UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matiere

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : probabilité et statistique

Par : HACHEF SALAH EDDINE

Thème

ÉTUDE ET APPLICATION DU PROBLÈME DE SNELL EN FINANCE

Soutenu publiquement le :11/06/2018

Devant le jury composé de :

BAHEDDI AISSA	Professeur.UKMOuargla	Encadreur
ALI MECH	M.A.Ouargla	Président
ARBIA Hanane	M.A.Ouargla	Examinateur

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :
Mes parents
- A mes frères et mes sœurs, et toute la famille
- A mes chers amies
- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.
- Et a tous mes professeurs.

Remerciement

En premier lieu je tiens à remercier **DIEU** le tout puissant de m'avoir donné la force et la connaissance pour accomplir mon travail.
Je tiens tout à remercier aux premier lieu mon encadreur Monsieur **BAHEDDI AISSA** de m'avoir proposé ce thème et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager.Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.
Je remercie également les membres du département Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes condition pendant la réalisation de mon travail, et tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus , sans oublier leurs conseils précieux .J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys qui m'ont-honoré en acceptant de juger ce travail.
Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation se ce travail.

Table des matières

Notations

r : est un taux d'intérêt continu ,dit taux sans risque , que peut être déterministe ou aléatoire .

S_n^0 : est un actif sans risque .

S_n : est un actif risque .

K : d'arbitrage .

β_n : est un taux d'actualisation.

τ^* : est un temps d'arrêt optimal .

τ : est un temps d'arrêt .

C_n : la valeur de l'options américaine .

c_n : la valeur de l'options européenne .

$\mathcal{F}_t$: est une filtration .

$T_{t,T}$: espace probabilité à horizon fini .

$T_{t,\infty}$: espace probabilité à horizon infini .

L^1 : espace le fonction intégrable .

Introduction

En ingénierie financière, l'évaluation d'options est un sujet où il y a eu plusieurs développements au cours des dernières décennies. D'un point de vue théorique,le problème d'optimisation (problème de Snell) résolu dans le livre de Neveu(1975)[1] est central dans l'évaluation d'options américaines ou bermudiennes, car il permet de définir un temps d'arrêt afin d'exercer l'option au moment où le contrat a la plus grande valeur théorique.

Bien que le problème de Snell ait été introduit dans le livre de Neveu (1975) à l'aide d'exemples sur les jeux de hasard, il est évident que ce problème est exactement le même que celui que l'on rencontre avec les options d'achats et de ventes. Malgré le fait que le problème ait été résolu théoriquement, les chercheurs ont dû trouver des méthodes pratiques afin d'être en mesure de calculer la valeur de l'option.

Une des premières méthodes de résolution mise sur pied a été proposée par Brennan et Schwartz (1977)[2]. Ces derniers se sont basés sur la résolution d'équations différentielles pour parvenir à la résolution du problème de Snell. Par la suite, les méthodes de résolution en arbre ont été introduites par Cox et al.(1979) pour évaluer la valeur d'options américaines. Malgré le fait que les méthodes de simulation Monte Carlo aient été discutées par Boyle (1977)[3] pour les options européennes, il a fallu attendre jusqu'à'en 1993 avec la parution de l'article de Tilley (1993)[4] pour voir la première évaluation d'options basée sur des simulations. Cet article a marqué le début d'une effervescence de la méthode Monte Carlo dans ce domaine.

Le domaine de l'évaluation d'options a par la suite vu naître plusieurs articles améliorant les résultats de Tilley (1993), tels que Carriere (1996), Broadie et Glasserman

[1]Neveu, J. (1975). Discrete-parameter Martingales . North Holland, Amsterdam.

[2]Brennan, M. and Schwartz, E. (1977).The valutation of American put options.Journal

[3]Boyle, P.(1977).Options : A Monte Carlo approach. Journal of Financial Economics, 4 :323-338

[4]Tilley, J.(1993). Valuing American options in a path sim ulation model. Transactions of the Society of Actuaries, 45 :83-104.

