)=0. \tag{2.3.13}$$

Dans l'Eq. (2.3.13) le potentiel de Coulomb dans l'espace non-commutatif apparaît dans les termes de perturbation:

$$-\frac{e^4}{2r^4}\theta.L-\frac{e^6}{5r^5}E\ \theta^2-\frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2-\frac{e^8}{5r^6}\theta^2. \tag{2.3.14}$$

Le premier terme est obtenu dans les Refs.(2.2.3) et (2.2.5), alors que le deuxieme, troiséme et le dernier terme sont des nouvelles corrections, et sont obtenues à partir des applications de Seiberg -Witten au deuxième ordre, et induire de nouvelles separations dans l'état 1S, dont le paramètre non-commutatif θ^2 joue le rôle du spin.

2.4 La solution de l'équation de K-G ordinaire:

Equation (2.3.13) n'a pas encore été résolue exactement en présence de la perturbation terme (2.3.14), alors qu'en leur absence, sa solution exacte est dans Réfs.(2.2.5).

Pour obtenir la solution que nous choisissons $\theta=0$ et on écrit

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\ell\left(\ell+1\right)-e^4}{r^2}+\frac{2Ee^2}{r}+E^2-m_e^2\right]R\left(r\right)=0. \tag{2.4.1}$$

Cette équation est une équation généralisée de type Hypergéométrique,

$$R^{''}+\frac{\tilde{\tau}\left(r\right)}{\sigma\left(r\right)}R^{'}+\frac{\tilde{\sigma}\left(r\right)}{\sigma^2\left(r\right)}R=0, \tag{2.4.2}$$

Où

$$\sigma\left(r\right)=r,\tilde{\tau}=0,\tilde{\sigma}=\left(Er+e^2\right)^2-r^2m_e^2-\ell\left(\ell+1\right). \tag{2.4.3}$$

En utilisiant la transformation

$$R\left(r\right)=\phi\left(r\right)y\left(r\right). \tag{2.4.4}$$

Eq.(2.4.1) se réduit à une éqution de type Hypergéométrique,

$$\sigma\left(r\right)y^{''}+\tau\left(r\right)y^{'}+\lambda y=0, \tag{2.4.5}$$

On obtient

$$E = E^0_{n,\ell} = \frac{m_e\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right)}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \alpha = e^2. \tag{2.4.6}$$

La fonction propre $y\left(r\right)$ dans l'équation.(2.4.5) est de type hypergéométrique dont les solutions polynomiales sont données par la formules de Rodriques

$$y_n\left(r\right) = \frac{B_{n\ell}}{r^2\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2 e^{-2\sqrt{m_e^2-E^2 r}}}}\frac{d^n}{dr^n}\left(r^{n+2\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}}e^{-2\sqrt{m_e^2-E^2 r}}\right), \tag{2.4.7}$$

Où $B_{n\ell}$ est une constente de normalisation.ceci coinerde avec les polynômes de Laguerre pour $x = 2\sqrt{m_e^2-E^2}r$, les fonctions radiales sont écrites comme

$$R\left(r\right) = R_{n\ell}\left(r\right) = C_{n\ell}x^{\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{2\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}}\left(x\right), \tag{2.4.8}$$

Où $C_{n\ell}$ est la constante de normalisation déterminée par $\int\limits_0^{+\infty} R^2_{n\ell}\left(r\right)dr = 1$. Ainsi, les fonctions radiales normalisées correspondantes sont données:

$$R_{n\ell}\left(r\right) = \sqrt{\frac{a}{n+\nu+1}}\left(\frac{n!}{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\nu+1}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{2\nu+1}\left(x\right), \tag{2.4.9}$$

avec

$$\nu = -\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}, \tag{2.4.10}$$

et $a = \sqrt{m_e^2-E^2}$.

2.5 Les corresctions d'énergie

Maintenant, pour obtenir les modifications des niveaux d'energie pour les termes (2.3.14) non-commutatifs, nous utilisons la théorie des perturbations.

Pour simplifier, on prend $\theta_3 = \theta$ et on suppose que les autres composantes sont toutes nulles, tel que:

$$\theta.L = \theta L_z, \text{ et } \left(\theta^{ij}x_j\right)^2 = \theta^2\left[\left(r^2-z^2\right)-2xy\right], \tag{2.5.1}$$

nous utilisons

$$\langle n\ell m\left|L_z\right|n\ell m'\rangle = m_\ell\delta_{mm'}, -\ell \prec m_\ell \prec \ell. \tag{2.5.2}$$

Et aussi le fait que dans la théorie des perturbations de premier ordre les valeurs de $1/r^4$, $1/r^5$ et $1/r^6$ par rapport à la solution exacte.(**??**), sont données par

$$\left\langle n\ell m\left|r^{-k}\right|n\ell m'\right\rangle = \int\limits_0^\infty R_{n\ell}^2 r^{-k} dr\delta_{mm'}$$

$$= \frac{2^k a^k n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)} \times \int\limits_0^\infty x^{2\nu+2-k}e^{-x}\left[L_n^{2\nu+1}\left(x\right)\right]^2 dx\delta_{mm'}$$

$$= f\left(k\right);\left(k=3,4,5,6\right). \tag{2.5.3}$$

Nous utilisons la relation entre la fonction Hypergéometrique confluent $F\left(-n;\nu+1;x\right)$ est les polynômes de Laguerre associés $L_n^\nu\left(x\right)$, à savoir

$$L_n^\nu\left(x\right) = \frac{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(\nu+1\right)}F\left(-n;\nu+1;x\right); \int\limits_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}\left[F\left(-n;\gamma;x\right)\right]^2 dx, \tag{2.5.4}$$

$$= \tfrac{n!\Gamma(\nu)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\left\{1+\tfrac{n(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)}{1^2\gamma}+\tfrac{n(n-1)(\gamma-\nu-2)(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)(\gamma-\nu+1)}{1^2 2^2\gamma(\gamma+1)}\right.$$
$$\left.+...+\tfrac{n(n-1)...1(\gamma-\nu-n)...(\gamma-\nu+n-1)}{1^2 2^2 n^2\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\right\}. \tag{2.5.5}$$

