UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option :probabilités et statistiques

Par :CHINOUNE ASMA

Thème

Etude des equations différentielles stochastiques multidimensionnelles lineaires à bruit multiplicatif.

Soutenu publiquement le : 11/06/2018

Devant le jury composé de :

BUSAAD ABDELMALIK	Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
AGTI MOHAMMAD	Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
BAHEDDI AISSA	Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je dédie ce travail à mes parents et à tous les membres de ma famille,à mes Amies

A tous ceux qui a donné un mot pour la force de continuer ....

Remerciement

En préambule à ce mémoire je remercie ALLAH qui je aide et je donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

En second lieu ,je tient à remercier mon encadreur Mr : BAHEDDI AISSA pour ses précieux conseils et je remercie vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

A mes parents pour m'avoir encouragé et à mes familles et mes amis qui par leurs prieres et leurs encouragements ,on a pu surmonter tous les obstacles nos enseignants durant les années des études

En fin , je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail .

Table des matières

Notations

- E. D. S   Equation différentielle stochastique.
- $|.|$ la norme euclidienne sur R^m .
- $\| : \|$ la norme euclidienne sur $R^{m,p}$.
- p. s.   Presque sûrement.
- $< x, y >$ produit scalaire de x et de y
- v^T, M^T transpose d'un vecteur, d'une matrice
- $Tr(M)$ trace d'une matrice .
- $B = (B_t)t \geq 0$ mouvement brownien standard

Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle tenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les domaines d'application des EDS sont vastes :

-La modélisation de phénomènes de diffusion en physique (mécanique des fluides ,
géophysique, ...)

- Les mathématiques financières : modélisation des cours de bourse.

– Les systèmes dynamiques aléatoires.

– Les modèles d'écoulements de polymères multi-échelles.[1]

problematique

Comment etudier les equations différentilles stochastiques multidimensionnelles ?

de cette problematique découle les question suiventes :

1.Quelles sont les conditions necessaires de l'éxistence de la solution .

2.Quelles sont les conditions necessaires de l'únicite de cette solution.

Les hypothèses :

1. L'équations différentielles stochastiques multidimensionnelles admet une solution forte si l'équation vérifié les conditions du théoreme d'itô.

2. L'équations différentielles stochastiques multidimensionnelles admet une solution forte unique Si l'equation vérifié les conditions du théoreme d'itô.

Ce mémoire est partagé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la revue de littérature

le deuxième chapitre est consacré aux rappeles et compléments théorique.

Dans le troisième chapitre on presente la résolution des E.D.S unidemonsionelle multiplcatif et la résolution des

[1]oksendal,B.(1995), Stochastic differential equations : An introduction with Applications.

E.D.S.multidimensionnelles multiplicatif,avec etude de cas.

Chapitre 1

Revue de littérature.

thése : Auteur :Rebiha Zeghdane

Théme :Dynamique de structures soumises á des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique des équations differentielles stochastiques.chapitre 1

Mots clé :Équation differentielle stochastique,bruit ,stabilite.

Résume :Cette thése traite des techniques numériques pour la résolution des équations différentielles stochastiques .

bouafiabenezech.pdf le thème est :Equations diffrensielles stochastiques en dimension finie et infinie.

-l'auteur : Vincent Bénézech.

- le résume : résolution des equations différentielles stochastiques et résultat d'existence et d'unicitée pour les E.D.S

mémoire. le théme :inference statistique dans les modeles lineaires a temps continu applications aux modeles CARMA .chapitre 3

-l'auteur : safia leulmi

- Mots clé :E.D.S,solution forte et faible

- le résume : Ce travail a pour objectif d'étudier et d'analyser la structure du second ordre et les conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence des solutions .

Mémoire le théme :processus aléatoires et applications en finance

- l'auteur : Cheikh Bécaye Ndongo

-Mots clé :E.D.S ,Black- Scholes,Euler .

-le résume :Dans ce mémoire l'auteur introduit les notions de base relatives aux processus et aux équations différentielles stochastiques en s'efforçant de présenter les éléments théoriques les plus importants. Il propose pour, cette étude en examinant une application en finance le modèle de Black- Scholes. Il présente ensuite les schémas numériques d'Euler et de Milstein.

1.1 ANALYSE DES DOCUMENTS :

Après la lecture des documents de la revue de litterature on remarque que les documents on générales ,aborde la résolution des equations différentielles stochastiques,en étudiant le théoreme d'existence et d'unicité de solution.
l'objectif principale est le même mais on remarque la difference sur :
les outils utilisée pour argumenter les travaux comme le semi-implicite ,equation de Kolmogorov,le schéma de Euler...etc
et les problèmes qui resument l'etude des le E.D.S et d'autres présentant le problème d'existence et d'unicité de leur solution. ?