(1997)[5], Longstaff et Schwartz (2001)[6], Broadie et Glasserman (2004)[7]. Plus récemment, des méthodes permettant l'évaluation de bornes inférieures et supérieures de la valeur de l'option ont été développées par Rogers (2002)[8] et Andersen et Broadie (2004)[9] Les probabilités ont pour but l'étude des phénomène (expérience aléatoire).En particulier ,les processus stochastique permettent de modéliser l'évolution dans le temps d'un phénomène aléatoire,Parmi ces phénomènes.

Problématique :

- Commuent on applique le problème de snell en finance ? (Dois-je exercer maintenant mon droit ou attendre encore ?)

Sous Problème :

* Est-ce-que l'enveloppe de snell est une problème d'optimisation ?
* Est-ce-que le problème de snell admet toujours des solution ?
* Quelle sont les limites d'application du problème de snell ?

Hypothèse :

* le problème de snell est un problème d'optimisation basé sur un temps d'arrêt optimal .
* l'enveloppe de snell admet toujours des solutions .
* l'application du problème de snell est ouverte à tous jeux de hasard basé les martingales.

le problème de snell depend de nombreux service tels que les entreprises et les bourses, Nous allons travailler pour trouver un temps d'arrêt optimal au cours duquel nous pouvons résoudre le problème financier.

Dans ce travail,nous avons abordé la compréhension , l'étude et la résolution de ce problème ,où nous avons deviser le travail en trois chapitres. la première chapitre comprend une lecture complète du contenu de problème et résume et recueille des informations.le deuxième chapitre contient un aperçu théorique de tous les concepts et méthodes utilisés en relation avec le problème de snell, et dans le dernier chapitre nous avons discuté de l'application du problème financier de snel ,ainsi que de ses caractéristique et options étudiées sur le marché financier ,prenant un exemple pour illustrer le problème.

[5]-Broadie, M. and Glasserman, P. (1997).Pricing American-style securities using simulation.Journal of Economics Dynamics and Control, 21 :1323-1352.

[6]Longstaff, F., Schwartz, E.(2001). Valuing American options by simulation : A simple least-square approach . The Review of Financial Studies, 14 :113-147.

[7]Broadie, M. and Glasserman, P. (2004).A stochastic mesh methode for pricing high-dimensionnal American option. Journal of Computationnal Finance, 7 :35-72.

[8]Rogers, C.(2002).Monte Carlo valuation of American options. Mathematical Finance, 12 :271-286.

[9]Andersen, L. and Broadie, M. (2004).Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensionnal Americain options.Management Science, 50 :1222- 1234

Chapitre 1

Revue de littérature

1-problème de snell et application aux option bermudiennes

Auteur : Vincent Gangon
Resumè : Ce travail présente une résolution du problème de Snell dans le cas où les temps d'arrêts ont des valeurs comprises dans l'ensemble suivant $\{0, 1, ..., n\}$. Ce résultat est par la suite utilisé dans un contexte d'options bermudiennes.
Mots Clè : snell,temps d'arrêt a valeurs discrt, bèrmudienne.

2-arrêt optimal et application a la valorisation des options amèricains

Auteur :Gray Oger .
Resumè :Ce travail prèsente un marché financiere avec des options amèricaines,et l'application de l'enveloppe de snell sert à la valorisation et a la couverture d'options amèricaines .
Mots Clè :Marché financiere ,options amèricaines, l'enveloppe de snell.

3-ABSENCE D'ARBITRAGE ET MARTINGALES.

Auteur :Lionel Gomez Sanchez.
Resumè :Ce travail prèsentè une modélisation eu mathématique financière parmi lesquelles la stratègie de option amèricaines,en utilisant l'enveloppe de snell , et en comparant les options amèricains et europennes.
Mots Clè :stratègie d'arbitrage, temps d'arrêt optimal,l'enveloppe de snell.

4-MATHÉMATIQUE FINANCIÈRE

Auteur : Erwan Penchévre
résumé : Ce livre est un résumé complet de toutes les opérations mathématique liées aux mathématique financière, l'auteur du livre a abordé la clarification de certains points et les étudier, en particulier :l'espérance conditionnelle , algèbre et tribus , marchés financières , martingale et viabilité de marchés , couverture et marchés complets , Cox-Ross-Rubistien ,enveloppe de snell et option américaines
Mots Clè : option américain , marchés financièrs , martingale , Cox-Ross-Rubistien.