Equation (2.5.3) devient

$$\left\langle n\ell m\left|r^{-4}\right|n\ell m'\right\rangle = \int\limits_0^\infty R_{n\ell}^2\left(r\right)r^{-4}dr\delta_{mm'}$$

$$= \tfrac{16a^4 n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \times \int\limits_0^\infty x^{2\nu-1-1}e^{-x}\left[L_n^{2\nu+1}\left(x\right)\right]^2 dx\delta_{mm'} \tag{2.5.6}$$

$$= \tfrac{8a^4 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\left[\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right]^2$$

$$\times \int\limits_0^\infty x^{2\nu-2}e^{-x}\left[F\left(-n;2\nu+2;x\right)\right]^2 dx\delta_{mm'}$$
$$= \tfrac{4a^4}{(2\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)} \times \left[1+\tfrac{3n}{(\nu+1)}+\tfrac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right]\delta_{mm'} = f\left(4\right), \tag{2.5.7}$$

$$\left\langle n\ell m \left| r^{-5} \right| n\ell m' \right\rangle = \tfrac{4a^5}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(n+\nu+1)}$$
$$\times \left[1 + \tfrac{6n}{(\nu+1)} + \tfrac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)} + \tfrac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right] \delta_{mm'} = f\,(5)\,, \tag{2.5.8}$$

$$\left\langle n\ell m \left| r^{-6} \right| n\ell m' \right\rangle = \tfrac{4a^5}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)} \left[1 + \tfrac{6n}{(\nu+1)} + \tfrac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right.$$
$$\left. + \tfrac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)} + \tfrac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)} + \tfrac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right] \delta_{mm'} = f\,(5)\,. \tag{2.5.9}$$

Alors les corrections d'énergie sont:

$$\Delta E^{nc} = -\frac{\alpha^2 m_\ell}{2} f\ \ (4)\,\theta - \frac{\alpha^3}{5}\left(E^0_{n,\ell} f\ \ (5) + \frac{29}{24}\alpha f\ \ (6)\right)\theta^2. \tag{2.5.10}$$

Le changement d'energie est dû aux termes(2.3.14). En plus, le premier terme d'ordre θ multiplie par le nombre quantique magnétique indique la séparation des états avec le même moment angulaire orbital dans les composantes correspandantes. Ce comportement est similaire à l'effet Zeeman sans spin. Le reste des termes du second ordre θ sont indépendants du nombre quantique mgnétique ce qui reflète clairement l'existence de spin. Alors il est bien de noter que les termes de corrections contenant θ^2 sont trés similaire au couplage spin-spin,donc le paramètre non-commutatif θ joue le rôle du spin et donc la dégénérescence des niveaux est complétement enlevée. Les niveaux d'energie de l'atome d'Hydrogène dans le cadre de la non-commutativité est :

$$\hat{E} = E^0_{n,\ell} - \frac{\alpha^2 m_\ell}{2} f\,(4)\,\theta - \frac{\alpha^3}{5}\left(E^0_{n,\ell} f\,(5) + \frac{29}{24}\alpha f\,(6)\right)\theta^2. \tag{2.5.11}$$

2.6 Conclusion

En utilisant les applications de Seiberg-Witten et le produit star de Moyal, on a dérivé l'équation de KG modifiée en présence d'un champ coulombien et en utilisant la théorie des perturbations, on a trouvé les corrections de l'énergie jusqu'au deuxième ordre de θ.

La dégénérescence est complètement enlevée car l'énergie dépend de m_ℓ.

3

L'éqution de Dirac dans la Gravité Jaugée dans l'espace Non Commutative cadré de De Sitter

3.1 Introduction

C'est un différent de formuler une théorie de la gravitation sur une variété non commutative. Le principal problème réside dans le fait qu'il est difficile de mettre en œuvre des symétries telles que la covariance de coordonnées générales et invariance de Lorentz locale, et pour définir des dérivées sans torsion et satisfaire à la condition de métricité pour obtenir des théories de jauge locales non commutatives dans un espace-temps plat avec une symétrie de Lorentz [[14]], une formulation dans l'approche de l'algèbre enveloppante a été proposée [15]. En suivant un chemin similaire, une formulation de jauge de gravité est proposée [16] c'est une théorie de la relativité générale sur un espace-temps courbé avec conservation canonique des relations de commutation espace-temps non commutatives, et elle est partiellement basée sur des symétries sur un espace-temps plat non-commutatif. La théorie qui en résulte semble être une extension non-commutative de la théorie unimodulaire de la gravitation.

Le but de cet chapitre est d'obtenir des transformations de Lorentz et des coordonnées générales généralisées de l'espace-temps non-commutatif, qui sont des symétries exactes des relations de commutation spatio-temporelles canoniques non commutatives sans contraintes comme l'unimodularité. En tant qu'application, nous dérivons une équation de Dirac modifiée et nous montrons que la non-commutativité spatio-temporelle joue le rôle d'un champ magnétique.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 3, nous présentons notre formalisme et en déduisons l'équation de Dirac généralisée, et nous obtenons les solutions de cette éqution en présence d'un champ gravitationnel de l'espace de de-Sitter.