Chapitre 2

Rappels et Compléments

Dans ce premier chapiter nous présentons quelques notions fondamentales lieés aux processus stochastiques.

2.1 Processus Stochastique

Definition :

Un processus stochastique á valeur dans un espace $\mathbb{E}$ muni d'une tribu ξ est un famille $X = \{X_t\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ a valeurs dans $(\mathbb{E}, \xi)$

2.2 Mouvement Brownien

Definition :

Le mouvement Brownien standard ou processus de Wiener standard est le processus stochastique $\{B_t\}_{t>0}$ dépendant du temps t et vérifiant :

1. $B_0 = 0$.

2. l'indépendants : pour tout $t > s > 0$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\{B_u\}_{u \leqslant s}$.

3. accroissements gaussiens : pour tout $t > s > 0$, $B_t - B_s$ suit une loi normale $N(0, t-s)$. En effet $\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$ et

$\mathrm{Var}(B_t - B_s) = Cov(B_t - B_s, B_t - B_s)$

$= Cov(B_t, B_t) - 2Cov(B_t, B_s) + Cov(B_s, B_s)$

$= t - 2s + s = t - s$

4.$\forall \omega \in \Omega \qquad B_t(\omega)$ a trajectoire continue.

2.3 Le mouvement brownien géométrique

Un mouvement brownien géometrique de paramétres (μ, σ) est un processus $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$,

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

avec B un mouvement brownien, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

2.4 Filtration

Definition :

Une filtration est un famille croissante $\{F_t \quad , t \geq 0\}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$. le quadruplé $(\Omega, F, \{F_t : t \geq 0\}, \mathcal{P})$est appelé espace de probabilite filtré .

Etant donné un processus X defini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

la filtration naturelle noté $\{\mathcal{F}_t^x : t \geq 0\}$.est définie par $\mathcal{F}_t^x = \sigma(X_s)_{(s\leq t)}$.

2.5 Temps d'arrét

Definition :

Soit $\{X_n\}_n \in \mathbb{N}$ un processus stochastique et soit $F_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ la filtration canonique. Une variable aléatoire N à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}} = N \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrét si $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.6 Martingeles

Definition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathbf{F}_n\}_n, \mathcal{P})$ un espace probabilisé filtré .Une martingle par rapport à le filtration naturelle $\{F_n\}_n$ est un processus stochastique $\{X_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ tel que .

1/$E(/X_n/) < \infty$ pour tout $n \in N$

2/ $\{X_n\}_n$ est adapté à la filtration naturelle $\{F_n\}_n$

3/ $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Si la derniére condition est remplaçée par $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leqslant X_n$ on dit que $\{Xn\}_n$ est une sur-martingale,et si elle est remplaçée par $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geqslant X_n$ on dit que c'est une sous-martingale.

2.7 Formule d'itô

On define un processus d'ito comme un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(x_s)ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)dB_s$$

la forme differentielle equivalente :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

b_t s'applle la coefficient de derive .

σ_t s'applle la coefficient de diffusion .

Thoréme :(Formule d'Itô)

Pour un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(x_s)ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)dB_s$$

,avec

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \tag{2.1}$$

et $g \in C^2$,le processus $Y = (y_t)_{t>0}$ defini par $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'itô qui verife .

$$dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 \tag{2.2}$$

avec $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t = \sigma^2 dt,\ \ dt.dt = 0,\ \ dt.dB_t = dB_t.dt = 0$, et $dB_t.dB_t = dt$

On peut encoure écrire

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t}b_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2}(\sigma_t)^2\right)dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t}\sigma_t dB_t \tag{2.3}$$

Formule d'itô multidimensionnelle

$$dX(t, \omega) = f(t, \omega)dt + G(t, \omega)dW(t, \omega) \text{ pour } a < t < b \tag{2.4}$$

$X(t, \omega) = [X1(t, \omega), X2(t, \omega), \ldots, Xn(t, \omega)]^T$,

$f(t, \omega) = [f1(t, \omega), f2(t, \omega), \ldots, fn(t, \omega)]^T$,

$W(t, \omega) = [W1(t, \omega), W2(t, \omega), \ldots, Wm(t, \omega)]^T$, et

$(G(t, \omega))ij = gij(t, \omega)$ où $G(t, \omega)$ est une matrice $n \times m$.