Synthèse :

À travers les lectures précédentes, nous avons dessiné un concept clair et unifié du problème de **snell** financier et les auteurs avaient pour but de lui trouver une solution et ont donné à chacun d'entre eux des concepts,des caractéristique et des types de problèmes de snell.

Chapitre 2

APERÇU THÉORIQUE

2.1 ENVELOPPE DE SNELL

Soit (Z_n) une suite adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. L'enveloppe de Snell de la suite (Z_n) est la suite (Un) définie par :

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= Z_n \vee E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n) \quad (0 \leq n < N) \end{aligned}$$

2.2 LA MARTINGALE

Définition 1 : une suite$(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ si pour tout n.X_n est F_n-mesurable.
Définition 2 : une suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aléatoire intégrables réelles adaptée est une martingale si :
$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ pour tout $n \leq N-1$.

Définition 3 : soit B_t un mouvement brownienne (MB) standard
$M_t = \mathcal{F}(B_t)$ est une martingale si on a :
i) $\mathcal{F}_t$ une filtration naturelle du (MB) standard $(B_t)_{t\geq 0}$
$\mathcal{F}_t = \sigma(B_t) \Longrightarrow (B_t)$ est $\mathcal{F}_t$-adaptée $\Longrightarrow \mathcal{F}(B_t)$ est aussi $\mathcal{F}_t$-adaptée
(f continue , dérivable)
ii) $E(|M_t|) = E(|\mathcal{F}(B_t)|) < +\infty$
puisque $M_t = \mathcal{F}(B_t)$ est continue de variable aléatoire,
$\mathcal{F}_t$-mesurable , M_t est aussi mesurable .
iii) $\forall s, t \ \ . \ 0 \leq s \leq t < \infty$
$E(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$
$\Longrightarrow M_t$ est bien une martingale.

2.3 LA SEMI-MARTINGALE

Un processus aléatoire X est une semi-martingale continue s'il admet une décomposition de la forme $X = M + A$ ou' M est une martingale locale continue et A un processus á variation bornée (adapté, continu et nul en 0). Une telle décomposition est unique, on parle de la décomposition canonique de la semi-martingale Si $X = M + A$ et $X' = M' + A'$ sont deux semi-martingales, on définit $< X, X' > := < M, M' >$.

2.4 LE MOUVEMENT BROWNIEN

soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ .On dit que X est un mouvement brownien s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes (équivalentes) :
(**a**) X est un processus gaussien centré et de fonction de covariance $E[X_s, X_t] = s \wedge t$.
(**b**) X est un processus à accroissements et stationnaires tel que $X_t \sim N(0, t)$.

2.5 LE TEMPS D'ARRÊT

on considérer $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtre dans les conditions habituelles.
Définition : le temps d'arrêt (τ) est une variable aléatoire définie :

$$\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty] \qquad (continue)$$

resp

$$\tau : \Omega \longrightarrow N \cup \{+\infty\}$$

$$(\mathbb{T} = N) \text{ (discret)}$$

telle que : $\forall t \in \mathbb{T} \quad , \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_n$
$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_n$.

2.6 LE TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

Un temps d'arrêt τ^* est optimal pour la suite $(Z_N)_{0\leq n\leq N}$ si

$$E(Z_{\tau^*}/\mathcal{F}_0) = \sup_{\tau\in T_{0,N}} E(Z_\tau/\mathcal{F}_0)$$

2.7 LA SUR-MARTINGALE

On dit que le processus stochastique $X = (X_n)_n$ est une sur-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ si :
*X est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
*$X_n \in L^1$ pour tout n .
* pour tout n , on a $E[X_n/\mathcal{F}_{n+1}] \leq X_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

2.8 LA FILTRATION

Une filtration sur un espace de probabilité (Ω, F, P) est un famille $(F_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \leq t$, on a $F_s \subset F_t$.

2.9 LA FILTRATION NATURELLE

on considéré un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, qui engendre la filtration $F^x = \sigma(X_s : s \leq t), t \geq 0$.cette filtration s appelle filtration naturelle, Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible à une date donnée :F_t^x représente l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t. Une filtration est P-complété pour une mesure de probabilité P si F_0 contient tous les événements de mesure nulle, ie.$N = \{N \in F \ \ tel\ que \ \ P(N) = 0\} \subset F_0$.