3.2 L'équation de Dirac généralisée

Dans le cadre général d'une géométrie spatio-temporelle non-commutative et sous une variation infinitésimale pour les applications de Seiberg-Witten d'un champ dynamique $\hat{\varphi}^A$, on peut écrire:

$$\hat{\delta}\hat{\varphi}^A = \hat{\lambda} * \hat{G}^A + \partial_\mu \hat{\lambda} * \hat{T}^{A\mu}. \tag{3.2.1}$$

De plus, la densité scalaire $\mathcal{L}$ est une fonction des champs et de leurs première et seconde dérivées, c'est-à-dire

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\hat{\varphi}^A, \partial_\mu \hat{\varphi}^A, \partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi}^A\right) + O\left(\theta^2\right), \tag{3.2.2}$$

Et ainsi la variation de la densité scalaire sous la transformation de jauge infinitésimale dans l'équation (3.2.1) se lit comme suit:

$$\hat{\delta}\mathcal{L} = \hat{\delta}\hat{\varphi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\varphi}^A} + \hat{\delta}\left(\partial_\mu \hat{\varphi}^A\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \hat{\varphi}^A\right)} + \hat{\delta}\left(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi}^A\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi}^A\right)} + O\left(\theta^2\right). \tag{3.2.3}$$

On peut voir que mettre la variation de l'action à zéro conduit aux équations de champ modifiées [?]:

$$\frac{\hat{\delta}\mathcal{L}}{\hat{\delta}\hat{\varphi}^A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\varphi}^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \hat{\varphi}^A\right)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi}^A\right)} + O\left(\theta^2\right) = 0. \tag{3.2.4}$$

3.3 L'action dans un espace-temps courbé non commutatif

Pour l'action non-commutative dans un espace-temps courbé non-commutatif, où la gravité est traitée comme une théorie de jauge, nous proposons l'action suivante:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \left(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M\right), \tag{3.3.1}$$

Où $\mathcal{L}_G$ et $\mathcal{L}_M$ sont respectivement les densités pures de la gravité et de la matière dans l'espace-temps courbé non-commutatif, et sont données dans les coordonnées par

$$\mathcal{L}_G = \hat{e} * \hat{R}, \tag{3.3.2}$$

$$\mathcal{L}_M = \hat{e} * \hat{\bar{\Psi}} * \hat{\gamma}^{\mu} * \hat{D}_{\mu} * \hat{\Psi}, \tag{3.3.3}$$

$$\hat{e} = \det * \left(\hat{e}^a_{\mu}\right) \equiv \frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abcd}\hat{e}^a_{\mu} * \hat{e}^b_{\nu} * \hat{e}^c_{\rho} * \hat{e}^d_{\sigma}, \tag{3.3.4}$$

$$\hat{R} = \hat{e}^{\mu}_{*a} * \hat{e}^{\nu}_{*b} * \hat{R}^{ab}_{\mu\nu}. \tag{3.3.5}$$

Dans ce qui suit, nous considérons une métrique symétrique $\hat{g}_{\mu\nu}$ tel que

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\hat{e}^b_{\mu} * \hat{e}_{\nu b} + \hat{e}^b_{\nu} * \hat{e}_{\mu b}\right). \tag{3.3.6}$$

En conséquence, l'expansion du première ordre dans le paramètre non-commutatif $\theta^{\alpha\beta}$ de la courbure scalaire $\hat{R}$ s'annule (par opposition au second ordre et plus haut).

3.4 L'equation de Dirac généralisée et processus de création des particules

Au cours des dernières années, un grand effort a été fait pour comprendre les processus quantiques dans les champs forts, où l'instabilité du vide associée conduit à une source supplémentaire de processus quantiques et pourrait améliorer le mécanisme de création de particules et produire des écarts par rapport au spectre thermique.Un scénario intéressant pour discuter du processus de création de particules est la version non commutative de l'univers de Sitter à deux dimensions (2D). Dans la limite $\theta\Lambda^2 \ll 1$, la métrique est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}dx^2, \tag{3.4.1}$$

Qui est le même que l'univers classique (1 + 1) D de de Sitter.

En ce qui concerne l'équation de Dirac dans un espace-temps non commutatif courbé, nous utilisons les équations de champ modifiées dans l'équation (3.2.3), avec le champ générique $\hat{\Psi}$tel que

$$\hat{\delta}\hat{\Psi} = \left(\hat{\xi}^a \partial_a + \hat{\lambda}_L\right) * \hat{\Psi}. \tag{3.4.2}$$

L'équation de Dirac écrit comme suit

$$\begin{array}{c} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m)\,\Psi \\ -\dfrac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} (\partial_\alpha \gamma^\mu)(\partial_\mu \partial_\beta \Psi) - \partial_\alpha (\gamma^\mu \Gamma_\mu)(\partial_\beta \Psi) \\ -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha (\ln\sqrt{-g})\,\partial_\beta [(i\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m)] \end{bmatrix} \Psi = 0. \end{array} \tag{3.4.3}$$