En particulier, notez que W(t) est un processus de Wiener m-dimensionnel où le les éléments $Wi(t)$ et $Wj(t)$

sont indépendants si $i \neq j$ L'équation (2.4)peut être sous forme de composantes comme

$$dX_i(t,\omega) = fi(t,\omega)dt + \sum_{j=1}^{m} gij(t,\omega)dWj(t,\omega) \tag{2.5}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et, par conséquent,

$$Xi(t,\omega) = Xi(a,\omega) + \int_a^t fi(s,\omega)ds + \int_a^t \sum_{j=1}^{m} gij(s,\omega)dWj(s,\omega). \tag{2.6}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit maintenant $F(t,X)$ une fonction lisse de X_t. Autrement dit, $F : [a,b] \times H^n_{SP} \longrightarrow R$. Alors, la formule d'Itô peut être généralisée dans ce multidimensionnel pour donner le différentiel stochastique pour F de la forme

$$dF(t,X) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial xi} fi + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial xi \partial xj} gikgjk \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial xi} gijdWj_(t). \tag{2.7}$$

2.8 Calcul matriciel

2.8.1 Définition

• Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.

• Elle est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.

• Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.

• Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})$$

2.8.2 Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

• Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite matrice carrée. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}$ forment la diagonale principale de la matrice.

• Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne . On la note $A = (a_{1,1}a_{1,2}...a_{1,p})$

• De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne ou vecteur colonne.

• La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

2.8.3 Matrice de Wigner

definition

Soit $W_{ij,1\leq i\leq j}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq j$ On suppose de plus que

$$\forall k, \sup_{i,j} \mathbb{E}(|W_{ij}|^k) = C(k) < +\infty$$

La matrice W_N est une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ est définit par

$$W_N = \begin{cases} W_{i,i} & si \quad i = j \\ W_{i,j} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

2.8.4 La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité :

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

Elle se note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.

2.8.5 Puissances d'une matrice carrée

Notation : Puissances d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$et A une matrice carré d'ordre n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$A^p = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{p\ termes}$

et on convient que pour p $= 0$, $\mathrm{A}_0 = I_n$.

2.8.6 Matrices inversibles

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carré d'ordre n. On dit que A est inversible, s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, on note A^{-1} et on appelle inverse de A la matrice $A^{-1} = B$.

2.8.7 Formulaire de dérivation matricielle

Proposition 1 : Soit $v \in\mathbb{R}^k$ et $a \in \mathbb{R}^k$

$$\frac{\partial(v^T a)}{\partial v} = \frac{\partial(a^T v)}{\partial v} = 0$$

Proposition 2 : Soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^k$ et une matrice $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$:

$$\frac{\partial(v^T M v)}{\partial v} = \left(M + M^T\right) v$$

En particulier, si M est symétrique,$M^T = M$ et

$$\frac{\partial(v^T M v)}{\partial v} = 2Mv$$

Proposition 3 : Soit $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$:

$$\frac{\partial(\log(\det(M)))}{\partial M}=M^{-1}$$

Proposition 4 : Soit $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$ et $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ symétrique :

$$\frac{\partial(Tr(AM))}{\partial M} = A$$

Proposition 5 : Soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^k$ et une matrice $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\ (Mv)^T(Mv) = 2M^T Mv$$ [2]

2.9 Trace de la matrice

On rappelle que la trace d'une matrice carré

[2] Marc Weber.2009,Formulaire de dérivation matricielle

A= $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

est la somme de ses coefficients diagonaux

$trA = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$

Proposition

Pour toute paire A, B de matrice carrée de même taille, la trace vérifie :

$tr(AB) = tr(BA)$

2.10 Normes de vecteurs et de matrices

Une sémi-norme sur un espace vectoriel E est la donnée d'une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant deux axiomes (X, Y vecteurs de E, λ scalaire) :

$\bullet_1$ $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$.

$\bullet_2$ $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$.

Normes de matrices

Par exemple, la norme de Frobenius $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|aij|^2)^{\frac{1}{2}}$ est une norme de matrice

Definition : On appelle norme matricielle une norme définie pour des matrices carrées qui vérifie la relation $\|AB\| \leq\| A \|\| B \|$. Si on considére A comme représentant un opérateur linéaire, la norme de l'application linéaire A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$,induite par le choix d'une norme $\| . \|$ sur $\mathbb{R}^n$, est une norme matricielle. Celle-ci est définie par :

$\| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{x\neq 0}\| A\frac{x}{\| x \|} \| = \max_{\|x\|=0} \| Ax \| = \max_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|<1}} \| Ax \|$

Ces notions se généralisent aisément aux matrices rectangulaires. On définit par exemple ainsi, pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$\| A \|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|_2}{\| x \|_2}$

2.11 Matrices Exponentielles

le serie $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge normalement sur tout $.Mn(K)$ et sa somme est appeleé l'exponentielle de A .

Propriete :

Soient $AetB \in Mn(K)$ et P matrice de passage .

- $\exp(0) = I_n$
- $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\exp(diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$

- $(trig(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = trig(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
- $siA = PBP^{-1}$ .alors $\exp A = p(\exp B)p^{-1}$
- $det(\exp A) = e^{tr(A)}$
- $spc(\exp(A)) = \exp(spc(A))$

Chapitre 3

Equations Differentielles Stochastiques Multidimensionnelles

L'objectif essentiel de ce chapitre est de diffuser les principes de bases pour la résolution des équations différentielles stochastiques et d'étudier le problème d'existence et d'unicité de leur solution.

