LES GROUPES LIBRE ET MOYANNEBLE

BOUGGOUFFA ;ABDELFATTAH

Dèpartement des Mathématiques

Universitè Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie

Résumé

L'objectif de ce premier chapitre est double. Dans un premier temps, il vise à introduire certaines notions essentielles, comme par exemple celle de groupe libre, d'équidécomposabilité et d'ensemble paradoxal ; ainsi qu'à présenter les grandes étapes qui mènent au paradoxe de **Banach-Tarski**. Dans un deuxième temps, il a pour but de prouver l'existence d'une modification de la mesure de Lebesgue définie sur R^2 tout entier ; c'est-à-dire une application finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue tout en perdant son caractère dénombrablement additif. Pour ce faire, nous avons besoin de la définition d'une algèbre de Boole ainsi que certaines de leur propriétés élémentaires. En outre, l'existence d'une telle. Sauf mention explicite du contraire, les ensembles considérés dans ce chapitre sont supposés non vides.

1. Introduction

« Tout borné d'intérieur non vide de l'espace euclidien de dimension trois peut être découpé en un nombre fini de morceaux de sorte que, en réarrangeant ceux-ci via des isométries, on peut le dédoubler. » Il s'agit là d'un des résultats les plus troublants en mathématiques, découvert en **1924** par **Stefan Banach et Alfred Tarski [1]**, connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski. Un ensemble ayant la propriété énoncée est dit paradoxal sous l'action du groupe des isométries ; l'objet principal de ce travail est l'étude des ensembles paradoxaux d'une manière générale. Nous pouvons d'ores et déjà mentionner que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de la nature de l'ensemble mais des propriétés du groupe agissant sur lui. Par exemple, si un groupe libre possède deux éléments indépendants et agit librement sur un ensemble alors l'ensemble est paradoxal .

L'existence de ces ensembles est contre-intuitive (d'où leur nom), puisque nous avons tous en tête l'idée de conservation de l'aire qui entraine que la mesure d'un ensemble est égal à la somme des mesures de ses sous-parties. De là, la seule explication possible à l'existence de tel ensemble est qu'on ne sait pas associer une mesure à certains ensembles intervenant dans la décomposition. Autrement dit, certains de ces sous-ensembles sont nonmesurables. Il est donc évident que l'étude des ensembles paradoxaux est étroitement liée à la théorie de la mesure « Tout borné d'intérieur non vide de l'espace euclidien de dimension trois peut être découpé en un nombre fini de morceaux de sorte que, en réarrangeant ceux-ci via des isométries, on peut le dédoubler. » Il s'agit là d'un des résultats les plus troublants en mathématiques, découvert en **1924** par **Stefan Banach et Alfred Tarski [1]**, connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski. Un ensemble ayant la propriété énoncée est dit paradoxal sous l'action du groupe des isométries ; l'objet principal de ce travail est l'étude des ensembles paradoxaux d'une manière générale. Nous pouvons d'ores et déjà mentionner que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de la nature de l'ensemble mais des propriétés du groupe agissant sur lui. Par exemple, si un groupe libre possède deux éléments indépendants et agit librement sur un ensemble alors l'ensemble est paradoxal .

L'existence de ces ensembles est contre-intuitive (d'où leur nom), puisque nous avons tous en tête l'idée de conservation de l'aire qui entraine que la mesure d'un ensemble est égal à la somme des mesures de ses sous-parties. De là, la seule explication possible à l'existence de tel ensemble est qu'on ne sait pas associer une mesure à certains ensembles intervenant dans la décomposition. Autrement dit, certains de ces sous-ensembles sont nonmesurables. Il est donc évident que l'étude des ensembles paradoxaux est étroitement liée à la théorie de la mesure .

2. LES GROUPES LIBRES

2.1 Définition :

Si un groupe G possède une famille génératrice libre X alors G est un groupe libre. Dans ce cas, on dit que G est engendré librement par X.

2.1.1 Exemple :

Si $X = \{x\}$ engendre librement G alors tout élément de $G \diagdown \{e\}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x^{\varepsilon} \circ .... \circ x^{\varepsilon}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Donc $G = \left\{x^k \diagdown k \in Z_0\right\} \cup \{e\}$ et ains

$$(G; \circ) \ \simeq (Z; +)$$

où l'isomorphisme est donné par

$$f : Z \to G \quad k \mapsto f(k) = x^k.$$

$f(0) = e$.