2.10 ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Soit X une variable aléatoire et B un événement. L'espérance conditionnelle de X sachant B est le nombre

$$\begin{aligned} E(X/B) &= \sum_{n\in X(\Omega)} np(X = n/B) \quad (discret) \\ &= \int_{x\in X(\Omega)} x.\, f(x/B) \quad (continue) \end{aligned}$$

Chapitre 3

APPLICATION DU L'ENVELOPPE DE SNELL EN FINANCE

3.1 enveloppe de snell et options américaines

Soit (Z_n) une suite adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. L'enveloppe de Snell de la suite (Z_n) est la suite (Un) suivante : [1]

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= Z_n \vee E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n) \quad (0 \leq n < N) \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1 *:*

L'enveloppe de Snell (Un) de la suite (Z_n) est la plus petite $\mathcal{F}_n$-sur-martingale majorant (Z_n).
Démonstration : Le fait que (Un) soit une sur-martingale majorant (Z_n) résulte immédiatement de sa définition. Montrons que c'est la plus petite. Soit (Y_n) une autre sur-martingale majorant (Z_n). Par récurrence descendante, supposons que $Y_{n+1} \geq U_{n+1}$. Alors $Y_n \geq E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Comme d'autre part $Y_n \geq Z_n$, on a bien

$$Y_n \geq Z_n \vee E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = U_n$$

[1] Erwan Penchévres, Mathématique Financières, 2011-2014.page :18

3.2 APPLICATION AUX OPTIONS AMÉRICAINS

Une option américaine dans un marché financier (S_n^0, S_n) est une suite Z_n adaptée[2].Par exemple, un call américain est une suite de la forme

$$Z_n = (S_n - K)_+ \tag{3.1}$$

Pour tout n, Z_n est le profit que permet l'exercice de l'option à la date n : contrairement aux options européennes, on n'est pas obligé d'attendre l'échéance pour exercer une option américaine. Un raisonnement par récurrence descendante permet de calculer la valeur d'une telle option dans un marché complet. Supposons qu'elle valeur U_n à la date n. C'est le prix de la couverture de l'option à cette date. À la date $(n-1)$, si le possesseur de l'option exerce, il empoche Z_{n-1} , et le vendeur de l'option doit donc être prêt à lui payer cette somme ; mais s'il n'exerce pas, le vendeur doit avoir un portefeuille de couverture dont la valeur à la date n sera au moins égale à U_n. U_n tel portefeuille, actualisé, est une martingale sous $\mathbb{P}^*$, donc sa valeur à la date $(n-1)$ sera au moins

$$E^*(\beta_n U_n/\mathcal{F}_{n-1})$$

Pour que le vendeur ne soit jamais pris à dépourvu, il faut donc que

$$U_{n-1} = Z_{n-1} \vee \frac{E^*(U_n/\mathcal{F}_{n-1})}{1+r}$$

On a alors

$$\tilde{U}_{n-1} = \tilde{Z}_{n-1} \vee E^*(\tilde{U}_n/\mathcal{F}_{n-1})$$

donc $(\tilde{U}_n)$ est l'enveloppe de Snell de $(\tilde{Z}_n)$.

Remarque 3.2.1

Le call américain est en fait identique au call européen ! On va le démontrer par récurrence. Supposons qu'ils ont la même valeur pour les dates > n. La convexité de la fonction $\tilde{S}_N$ *implique* $(\tilde{S}_N - \beta_N K)_+$ .entraîne l'inégalité suivante :

$$E^*(\tilde{U}_{n+1}/F_n) = E^*(\tilde{C}_{n+1}/F_n) = E^*((\tilde{S}_N - \beta_N K)_+/F_n) \geq (E^*(\tilde{S}_N/F_n) - \beta_N K) = (\tilde{S}_N - \beta_N K)_+$$

On a d'autre part $\beta_N \leq \beta_n$ donc :

$$(\bar{S}_N - \beta_N K)_+ \geq (\bar{S}_N - \beta_n K)_+ = \bar{Z}_n$$

[2] Erwan Penchévres, Mathématique Financières, 2011-2014.page :18

Finalement, $E^*(\tilde{U}_{n+1}/F_n) \geq \tilde{Z}_n$ donc $\tilde{U}_n = E^*(\tilde{U}_{n+1}/F_n) = E^*(\tilde{C}_{n+1}/F_n) = \tilde{C}_n$, ainsi les deux options ont déjà même valeur à la date n , ce qu'il fallait démontrer.