3.1 Equations Differentielles Stochastiques

Equation Differentielle Stochastique unidimensionnelle

3.1.1 introduction et définitions

De maniére informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation du type suivant :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \ , \qquad X_0 = x_0 \tag{3.1}$$

Dans cette équation , dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard W_t, b et σ sont les coefficients de l'équation (ce sont des fonctions de($\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), et $x_0 \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale. Tous ces termes sont donnés. La notation (3.1) est la plus usuelle.

Définition

Rechercher une solution de l'équation (3.1) consistera à rechercher un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ satisfaisant l'équation intégrale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s \tag{3.2}$$

où la seconde intégrale est une intégrale stochastique.

Le coefficient b est appelé le coefficient de dérive, σ est le coefficient de diffusion.[1]

3.2 Théorème d'existence et d'unicité

Soit$(W(t))t \in [0;T]$ un processus de Wiener sur l'espace de probabilité $(\Omega;\mathcal{F};\mathcal{P})$ équipé par la filtration $(Ft)t \in [0;T]$:

En outre, soient $a(t;x)$ et $b(t;x)$ deux fonctions mesurables définies sur $[0;T]$ dans $\mathbb{R}$ et $(X(t))t \in [0;T]$ un processus stochastique. On dit que $X(t)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = a(t,x(t))dt + b(t,x(t))dW(t) \tag{3.3}$$

avec la condition initiale :

$X(0) = x_0$ p.s (x_0 une variable aléatoire) ; Si :

1. x_0 est $F_0 - mesurable$;

2. Le processus $(X(t))t \in [0;T]$ est différentiable ,

et $dX(t) = a(t;x(t))dt + b(t;x(t))dW(t)$. Cependant :

$$X(t) = x(0) + \int_0^t a(s,x(s))ds + \int_0^t b(s,x(s))dB_s$$

Théorèmes et propriétés

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $t \in [0;T]$ et tout $(x;y) \in R * R$: $|a(t;x) - a(t;y)| + |b(t;x) - b(t;y)| \leq K|x-y|$.

2.*Pour tous* t$\in [0;T]$ et tout $x \in R$: $|a(t;x)| \leq K_1(1+|x|), |b(t;x)| \leq K_2(1+|x|)$: (K$_1, K_2$ sont des constantes).

3. E$[|x_0|^2] < \infty$.

4.x_0 est indépendant de $F_t(i.e, x_0$ est $F_0 - mesurable)$. alors, il existe une unique solution $(x(t))t \in [0;T]$ de (3.3) avec la condition initiale, telles que :

•$(x(t))_{t\in[0;T]}$ est continue .

•$(x(t))_{t\in[0;T]} \in C([0;T])$.

Unicité de la solution Si les coefficients $a(t;x)$ et $b(t;x)$ de l'équation (3 :3) sont définis et mesurables sur $[0;T] * R$, et s'ils satisfont une condition de Lipchitz globale, i.e , qu'il existe une constante K tels que pour tous $t \in [0;T]$ et tout$(x;y) \in R * R$:

[1]Estimation d'un retard d'une équation différentielle stochastique,chapitre 1-p15

$|a(t;x)-a(t;y)|+|b(t;x)-b(t;y)|\leq K^2|x-y|$ alors est une solution de l'équation(3 :3). Si elle existe, elle est unique au sens que si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont 2 solutions de l'équation (3 :3), alors :
$P(\sup\limits_{0\leq t\leq T}|x_1(t)-x_2(t)|=0)=1.$
Le caractère aléatoire des E. D. S. impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. Cependant, deux types de solutions s'imposent :
(solutions fortes et solutions faibles)

3.2.1 Solutions fortes

Une solution $(x(t))_{t\in[0;T]}$ de l'E. D. S. est dite une solution forte sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ relativement au mouvement brownien standard $(W(t))_{t\in[0;T]}$ et la condition initiale x_0 si :
1.(x(t))$_{t\in[0;T]}$ est indépendant du mouvement brownien $(W(t))_{t\in[0;T]}$.
2. (x(t))$_{t\in[0;T]}$ a des trajectoires continues p.s
3.F^{x_0} est la filtration générée par $x_0(t)$ et $(W(t))_{t\in[0;T]}$,$\mathcal{F}_{x_0}=\sigma(W,x_0)$

3.2.2 Solutions faibles

Une solution $(x(t))_{t\in[0;T]}$ de l'E. D. S est dite faible sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ relativement au mouvement brownien standard si $(x(t))_{t\in[0;T]}$ est continue et $\mathcal{F}$ est adaptée et les processus $a(t;x)$ et $b(t;x)$ sont des paires du processus $(x(t))_{t\in[0;T]}$ qui satisfont :
$a\in L_1$ et $b\in L_2$:

3.3 Equations Differentielles Stochastiques Multidimensionnelles Á bruit multiplicatif

les différences entre les solutions des differents équations différentielles stochastiques reside dans la forme du bruit (bruit additif et bruit multiplicatif).

$$dX_t=a(t)X_tdt+b(t)X_tdW_t \qquad X_0=x \tag{3.4}$$

Ou sous la forme d'une matrice

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ \vdots \\ dX_t^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^n \end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^n \end{pmatrix}dW_t$$

$$\begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}.$$

avec a et b des fonctions déterministes. Nous pouvons alors ècrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = a(t)dt + b(t)dB_t \tag{3.5}$$

les solutions explicites des Equations Differentielles Stochastiques

bruit multiplicatif

Soit $g(t,x_t) = \ln(X_t)$, *on a* $\dfrac{\partial g(t,X_t)}{\partial X_t} = \dfrac{1}{X_t}$, $\dfrac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial {X_t}^2} = -\dfrac{1}{{X_t}^2}$

L'équation homogéene avec coefficient constant :

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \tag{3.6}$$

soit g un fonction de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$alors :

$Y_t = g(t,x_t)$ est un processus d'itô et tel que :

$$dY_t = \frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial g(t,X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial X_t^2}(dX_t)^2$$

$$dY_t = \left[\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t} + a\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial X_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial X_t^2}(b_t)^2\right]dt + \frac{\partial g(t,X_t)}{\partial X_t}b_t dB_t$$

$dY_t = \frac{1}{X_t}(aX_t dt + bX_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{1}{{X_t}^2}(b^2 {X_t}^2 dt)$

$Y_t - Y_0 = (a - \frac{b^2}{2})t + bW_t$

$\ln X_t - \ln X_0 = (a - \frac{b^2}{2})t + bW_t$

donc la solution générale est donnée par :

$$X_t = X_0 exp\left((a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t\right) \tag{3.7}$$

Equation non homogéne avec coefficient constant

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$dX_t = (aX_t + c)dt + (bX_t + d)dW_t \tag{3.8}$$

equation homogéne de $(3,8)$ $\quad c = d = 0$

$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$

$X_t = x_0.\exp((a - \frac{b^2}{2})t + bW_t)$

on pose ϕ_t=$\exp((a - \frac{b^2}{2})t + bW_t)$

donc $X_t = x_0.\phi_t$ solution homogene

on pose :$x_0 = Y_t$

$X_t = Y_t.\phi_t \Longrightarrow Y_t = X_t.\phi_t^{-1}$

ϕ_t^{-1}=$\exp(-(a - \frac{b^2}{2})t - bW_t)$

$dY_t = \phi^{-1}dX_t + X_t d\phi^{-1} + dX_t d\phi^{-1}$

$d\phi^{-1} = \phi^{-1}\left[(-a + \frac{b^2}{2})dt - bdW_t\right]$

$dY_t = \phi_t^{-1}\left[(c - bd)dt + ddW_t\right]$

$Y_t - Y_0 = (c - bd) \int_0^t \phi^{-1} ds + d \int_0^t \phi^{-1} dW_s$

$X_t.\phi^{-1} = x_0 + (c - bd) \int_0^t \phi^{-1} ds + d \int_0^t \phi^{-1} dW_s$

donc :

$$X(t) = \Phi_t \left(X_0 + (c - bd) \int_0^t \Phi^{-1} ds + d \int_0^t \Phi^{-1} dW_s \right) \tag{3.9}$$

avec la solution fondamentale

$$\Phi_t = exp((a - \frac{1}{2} b^2) t + bW_t) \tag{3.10}$$

équation homogéne à coefficients variables

$$dX_t = a(t) X_t dt + b(t) X_t dW_t \tag{3.11}$$

d'apres la formule d'itô

La solution de cette équation est :

$$X_t = X_0 (exp \int_0^t (a(s) - \frac{1}{2} b^2(s)) ds + \int_0^t b(s) dW_s) \tag{3.12}$$

Equation non homogéne à cofficients variables

$$dX_t = (a(t) X_t + c(t)) dt + (b(t) Xt + d(t)) dW_t \tag{3.13}$$

$X_t = X_0 exp \left(\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2} b^2(s)) ds + \int_0^t b(s) dW_s \right)$

$X_t = X_0.\phi(t, W_t)$

$\Phi_{(t,t0)} = \exp \left(\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2} b^2(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s) dW_s \right)$

on pose :$X_0 = Y_t$

$X_t = Y_t.\Phi_{(t,t_0)} \quad Y_t = X_t.\Phi^{-1}_{(t,t_0)}$

$dY_t = \phi^{-1}_{t,W_t} dX_t + X_t d\phi^{-1}_{t,W_t} + dX_t d\phi^{-1}_{t,W_t}$