3. Notions d'algèbre de Boole :

3.1 Définition :

Soient *A* un ensemble non vide,$\wedge, \vee$ deux opérations binaires et internes définie sur A et une opération unaire et interne définie sur A également. Le quadruplet $(A; \wedge, \vee,^{*})$ est une algèbre de Boole si :
(i) $a \wedge b = b \wedge a$ et $a \vee b = b \vee a$ (commutativité) ;
(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ et $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (associativité) ;
(iii)$(a \wedge b) \vee b = b$ et $(a \vee b) \wedge b = b$ (absorption) ;
(iv) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distributivité) ;
(v) $(a \wedge a^*) \vee b = b$ et $(a \vee a^*) \wedge b = b$ (complémentarité).
On pose $1 = a \vee a^*$ et $0 = a \wedge a^*$.
Dans la suite, on écrira A pour représenter l'algèbre de Boole $(A; \wedge, \vee,^{*})$.

3.2 Remarques :

On tire immédiatement de cette définition les résultats suivants :
1. $a \wedge 1$ = a et $a \vee 0$ = a.
Ces égalités découlent de la définition de 1 et 0 et de (iii).
2. $a \vee a = a$.
On a :$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (a \vee a^*) = a \vee (a \wedge a^*) = a \vee 0 = a.$
3.$a \wedge a = a$
On a :$a \wedge a = (a \wedge a) \vee 0 = (a \wedge a) \vee (a \wedge a^*) = a \wedge (a \vee a^*) = a \wedge 1 = a.$
4. $(a^*)^* = a$.
On a :
$a = ((a^*)^* \vee a^*) \wedge a = (a^*)^* \wedge a) \vee (a^* \wedge a) = (a^*)^* \wedge a$
et

$$((a^*)^* \wedge a = ((a^*)^* \wedge a) \vee ((a^*)^* \wedge a^*) = ((a^*)^* \wedge (a \vee a^*) = ((a^*)^* :$$

3.3 Définition :

Soit A une algèbre de Boole. On définit la relation suivante sur A

$$a \leq b, \Longleftrightarrow a \wedge b = a :$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre 8 sur A.

3.4 Remarques :

1. On a $a \wedge b = a, a \vee b = b :$
En effet, si $a \wedge b = a$ alors $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ par l'axiome d'absorption. De même, si $a \vee b = b$ alors $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$. Autrement dit, $a \leq b$ si et seulement si $a \vee b = b$.
2. Il est clair que 1 est l'élément maximum de l'algèbre de Boole A et 0 l'élément minimum.

3.5 Exemple :

Si A est un ensemble non vide, le quadruplet $(P(A), \cap, \cup, \complement)$ est une algèbre de Boole où $1 = A, 0 = \emptyset$; et où la relation d'ordre est l'inclusion.

4. RÉSULTAT

Nous savons que $(P(R^2), \cap, \cup, \complement)$ est une algèbre de Boole et que les ensembles Lebesgue-mesurables forment un sous-anneau de cette algèbre. De plus, $G(2)$ est un groupe d'automorphismes pour lequel la mesure de Lebesgue est invariante. De cette façon, si $G(2)$est moyennable et grâce au **théorème** $1.4.15$, il existe une mesure exhaustive sur R^2, $G(2)$- invariante, finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue.
Montrons ainsi, que le groupe $G(2)$ est moyennable. Pour ce faire, nous prouvons, d'une part, que tout groupe commutatif est moyennable et, d'autre part, que si N est un sous-groupe normal d'un groupe G tel que N et $G \setminus N$ sont moyennables, alors G est moyennable. Commençons par une proposition et un lemme.
c*** bibliograohy : here outsize the multicols environement –> a footer

Références

[1] $[18]$ Michel Rigo : Algèbre linéaire. Université de Liège, 2009.

[2] $[19]$ Michel Rigo : Théorie des graphes. Université de Liège, 2009.

[3] $[21]$ Jean-Pierre Schneiders : Introduction à l'Analyse Numérique. Université de Liège, $2010 - 2011$. Université de Liège,

[4] $[21]$ Jean-Pierre Schneiders : Introduction à l'Analyse Numérique. Université de Liège, $2010 - 2011$.