Γ_μ : connection de spin est

$$\Gamma_\lambda = \frac{-1}{4}\hat{g}_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} S^{\mu\nu}, \tag{3.4.4}$$

et

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \ldots\ldots\ldots\ldots\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{2Ht} \end{pmatrix}, \tag{3.4.5}$$

ensuite, après le calcul, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0\lambda} &= 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma^0_{\lambda 0} = 0 \ldots\forall\lambda, && (3.4.6)\\ \Gamma^0_{11} &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} = He^{2Ht}, && (3.4.7)\\ \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} = H, && (3.4.8) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{-1}{4}\hat{g}_{\mu 1}\Gamma^1_{10} S^{\mu 1} = 0, && (3.4.9)\\ \Gamma_1 &= \frac{-1}{4}\hat{g}_{\mu 1}\Gamma^1_{01} S^{\mu 0} + \frac{-1}{4}\hat{g}_{00}\Gamma^0_{11} S^{\mu 00} = \frac{-1}{4}\hat{g}_{11}\Gamma^1_{01} S^{10} = \frac{-1}{4}He^{2Ht} S^{10}, && (3.4.10)\\ S^{10} &= \frac{1}{2}\left[\gamma^1, \gamma^0\right] = \frac{1}{2}\left(\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1\right), \left[\gamma^0, \gamma^1\right]_* = 2g^{01} = 0 \Rightarrow S^{10} = \frac{2}{2}\gamma^1\gamma^0, && (3.4.11)\\ &\Rightarrow \Gamma_1 = \frac{-1}{4}He^{2Ht}\gamma^1\gamma^0. && (3.4.12) \end{aligned}$$

γ c'est une matrice (dans un espace courbé).Et $\gamma^\mu = e^\mu_a \tilde{\gamma}^a$ (espace plant), alors que $e^\mu_a = \sqrt{g^{\mu\nu}}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{-1}{4}He^{2Ht}\gamma^1\gamma^0 = \frac{-1}{4}He^{Ht}\sigma^3, && (3.4.13)\\ &\rightarrow \gamma^1 = e^1_a\tilde{\gamma}^a = e^1_0\tilde{\gamma}^0 + e^1_1\tilde{\gamma}^1 = e^{-Ht}\sigma^3. && (3.4.14) \end{aligned}$$

Avec $\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 = i\sigma^3$et $\tilde{\gamma}^1 = \sigma^1$. où σ^1 et σ^3 sont les matrices de Pauli.

En substituant les eqs. (3.4.6); (3.4.7); (3.4.8), (3.4.12),(3.4.14),(3.4.13),(**??**),(3.4.9),dans l'éq de Dirac modiféé (3.4.3), Nous trouvons que

$$\left(i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu}\right)-m\right)\hat{\Psi}=\left[-\sigma^{3}\partial_{0}+i\sigma^{1}\partial_{1}\frac{-1}{4}He^{Ht}\sigma^{3}-m\right]\hat{\Psi}, \tag{3.4.15}$$

$$-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\left[\left(\partial_{\alpha}\gamma^{\mu}\right)\left(\partial_{\mu}\partial_{\beta}\hat{\Psi}\right)\right]=-\frac{1}{2}\theta^{01}\left(-He^{-Ht}\sigma^{3}\right)\partial_{1}^{2}\hat{\Psi}, \tag{3.4.16}$$

$$\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\gamma^{\mu}\Gamma_{\mu}\right)\left(\partial_{\beta}\hat{\Psi}\right)=0, \tag{3.4.17}$$

et

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\ln\sqrt{-g}\right)\partial_{\beta}\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu}\right)-m\right]\hat{\Psi}=\left[\frac{1}{2}\theta\partial_{0}\left(Ht\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\theta H\left(-\sigma^{3}\partial_{0}+i\sigma^{1}\partial_{1}-\frac{1}{4}He^{Ht}\sigma^{3}-m\right)\partial_{1}\right]\hat{\Psi},\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

et

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\left[-\sigma^{3}\partial_{0}+i\sigma^{1}\partial_{1}\frac{-1}{4}He^{Ht}\sigma^{3}-m-\frac{1}{2}\theta^{01}\left(-He^{-Ht}\sigma^{3}\right)\partial_{1}^{2}\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\theta H\left(-\sigma^{3}\partial_{0}+i\sigma^{1}\partial_{1}-\frac{1}{4}He^{Ht}\sigma^{3}-m\right)\partial_{1}+\frac{1}{2}\theta\partial_{0}\left(Ht\right)\right]\hat{\Psi}=0.\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

En utilisant le temps conforme η défini comme

$$\eta=-\frac{1}{H}e^{-Ht}, \tag{3.4.20}$$

alors l'équation de Dirac modifiée se réduit (jusqu'à $O\left(\theta^{2}\right)$)

$$\left\{iH\eta\sigma^{3}\partial_{\eta}+\left(H\eta\sigma^{1}+\frac{i}{2}\theta Hm\right)\tilde{\partial}_{1}+\frac{i}{2}\theta H^{2}\eta\sigma^{1}\tilde{\partial}_{1}^{2}+i\left(\frac{H}{2}\sigma^{3}+im\right)\right\}\hat{\Psi}=0. \tag{3.4.21}$$

$$\Rightarrow\left\{iH\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma^{3}+\left(ik_{x}H\eta\sigma^{1}-\frac{k_{x}}{2}\theta Hm\right)-\frac{i}{2}\theta H^{2}k_{x}^{2}\eta\sigma^{1}+i\left(\frac{H}{2}\sigma^{3}+im\right)\right\}\hat{\Psi}=0, \tag{3.4.22}$$

en multipliant l'équation(3.4.22) par σ^3

$$\left\{iH\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-k_{x}H\eta\sigma^{2}-\frac{k_{x}}{2}\theta Hm\sigma^{3}+\frac{\theta}{2}H^{2}k_{x}^{2}\eta\sigma^{2}+i\frac{H}{2}-m\sigma^{3}\right\}\hat{\Psi}=0. \tag{3.4.23}$$