$d(\phi^{-1}_{(t,W_t)}) = \left((-a(t) + b^2(t)) dt - b(t) dW_t \right) \phi^{-1}_{t,W_t}$

$dy_t = [(c(t) - b(t) d(t)) dt + d(t) dW_t] \, \phi^{-1}_{(t,w_t)}$

$X_t.\phi^{-1}_{(t,W_t)} = X_0 + \int_0^t c(s) - b(s) d(s) \phi^{-1} ds + \int_0^t d(s) \phi^{-1} dW_s$

$$X(t) = \Phi_(t, t_0) \left(X_{t0} + \int_{t_0}^t \Phi^{-1} (c(s) - b(s) d(s)) ds + \int_{t_0}^t \Phi^{-1} d(s) dW_s \right) \tag{3.14}$$

La solution fondamentale Φ est donnée par :

$$\Phi_{(t,t0)} = \exp \left(\int_{t_0}^t (a(s)) - \frac{1}{2} b^2(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s) dW_s \right) \tag{3.15}$$

Equation Differentielle Stochastique multidimensionnelle

3.3.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit f et g deux fonctions :

f :[0,T]$\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(t, X_t) = (A(t)X_t + C(t))$

$g(t, X_t) = (B(t)X_t + F(t))$

1- $\exists k > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T]$,$\forall x \in \mathbb{R}^d$,$\forall y \in \mathbb{R}^d$

$\parallel f(t,x) - f(t,y) \parallel + \parallel g(t,x) - g(t,y) \parallel \leq k \parallel x - y \parallel$(condition de Lipschitz)

2- $\forall L > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T]$,$\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$\parallel f(t,x_t) \parallel + \parallel g(t,x_t) \parallel \leq L(1+ \parallel x \parallel)$(condition de la croissance)

preuve :

$$dX_t = (A(t)X_t + C(t))dt + (B(t)X_t + F(t))dW_t$$

$$\begin{aligned}
\|f(t,X) - f(t,Y)\|_F + \|g(t,X) - g(t,Y)\|_F &= \|A(t)(X-Y)\|_F + \|B(t)(X-Y)\|_F \\
&\leq \|A(t)\|_2 \|(X-Y)\|_F + \|B(t)\|_2 \|(X-Y)\|_F \\
&\leq (\|A(t)\| + \|B(t)\|_2) \|(X-Y)\|_F \\
&\leq 2\sup(\|A(t)\|, \|B(t)\|_2) \|(X-Y)\|_F \\
donc : &\leq k \parallel x - y \parallel
\end{aligned}$$

$\exists L \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sup_{t\in[0,T]} |a_{ij}(t)|^2} \leq L$

$$\|f(t,X) - f(t,Y)\|_F + \|g(t,X) - g(t,Y)\|_F \leq L \|(X-Y)\|_F$$

$$\begin{aligned}
\|f(t,X)\| &= \|A(t)X + C(t)\| \\
&\leq \|A(t)\| \|X\| + \|C(t)\| \\
&\leq L'(1 + \|X\|)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|g(t,X)\| &= \|B(t)X + F(t)\| \\
&\leq \sqrt{\sum_{i,j} (\sup_{t\in[0,T]} |b_{i,j}(t)|^2)}
\end{aligned}$$

$$\|g(t,X)\| \leq L''(1 + \|X\|)$$

3.4 Solutions de l'équation différentielle stochastique à bruit multiplicatif multidimensionnel

L'équation homogéene avec coefficient constant :

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t \tag{3.16}$$

D'aprés la formule d'itô :

$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^2}(dX_s)^2$$
$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \frac{X_s}{X_s}(Adt + BdW_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{X_s^2}{X_s^2} B^2 dt$$

$\ln X_t - \ln X_0 = (A - \frac{1}{2}B)t + BW_t$

donc la solution générale est donnée par :

$$X_t = exp\left((A - \frac{1}{2}B^2)t + BW_t\right) X_0 \tag{3.17}$$

Equation non homogéne à cofficients constant

$$dX_t = (AX_t + C)dt + (BXt + D)dW_t \tag{3.18}$$

C=D=0

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$$

$X_t = X_0(exp(A - \frac{1}{2}B^2)t + BW_t)X_0$

on pose :$X_0 = Y_t$

$X_t = Y_t.\Phi_{(t,t_0)} \quad Y_t = X_t.\Phi^{-1}_{(t,t_0)}$

$\phi^{-1} = (exp(A - \frac{1}{2}B^2)t + BW_t)$

$dY_t = \phi^{-1}_{t,W_t} dX_t + X_t d\phi^{-1}_{t,W_t} + dX_t d\phi^{-1}_{t,W_t}$