3.3 Quand faut-il exercer une option américaine ?

Il ne faut surtout pas exercer tant que $\tilde{Z}_n < \tilde{U}_n$. Dans le besoin, on a mieux à faire : vendre l'option à son prix U_n. Dès que $\tilde{Z}_n$ touche son enveloppe de Snell $\tilde{U}_n$, on peut exercer, Mais nous pouvons entrer dans la perte si nous attendons plus. La décomposition de Doob de la sur-martingale $(\tilde{U}_n)$ nous permettra de déterminer la dernière date optimale d'exercice d'une option américaine. [3]

3.4 Decomposition de Doob

Dans un marché complet, la valeur actualisée d'un portefeuille de couverture d'une option américaine est une martingale. Notons-la $\tilde{U}_n$. Pour qu'un tel portefeuille suffise à couvrir l'option, il faut que $(\forall n)$ $\tilde{M}_n \geq \tilde{U}_n$. Écrivons donc $\tilde{M}_n = \tilde{U}_n + \tilde{A}_n$, avec $\tilde{A}_n \geq 0$. Supposons connue la valeur d'un tel portefeuille jusqu'à la date n, et $\tilde{M}_0 = \tilde{U}_0$. Pour que $(\tilde{M}_n)$ soit une martingale, il faut et il suffit que

$$(\forall n) \qquad E^*(\tilde{M}_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n.$$

soit :

$$(\forall n) \qquad E^*(\tilde{A}_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n - E^*(\tilde{M}_{n+1}/\mathcal{F}_n).$$

Cette quantité est positive car la suite $(\tilde{M}_n)$ est une sur-martingale. Il suffit donc de poser

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{M}_n - E^*(\tilde{U}_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

$$\tilde{M}_{n+1} = \tilde{U}_{n+1} + \tilde{A}_{n+1}$$

Cette construction par récurrence des suites $(\tilde{M}_n)$ et $(\tilde{A}_n)$ s'appelle décomposition de Doob de la sur-martingale $(\tilde{U}_n)$.

[3] Erwan Penchévres, Mathématique Financières, 2011-2014.page :19

3.5 Lien avec les options bermudiennes

Définition : Une option bermudienne (ou option bermuda) est une option intermédiaire entre les options américaines et européennes. En effet, alors qu'une option américaine peut être exercée n'importe quand jusqu'à la date d'échéance et une option européenne seulement à la date d'échéance, l'option bermudienne peut être exercé à plusieurs dates entre son émission et son échéance.

Le problème de Snell tel qu'énoncé précédemment n'est qu'un problème théorique, mais il est tout de même possible de l'appliquer aux options bermudiennes. Si on reprend l'énoncé de départ, on peut redéfinir le tout en termes financiers.Par exempleX_t est la valeur d'exercice de l'option au temps t, et donc le processus stochastique U représente l'évolution de la valeur de l'option au cours du temps.

Si on se met a la place du détenteur de l'option, l'option bermudiene nous permet à certains moments prédéfinis de choisir entre exercer son droit ou bien attendre le prochain moment où un tel choix sera possible. Le problème de Snell tente en fait de répondre à cette question : Dois-je exercer maintenant mon droit ou attendre encore ? En d'autres mots, à quel moment dans le temps est-ce que la valeur d'exercice de mon option sera la plus grande ?