Si nous faisons la transformation

$$\hat{\Psi} = \eta^{-1/2} e^{ik_x x} \hat{\varphi}, \tag{3.4.24}$$

nous trouvons que l'équation (3.4.23) prend la forme

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-i}{2} H\eta^{-1/2}\hat{\varphi} + iH\eta^{1/2}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta} - k_x H\eta^{1/2}\sigma^2\hat{\varphi} - \frac{k_x}{2}\theta Hm\eta^{-1/2}\sigma^3\hat{\varphi} \\ +\frac{\theta}{2}H^2k_x^2\eta^{1/2}\sigma^2\hat{\varphi} + \frac{i}{2}H\eta^{-1/2}\hat{\varphi} - m\sigma^3\eta^{-1/2}\hat{\varphi} \end{array} \right] = 0, \tag{3.4.25}$$

avec

$$\hat{\varphi} = \binom{\phi_1}{\phi_2}. \tag{3.4.26}$$

Dans ce cas on peut écrire

$$\Rightarrow \left\{ iH\eta^{1/2}\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\eta} - k_x H\eta^{1/2}\hat{\varphi}_2 - \frac{k_x}{2}\theta Hm\eta^{-1/2}\hat{\varphi}_1 + \frac{\theta}{2}H^2k_x^2\eta^{1/2}\hat{\varphi}_2 - m\eta^{-1/2}\hat{\varphi}_1 \right\} = 0, \tag{3.4.27}$$

$$\text{et} \; \left\{ iH\eta^{1/2}\frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial\eta} + k_x H\eta^{1/2}\hat{\varphi}_1 + \frac{k_x}{2}\theta Hm\eta^{-1/2}\hat{\varphi}_2 - \frac{\theta}{2}H^2k_x^2\eta^{1/2}\hat{\varphi}_1 + m\eta^{-1/2}\hat{\varphi}_2 \right\} = 0. \tag{3.4.28}$$

Alors

$$\Rightarrow \left\{ iH\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\eta} - \frac{m}{\eta}\left(1 + \frac{\theta}{2}k_x H\right)\hat{\varphi}_1 - k_x H\left(1 - \frac{\theta}{2}Hk_x\right)\hat{\varphi}_2 \right\} = 0..........(1), \tag{3.4.29}$$

$$\left\{ iH\frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial\eta} + \frac{m}{\eta}\left(1 + \frac{\theta}{2}k_x H\right)\hat{\varphi}_2 + k_x H\left(1 - \frac{\theta}{2}Hk_x\right)\hat{\varphi}_1 \right\} = 0..........(2). \tag{3.4.30}$$

Divisons les équations (3.4.29) et (3.4.30) par iH

$$\left\{ \frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial\eta} + \frac{im}{\eta H}\left(1 + \frac{\theta}{2}k_x H\right)\hat{\varphi}_1 + ik_x\left(1 - \frac{\theta}{2}Hk_x\right)\hat{\varphi}_2 \right\} = 0..........(1), \tag{3.4.31}$$

$$\left\{ \frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial\eta} - i\frac{m}{\eta H}\left(1 + \frac{\theta}{2}k_x H\right)\hat{\varphi}_2 - ik_x\left(1 - \frac{\theta}{2}Hk_x\right)\hat{\varphi}_1 \right\} = 0..........(2). \tag{3.4.32}$$

Où

$$\tilde{m} = m\left(1 + \frac{1}{2}\theta Hk_x\right), \tag{3.4.33}$$

et

$$\tilde{k}_x = k_x \left(1 - \frac{1}{2}\theta H k_x\right). \tag{3.4.34}$$

Qui peut être représente par le système de deux équations différentielles de premier ordre:

$$\left(\frac{d}{d\eta} + i\frac{\tilde{m}}{H\eta}\right)\phi_1 + \tilde{k}_x\phi_2 = 0.............(1), \tag{3.4.35}$$

$$\left(\frac{d}{d\eta} - i\frac{\tilde{m}}{H\eta}\right)\phi_2 - \tilde{k}_x\phi_1 = 0..............(2), \tag{3.4.36}$$

en utilisant les équations (3.4.35) et (3.4.36) et le changement de variable:

$$\rho = \tilde{k}_x\eta. \tag{3.4.37}$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\rho} = \hat{k}_x\frac{\partial}{\partial\rho}, \tag{3.4.38}$$

En substituant la relation (3.4.38) dans (3.4.35) et (3.4.36) nous trouvons

$$\left[\hat{k}_x\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\hat{m}}{H}\hat{k}_x\frac{1}{\rho}\right]\phi_1 + \tilde{k}_x\phi_2 = 0...........(1), \tag{3.4.39}$$

et

$$\left[\hat{k}_x\frac{\partial}{\partial\rho} - i\frac{\hat{m}}{H}\hat{k}_x\frac{1}{\rho}\right]\phi_2 - \tilde{k}_x\phi_1 = 0.............(2). \tag{3.4.40}$$

Donc

$$(1) \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\right]\phi_1 + \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = -\left[\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\right]\phi_1, \tag{3.4.41}$$

et

$$(2) \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial\rho} - i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\right]\phi_2 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial\rho} - i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\right]\phi_{2.} \tag{3.4.42}$$

Ainsi que les transformations:

$$\phi_{1,2}(\rho) = \pm\rho^{1/2}Z_{1,2}(\rho), \tag{3.4.43}$$

donc

$$(1) \Rightarrow \phi_2 = -\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1/2}Z_1(\rho)\right) + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\left(\rho^{1/2}Z_1(\rho)\right)\right], \tag{3.4.44}$$

et

$$(2) \Rightarrow \phi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho^{1/2}Z_2(\rho)\right) - i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\left(-\rho^{1/2}Z_2(\rho)\right)\right]. \tag{3.4.45}$$