$d(\phi^{-1}_{(t,W_t)}) = [(C - BD))dt + DdW_t]$

$$X(t) = \Phi_{(t,t_0)}(X_{(t0)} + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(C - BD)ds + \int_{t_0}^t \Phi^{-1} DdW_s) \tag{3.19}$$

La solution fondamentale Φ est donnée par :

$$\Phi_{(t,t0)} = exp(\int_{t_0}^t (A)) - \frac{1}{2}B^2)ds + \int_{t_0}^t BdW_s) \tag{3.20}$$

Equation non homogéne à cofficients variable

$$dX_t = (A(t)X_t + C(t)dt + (B(t)Xt + D(t)dW_t \tag{3.21}$$

C=D=0

$$dX_t = A(t)X_t dt + B(t)X_t dW_t$$

$X_t = \left(exp(A(s) - \frac{1}{2}B^2(s))t + B(s)W_t\right) X_0$

on pose :$X_0 = Y_t$

$X_t = Y_t.\Phi_{(t,t_0)} \quad Y_t = X_t.\Phi^{-1}_{(t,t_0)}$

$\phi^{-1} = (exp(A(t) - \frac{1}{2}B^2(t))t + B(t)W_t)$

$dy_t = \phi^{-1}_{t,W_t} dX_t + X_t d\phi^{-1}_{t,W_t} + dX_t d\phi^{-1}_{t,W_t}$

$$X(t) = \Phi_{(t,w_t)} X_{t0} + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(C(s) - B(s)D(s)ds + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1} D(s)dW_s \tag{3.22}$$

La solution fondamentale Φ est donnée par :

$$\Phi_{(t,w_t)} = exp\left(\int_{t_0}^{t} (A(s) - \frac{1}{2}B^2(s))ds + \int_{t_0}^{t} B(s)dW_s\right) \tag{3.23}$$

3.5 exemple de Solution d'une equation différentielle stochastique

le modèle de Black-Scholes

Considérons le modèle classique de Black-Scholes

Définition : S_t est un processus continu adapté défini par l'équation stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad S_0 = s_0 > 0. \tag{3.24}$$

Maintenant nous tenterons de résoudre l'équation (3.24). Pour ce faire définissons le processus $Z_t = ln(S_t)$, et appliquons la formule d'Itô au processus Z_t. Nous avons

$dZ_t = \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S_t^2})dS_t \times dS_t$

$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S_t^2})(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \times (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)$

$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S_t^2})(\sigma^2 S_t^2 dt)$

$= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t$

Après intégration nous déduisons que

$Z_t - Z_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$

Puisque $S_t = \exp(Z_t)$, nous obtenons

$$S_t = s_0 exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right] \tag{3.25}$$

3.6 Modèle Black-Scholes multidimensionnel

Nous allons maintenant décrire le modèle multi-dimensionnel Black-Scholes, qui est le modèle standard du prix des actifs en finance ,Ce modèle émerge par :

$$dX_t = (A_t X_t + \alpha_t)dt + \sum_{i=1}^{m}(B_t^i X_t + \beta_t^i)dW_t^i$$

en supposant que α et β^i sont égaux à zéro pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ Notons par St une matrice diagonale avec jième élément diagonal $S_t^j, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, représentant le prix du jième actif à l'instant $t \in [0, \infty)$. Puis le SDE pour le prix des actifs de Black-Scholes t est défini par :

$$dS_t^j = S_t^j(a_t^j dt + \sum_{k=1}^{d} b_t^{j,k} dW_t^k) \tag{3.26}$$

pour $t \in [0, \infty)$ et $j \in 1, 2, \ldots, d$, où a^j et $b^{j,k}$ sont des fonctions déterministes de temps .Ici $W^k, k \in \{1, 2, \ldots, d\}$, dénote la processus standard de Wiener indépendant. Pour représenter cette SDE sous forme de matrice nous introduisons la matrice diagonale $A_t = [A_t^{i,j}]_{i,j=1}^d$avec :

$A_t^{i,j} = \begin{cases} a_t^j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

et la matrice diagonale $B_t^k = [B_t^{k,i,j}]_{i,j=1}^d avec$

$\mathrm{B}_t^{K,i,j} = \begin{cases} b_t^{j,k} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
pour $k, i, j \in \{1, 2, \ldots, d$ et $t \in [0, \infty)$. Donc écrire le SDE (3.26) comme matrice SDE.

$$dS_t = A_t S_t dt + \sum_{k=1}^{d} B_t^k S_t dW_t^k$$

la solution est :
$\mathrm{S}_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(A_s - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} (B_s^k)^2 \right) ds + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t B_s^k dW_s^k \right\}$