Le problème de Snell cherche en fait le temps d'arrêt optimal τ^* . C'est-à-dire, à quel moment doit-on exercer l'option pour en retirer un maximum de profit ? Cette décision se fait en fonction d'un certain critère qui nous permet à chaque moment de décider si la valeur d'exercice de l'option au temps présent est plus grande que celle qu'elle aura dans le futur. Comme on ne peut prédire ce qui se passera dans le futur avec la valeur de l'option, on compare ce qu'on a maintenant avec l'espérance de la valeur de l'option dans le futur à chaque moment d'exercice possible. La fonction U_t aussi appelée l'enveloppe de Snell,c' est la fonction qui permet cette comparaison puisque elle représente la valeur actualisée de l'option au temps t.[[4]]

[4]Vincent Gagnon , Problème de snell et application aux options bermudiennes ,18-04-2008.page :5

3.6 Options américaine et européenne

Proposition 3.6.1

Soit C_n la valeur de l'option américaine au temps n associé à une suite $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ et c_n la valeur de l'option européenne définie par la variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable $h = Z_n$. Alors $C_n \geq c_n$.
De plus, Si $c_n \leq Z_n$ pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, nous avons

$$c_n = C_n.$$

L'inégalité $C_n \leq c_n$ a un sens puisque l'option américaine donne plus de droit que l'option européenne. [5]
Preuve : Puisque $(\tilde{C_n})_n$ est une sur-martingale, alors

$$\begin{aligned}\tilde{C_n} \geq E^*(\tilde{C}_N/F_n) &= E^*(\tilde{c}_N/F_n)\\ &= \tilde{c}_N\end{aligned}$$

d'ou' $C_n \leq c_n$.
Si $c_n > Z_n$ pour tout n, alors la suite $(\tilde{c}_n)_n$ qui est une martingale sous $\mathbb{P}^*$, est aussi une sur-martingale dominant $(\tilde{Z}_n)_n$ et puisque $(\tilde{C_n})_n$ est la plus petite sur-martingale qui domine $(\tilde{Z}_n)_n$, alors

$$\tilde{C_n} \leq \tilde{c}_n$$

Remarque 3.6.2

On vérifie aisément que si la relation de la proposition n'a pas lieu, il y aurait des opportunités d'arbitrage en vendant les options. Considérons le cas d'un marché avec un seul actif risqué de prix S_n au temps n et un actif sans risque de taux constant égal à r tel que $S_n^0 = (1+r)^n$. Avec les notations utilisées à la proposition , si nous posons $Z_n = (S_n - K)_+$, c_n est le prix au temps n d'un call européen d'échéance N et de prix d'accord K, C_n est le prix correspondant au call américain. Nous avons

[5] Lionel Gomez Sanchez, Absence d'arbitrage et martingales,Février 2002.page :29-30

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= (1+r)^{-N}E^*((S_N-K)_+/\mathcal{F}_n)\\ &\geq E^*(\tilde{S}_n - K(1+r)^{-N})/\mathcal{F}_n)\\ &\leq \tilde{S}_n - K(1+r)^{-N}.\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $(\tilde{S}_n)_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.
Il s'ensuit $c_n \geq S_n - K(1+r)^{-(N-n)} \geq S_n - K$ pour $r \geq 0$. Comme $c_n \geq 0$, nous avons alors $c_n \geq (S_n - K)_+$ et par la proposition , $C_n = c_n$. Alors le prix des options américaine et européenne sont identiques. Cela n'est pas vrai pour le cas d'un put.

3.7 Temps d'arrêt optimal

3.7.1 Définition et Caractérisation

Définition 3.7.1

On dit que τ^* est un temps d'arrêt optimal, vu de $t=0$, pour le problème d'arrêt $((Z_t)_{t\geq 0}, (F_t)_{t\geq 0})$ si $E[Z_{\tau^*}] = E[U_0] = \sup_{\tau\in\Gamma_{0,\infty}} E[Z_\tau]$.
Vu de $t \geq 0$, on a la même caractérisation : $E[Z\tau^*_t] = E[U_t] = \sup_{\tau\in\Gamma_{0,\infty}} E[Z_\tau]$.
Du point de vue des options américaines, un temps d'arrêt optimal sera donc un temps d'arrêt qui permet effectivement de réaliser la valeur initiale de l'option au moment de l'exercice. On a la caractérisation suivante. [[6]]

Proposition 3.7.2

τ^* est optimal vu de 0 si et seulement si :
i/ $U_{\tau^*} = (U_{t\vee\tau^*})_{t\geq 0}$ est une martingale.
ii/ $U_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$.
Avant de s'intéresser à l'existence de temps optimaux, on donne un point de vue déterministe qui éclaire la proposition ci-dessus et le lien entre (U_t) et (Z_t). Supposons donc que tous les processus sont déterministes (ce qui revient à postuler $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}\forall t$). $Z = (z_s)_{s\geq 0}$ et $U = (u_t)_{t\geq 0}$ sont donc des fonctions et on a $u_t = \sup_{s\geq t} z_s$.