Donc

$$(1) \Rightarrow \phi_2(\rho) = -\left[\frac{1}{2}\rho^{-1/2} Z_1(\rho) + \rho^{1/2}\frac{\partial}{\partial\rho} Z_1(\rho) + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\left(\rho^{1/2} Z_1(\rho)\right)\right], \tag{3.4.46}$$

$$(2) \Rightarrow \phi_1(\rho) = \left[-\frac{1}{2}\rho^{-1/2} Z_2(\rho) - \rho^{1/2}\frac{\partial}{\partial\rho} Z_2(\rho) + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\left(-\rho^{1/2} Z_2(\rho)\right)\right], \tag{3.4.47}$$

on peut écrire aussi que:

$$\begin{aligned} \phi_2(\rho) &= -\rho^{1/2}\left[\frac{1}{2}\rho^{-1} Z_1(\rho) + \frac{\partial}{\partial\rho} Z_1(\rho) + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho} Z_1(\rho)\right], \\ \Rightarrow \phi_2(\rho) &= -\rho^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho} Z_1(\rho) + \left(\frac{1}{2}\rho^{-1} + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho}\right) Z_1(\rho)\right]. \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Et

$$\phi_1(\rho) = \rho^{1/2}\left[-\frac{1}{2}\rho^{-1} Z_2(\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho} Z_2(\rho) + i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho} Z_2(\rho)\right], \tag{3.4.49}$$

$$\Rightarrow \phi_1(\rho) = \rho^{1/2}\left[-\frac{\partial}{\partial\rho} Z_2(\rho) + \left(i\frac{\hat{m}}{H}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\rho^{-1}\right) Z_2(\rho)\right], \tag{3.4.50}$$

nous obtenons l'équation du second ordre suivante:

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left[1 - \frac{(1/4 - \Omega_{1,2})}{\rho^2}\right]\right\} Z_{1,2} = 0. \tag{3.4.51}$$

Où

$$\Omega_{1,2} = \frac{\tilde{m}^2}{H^2} \mp i\frac{\tilde{m}}{H}. \tag{3.4.52}$$

L'équation (3.4.51) est une forme d'équation de Henkel et sa solution est connue.

3.5 Conclusion

Utilisant les champs de Seiberg-Witten et le produit Moyal, nous avons généralisé.l'équation de Dirac. Nous avons résolu sette équation et nous avons montré que ces solution coincident avec celle de Dirac en présence d'un champ électrique. Nous avons montré que la non-commutativité joue le même rôle que le champ électrique qui contribue au processus de la crérion des particules ou la gravité pour le processus de création de particules. Nous avons obtenu une distribution de type Fermi-Dirac avec un potentiel chimique proportionnel au θ parametre de non-commutativité.

4

L'équation de Klein-Gordon dans un espace de anti de sitter

4.1 Introdution

L'espace de Anti-de Sitter $AdS_{d+1}\,(d \geq 2)$ est la solution maximalement symétrique aux équations du vide d'Einstein avec une constante cosmologique négative $\Lambda \prec 0$.

Il est défini comme l'hypersurface dans R^{d+2} avec l'élément de ligne

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_1^2 + \sum_{i=2}^{d+1} dX_i^2, \tag{4.1.1}$$

donné par la relation

$$-dX_0^2 - dX_1^2 + \sum_{i=2}^{d+1} dX_i^2 = -\ell^2, \qquad \ell = \frac{d\,(d-1)}{\Lambda}. \tag{4.1.2}$$

L'espace-temps Anti-de-Sitter n'est pas globalement hyperbolique: il possède une limite temporelle à l'infini spatial.

4.2 L'équation de KG modifiéé dans un espace de Anti de Sitter

L'équation de KG dans un espace-temps courbe non-commutatif dans les coordonnées (en l'absence du potentiel vecteur $\hat{A}_\mu$) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
&\left(-g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_\nu+m^2\right)\hat{\varphi}\\
&-\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\partial_\mu\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta g^{\mu\nu}\partial_\nu\hat{\varphi}\right)+\frac{1}{8\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\rho\sigma}\partial_\mu\\
&\times\left[\left(\partial_\alpha\partial_\rho\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_\beta\partial_\sigma\partial_\nu\hat{\varphi}+\partial_\rho\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta g^{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\nu\hat{\varphi}\right)\right.\\
&\left.+\left(\partial_\alpha\partial_\rho\sqrt{-g}\partial_\beta\partial_\sigma g^{\mu\nu}\partial_\nu\hat{\varphi}\right)\right]+\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\partial_\mu\\
&\times\left(\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_\beta\partial_\nu\hat{\varphi}\right)+m^2\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\\
&\times\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta\hat{\varphi}+\frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\alpha\partial_\rho\sqrt{-g}\partial_\beta\partial_\sigma\hat{\varphi}\right)=0. \qquad (4.2.1)
\end{aligned}$$

On considère un espace-temps de anti de sitter à (2+1) dimensions défini par la métrique.

Avec Λ est la constante cosmologique.

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\left(1+\Lambda\rho^2\right) & 0 & 0\\ 0 & -\left(1+\Lambda\rho^2\right)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & -\rho^2\end{pmatrix}, \text{et } \sqrt{-g}=\rho. \qquad (4.2.2)$$

Et

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\left(1+\Lambda\rho^2\right)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & -\left(1+\Lambda\rho^2\right) & 0\\ 0 & 0 & -\rho^{-2}\end{pmatrix}. \qquad (4.2.3)$$

On a $\left(x^0=t\right),\left(x^1=\rho\right)$ et $\left(x^2=\theta\right)$.