3.7 Exemple

$$\begin{pmatrix} dX_{1_t} \\ dX_{2_t} \\ dX_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} dW_t$$

on pose
$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

équation différentielle homogène

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$$

$$X_t = \exp((A - \frac{1}{2}B^2)t + BW_t)X_0$$

on pose $C = A - 1/2B^2$

$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2 & -6 \\ -6 & 0 & -15/2 \end{pmatrix}$

les valeurs propres de C

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2-\lambda & -6 \\ -6 & 0 & -15/2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda \\ &= -\frac{1}{4}\lambda(4\lambda^2 + 12\lambda + 9) \\ &= 4(-\frac{1}{4}) \times \lambda \times (\lambda + \frac{3}{2}) \times (\lambda + \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -3/2$ et $\lambda_3 = -3/2$

les vecteurs propres

pour $\lambda = 0$

$$(A)X = 0 \Leftrightarrow (A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15/2z = 0 \\ -6x - 3/2y - 6z = 0 \\ -6x - 15/2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6x + 15/2z = 0x = -5/4z$$

alors

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} pour$$

$\lambda = -3/2$

$$(A + 3/2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15/2x + 15/2z = 0 \\ -6x - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -z, y = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$P = \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2 & -6 \\ -6 & 0 & -15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\exp(C \cdot t) = P \exp(D \cdot t) P^{-1}$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2 & -6 \\ -6 & 0 & -15/2 \end{pmatrix} \cdot t\right) = \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-3/2t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-3/2t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2 & -6 \\ -6 & 0 & -15/2 \end{pmatrix} \cdot t\right) = \begin{pmatrix} 5 - 4e^{-3/2t} & 0 & 5 - 5e^{-3/2t} \\ -4 + 4e^{-3/2t} & e^{-3/2t} & -4 + 4e^{-3/2t} \\ -4 + 4e^{-3/2t} & 0 & -4 + 5e^{-3/2t} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de B

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

les vecteurs propres

pour $\lambda = 1$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -z, y = 1$$

alors

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{et} \;\; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$pour \lambda = 2$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = y, z = 0$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\exp(B \cdot Wt) = P \exp(D \cdot Wt) P^{-1}$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Wt\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(Wt) & 0 & 0 \\ 0 & e(Wt) & 0 \\ 0 & 0 & e(2Wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Wt\right) = \begin{pmatrix} e^{2W_t} & 0 & -e^{W_t} + 2e^{2W_t} \\ -2e^{W_t} + 2e^{2W_t} & e^{W_t} & -2e^{W_t} + 2e^{2W_t} \\ 0 & 0 & e^{W_t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5e^{2W_t} - 4e^{(-3/2)t+2W_t} & 0 & -8e^{(-3/2)t+2W_t} - e^{(-3/2)t+W_t} + 10e^{2W_t} \\ -4e^{2W_t} + 6e^{(-3/2)t+2W_t} - e^{(-3/2)t+W_t} & e^{(-3/2)t+W_t} & 9e^{-3t+2W_t} - 8e^{2W_t} \\ -4e^{2W_t} + 4e^{(-3/2)t+2W_t} & 0 & 8e^{-3t+2W_t} + e^{(-3/2)t+W_t} - 8e^{2W_t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5e^{2W_t} - 4e^{(-3/2)t+2W_t})x_{1_0} + (-8e^{(-3/2)t+2W_t} - e^{(-3/2)t+W_t} + 10e^{2W_t})x_{3_0} \\ (-4e^{2W_t} + 6e^{(-3/2)t+2W_t} - e^{(-3/2)t+W_t})x_{1_0} + (e^{(-3/2)t+W_t})x_{2_0} + (9e^{-3t+2W_t} - 8e^{2W_t})x_{3_0} \\ (-4e^{2W_t} + 4e^{(-3/2)t+2W_t})x_{1_0} + (8e^{-3t+2W_t} + e^{(-3/2)t+W_t} - 8e^{2W_t})x_{3_0} \end{pmatrix}$$

Conclusion

Dans ce mémoire , je prouvé la théorie d'éxistence et d'uncité de solution . et je donne la forme de la solution générale d'equations differntielles stochastiques multidimensionelle à bruit multiplicatif.en dernier chapitre on dveloppe un cas comme exemple de la résolution des E.D.S.

Bibliographie

[1] Bernt Oksendal, Stochastic Differential Equations,Springer-Verlag,1998.

[2] Avner Friedman, Stochastic differential equations and applications,1997.

[3] Î.Ī.Gīhman and A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer, New York,1972.

[4] L. Arnold, Stochastic Differential Equations, Wiley, New York, 1974.

[5] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical solution of stochastic differential equations, Springer, Berlin, 1992.

[6] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood, 1997.

[7] S. Gratton, Analyse matricielle et Optimisation,2014.

[8] E. Platen, N. Bruti-Liberati, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance Springer, 2010.