Maintenant calculons l'équation (4.2.1) dans l'espace de Anti de-Sitter:

$$\begin{aligned}
\left(-g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\right)\hat{\varphi} &= -g^{00}\partial_0^2-g^{11}\partial_1^2-g^{22}\partial_2^2 \qquad (4.2.4)\\
&= \left[-\left(1+\Lambda\rho^2\right)^{-1}\partial_0^2-\left(1+\Lambda\rho^2\right)\partial_1^2-\rho^{-2}\partial_2^2\right]\hat{\varphi}. \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_\nu+m^2\right)\hat{\varphi} &= -\frac{1}{\rho}\left[\left(\partial_0\left(\rho g^{00}\right)\partial_0\right)+\left(\partial_1\left(\rho g^{11}\right)\partial_1\right)\right.\\
&\left.+\left(\partial_2\left(\rho g^{22}\right)\partial_2\right)+m^2\right]\hat{\varphi}. \qquad (4.2.6)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\partial_\mu\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta g^{\mu\nu}\partial_\nu\hat{\varphi}\right) &= -\frac{i}{2\rho}\theta^{12}\left[\partial_0\left(\partial_1\rho\partial_2 g^{00}\partial_0\right)\right.\\
&\left.+\partial_1\left(\partial_1\rho\partial_2 g^{11}\partial_1\right)+\partial_2\left(\partial_1\rho\partial_2 g^{22}\partial_2\right)\right]\hat{\varphi}. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

Et

$$\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\partial_\mu\left(\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_\beta\partial_\nu\hat{\varphi}\right)=\frac{i}{2\rho}\theta^{12}\left[\partial_0\left(\partial_1\left(\rho g^{00}\right)\partial_2\partial_0\right)\right.$$
$$\left.+\partial_1\left(\partial_1\left(\rho g^{11}\right)\partial_2\partial_1\right)+\partial_2\left(\partial_1\left(\rho g^{22}\right)\partial_2\partial_2\right)\right]\hat{\varphi}. \tag{4.2.8}$$

Et

$$m^2\frac{i}{2\sqrt{-g}}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\partial_\beta\hat{\varphi}\right)=m^2\frac{i}{2\rho}\theta^{12}\left(\partial_1\rho\partial_2\hat{\varphi}\right). \tag{4.2.9}$$

Avec

$$\theta^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & -\alpha & 0\\ \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.2.10}$$

L'équation (4.2.1) devient comme suit

$$\left[-\left(1-\Lambda\rho^2\right)^{-1}\partial_0^2-\left(1-\Lambda\rho^2\right)^{-1}\partial_1^2-\rho^{-2}\partial_2^2+m^2+\frac{1}{\rho}\partial_1+3\Lambda\rho\partial_1\right.$$
$$\left.-\frac{i}{2\rho}\theta\left(\partial_2\partial_0^2-6\Lambda\rho\partial_2\partial_1+\partial_2^2\right)+\frac{i}{2\rho}\theta\left(\partial_1^2-m^2\partial_2\right)\right]\hat{\varphi}=0. \tag{4.2.11}$$

Où

$$\hat{\varphi}=e^{-iEt}e^{ik\theta}. \tag{4.2.12}$$

On multiplie l'équation (4.2.11) par $(1-\Lambda\rho^2)$, et on obtient

$$\left[E^2-\left(1+\Lambda\rho^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{k^2}{\rho^2}\left(1+\Lambda\rho^2\right)+m^2\left(1-\Lambda\rho^2\right)\right.$$
$$+\left(\frac{\left(1-\Lambda\rho^2\right)}{\rho}+3\Lambda\rho\left(1-\Lambda\rho^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial\rho}$$
$$\left.-\frac{i\alpha}{2\rho}\left(1+\Lambda\rho^2\right)\left(-ikE^2-i6\Lambda\rho k\frac{\partial}{\partial\rho}-ik^3\right)+\frac{i\alpha}{2\rho}\left(1+\Lambda\rho^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-im^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right]\hat{\phi}=0. \tag{4.2.13}$$

On pose le changement de la variable

$$P=\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}aractg\left(\sqrt{\Lambda}\rho\right). \tag{4.2.14}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho} &= \frac{\partial P}{\partial\rho}.\frac{\partial}{\partial P} = \left(1+\Lambda\rho^2\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial P}, &(4.2.15)\\ \text{avec } \Lambda\rho^2 &= tg^2\left(\sqrt{\Lambda}P\right),\ \text{et } \sqrt{\Lambda}\rho = tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right). &(4.2.16)\end{aligned}$$

Et

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = \frac{-2\Lambda\rho}{\left(1+\Lambda\rho^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{\left(1+\Lambda\rho^2\right)}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{\partial^2}{\partial P^2}. \tag{4.2.17}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \left[\left(1-\frac{i\alpha\sqrt{\Lambda}\cos^2\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}{2tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}\right)\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \left(\frac{5\Lambda tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{\sqrt{\Lambda}}{tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)} + 3i\alpha\Lambda k + \frac{m^2\alpha\sqrt{\Lambda}}{2tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)} - i\alpha\Lambda\right)\frac{\partial}{\partial P}\right.\\ &\left.+\left(\frac{k^{2\Lambda}}{tg^2\left(\sqrt{\Lambda}P\right)} - \frac{\alpha\sqrt{\Lambda}}{2tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}kE^2 - \frac{\alpha\sqrt{\Lambda}}{2tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}k + m^2\right)\frac{1}{\cos^2\sqrt{\Lambda}P} + E^2\right]\hat{\phi} = 0. \qquad (4.2.18)\end{aligned}$$

Dans le cas ordinare l'équation (4.2.18) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \left(5\sqrt{\Lambda}tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right) + \frac{\sqrt{\Lambda}}{tg\left(\sqrt{\Lambda}P\right)}\right)\frac{\partial}{\partial P} + \left(\frac{k^2\Lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\Lambda}P\right)} + m^2\right)\right]\hat{\phi} = 0. \tag{4.2.19}$$

Rest à trouver les solutions de cette équation differentielle.

5

Conclution générale

Dans ce mémoire on a présenté le formalisme de la géométrie non-commutative et on a montré que pour coder la non commutativité de l'espace-temps nous pouvons utiliser deux méthodes, que ce soit en utilisant un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl ou on doit déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace-temps commutatif. En utilisant les applications de Seiberg-Witten et le produit star de Moyal, on a dérivé l'équation de KG modifiée en présence d'un champ coulombien et en utilisant la théorie des perturbations, on a trouvé les corrections de l'énergie jusqu'au deuxième ordre de θ. nous avons trouvés la dégénérescence est complètement enlevée car l'énergie dépend de m_ℓ. Et avec l'utilisation les champs de Seiberg-Witten et le produit Moyal, nous avons généralisé.l'équation de Dirac. Puis nous avons résolu sette équation et nous avons montré que ces solution coincident avec celle de Dirac en présence d'un champ électrique. Nous avons montré que la non-commutativité joue le même rôle que le champ électrique qui contribue au processus de la crérion des particules ou la gravité pour le processus de création de particules. Nous avons obtenu une distribution de type Fermi-Dirac avec un potentiel chimique proportionnel au θ parametre de non-commutativité.

Et on l'appliqué sur des équations relativiste, en l'occurrence: Dirac et Klein-Gordon, et on a montré que la non commutativité joue deux rôle:

1. Spin.

2. champ électromagnétique.

Bibliographie

[1] M. Dubois Violette, R. Kerner and J. Madore, J. Math. Phys. **31**,323 (1990); A. Connes, *Noncommutative Geometry*, New York, London, (1994).

[2] M R. Douglas and N A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**,977 (2001).

[3] R.J.Szabo,*Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, Physics Reports **378** (2003), [arXiv :hep-th/0109162v4]; A.R.Camacho and R.J.Szabo, *Introduction to Noncommutative Field Theory*, (2009).

[4] N. Seiberg and E.Witten, *String theory and noncommutative geometry*, J. High Energy Phys.**9909**, 032 (1999).

[5] K.Ulker and B.Yapiskan, *Seiberg-Witten Maps to All Orders*, Phys. Rev. D **77**, 065006 (2008), arXiv :0712.0506v1.

[6] A.Stern, *Noncommutative Point Sources*, Phys. Rev.D**78**, 065006 (2008), arXiv :0709.3831v1[hep-th].

[7] L.Khodja and S.Zaim, *New tratment of the noncommutative Dirac equation with a coulomb potential*, Int. J. Mod. Phys. A**27**, 1250100 (2012), arXiv :1110.3532.

[8] S.Zaim,L.Khodja and Y.Delenda, *Second-order corrections to the non-commutative Klein-Gordon equation with a Coulomb potential*, Int. J. Mod. Phys. A **23**, 4133 (2011), arXiv :1101.0355v6[math-ph].

[9] A.F.Nikiforov and V.B.Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Mir. Moscou, (1978).

[10] G.Andrews,R.Askey and R.Roy, *Special functions*, Cambridge (2000).

[11] Abramowitz and A.stegun, *Handbook of mathemathical functions with Formulas*, Graphs and Mathematical Tables, (1970).

[12] C.C-Tannoudji, F.Laloe, *Mecanique Quantique I et II*, Hermann, Paris (1998).

[13] J.Hladik,M.Chryos,P-E.Hladik.*Mecanique Quantique : Atomes et Mol ecules,Applications technologiques*, Dunod, 3i eme, (2009).

[14] Doplisher S, Fredenhagen K and Roberts J E Phys. Lett.B **331** 39 (1994) Doplisher S, Fredenhagen K and Roberts J E Comm.Math. Phys. **172** 187 (1995).

[15] Calmet X, Jurco B, Schraml P, Schupp P, Wess J and Wohlgenannt M Eur. Phys. J. C **23** 363(2002) ; Aschieri P, Jurco B, schupp P and Wess J x J Nucl. Phys.B **651** 45 (2002).

[16] Calmet X and Kobakhidze A Phys. Rev. D **72** 045010 (2005),Calmet X and Kobakhidze A Phys. Rev. D **74** 047702 (2006)

[17] Villalba V M Phy. Rev. D **52** 3742 (1995).

[18] N.Mebarki,S.Zaim,L.Khodja and H.Aisaoui, *Gauge gravity in noncommutative de Sitter space and pair ceation*, Phys. Scripta **78**, 045101 (2008).

Résumé

Dans ce mémoire, on a présenté le formalisme de la géométrie non-commutative, et on l'appliqué sur quelques équations relativistes, en l'occurrence les équations de K.G et de Dirac, et on a montré que la non-commutativité joue le rôle du spin et du champ électromagnétique qui responsable de la création des particules.

Mots-clé:

Géométrie non-commutative, équations de K.G, équations de Dirac, champs gravitationnel.

Abstract

In this work we have presented the geometry non commutative formalism, and we apply it on some relativistic equations, in the equations of KG and Dirac, it has been shown that non-commutativity plays the role of spin and the electromagnetic field that is responsible for the creation of particles.

Key words:

Non-commutative geometry, K.G equations, Dirac equations, gravitational fields.

التلخيص

عرضنا في هذه المذكرة مفهوم الهندسة اللاتبادلية، كما قمنا بتطبيقها على بعض المعادلات التفاضلية النسبية، مثل معادلة كلين-جوردن وديراك.

وقد أثبتنا أن الهندسة اللاتبادلية تلعب دور السبين والحقل الكهرومغناطيسي المسؤول على خلق الجسيمات.

الكلمات المفتاحية:

الهندسة اللاتبادلية، معادلة كلين-جوردن وديراك، حقل الثقالة.