[6] Gray Oger, Arrêt optimal et application à la valorisation des options américaines,12-10-2011.page :7

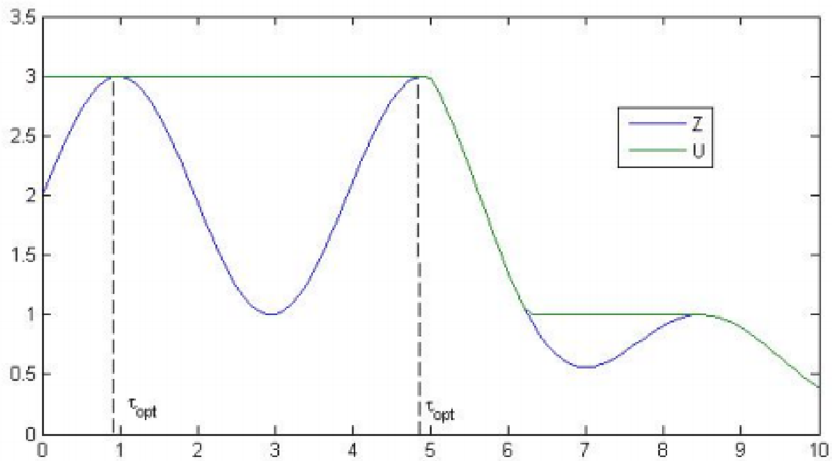

Figure – Processus obstacle (Z), enveloppe de Snell (U), et temps d'arrêt optimaux

Sur la figure , on représente les deux processus Z et U. Ici, il y a deux temps d'arrêt optimaux, et l'on voit que, jusqu'à au plus grand temps d'arrêt optimal, U est martingale (c'est-'a-dire constante ici). Notons qu'entre les deux temps d'arrêt optimaux, il n'y en a aucun autre. Par ailleurs, il peut ne pas exister de temps d'arrêt optimal (par exemple si Z est strictement croissante sur R_+). A horizon fini, si $Z_t \leq Z_T \ \ \forall t \leq \mathbb{T}$, alors le plus grand temps d'arrêt optimal est toujours $\mathbb{T}$. On verra (et c'est naturel) que l'équivalent aléatoire de cette condition est $Z_t \leq E[Z_t|F_t]$.

3.7.2 Existence de temps d'arrêt optimaux

Au vu de ce qui précède, $\tau^* = \inf\{t \geq 0 \ tq \ U_t = Z_t\}$ est un candidat naturel pour un temps d'arrêt optimal. On s'intéresse d'abord aux temps d'arrêt ε-optimaux. On pose, pour $\varepsilon > 0$,
$D_t^\varepsilon = s \geq t, U_s < Z_s + \varepsilon$. la proposition :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} U_t = \lim_{t \longrightarrow \infty} \sup Z_t.$$

Notons que tous les résultats s'étendent à horizon fini en remplaçant $T_{t,\infty}$, par $T_{t,T}$. implique alors que pour $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $D_t^\varepsilon < \infty$. Et c'est un temps d'arrêt comme temps d'entrée d'un processus c-à-d F_t-adapté dans l'ouvert $]-\infty, \varepsilon[$ On a la proposition suivante : [7]

Proposition 3.7.3 *:*

Pour $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$, D_t^ε est un F_t temps d'arrêt et :
$E[U_t] = E[U_{D_t^\varepsilon}]$ et $E[U_{D_t^\varepsilon}] \leq E[U_{Z_t^\varepsilon}] + \varepsilon$.

[7]Gray Oger, Arrêt optimal et application à la valorisation des options américaines,12-10-2011.page :7-8

Èléments de preuve :(U_t) est une sur-martingale positive de la classe (D), donc par le théorème de Doob-Mayer on peut écrire $U = M - A$ où :
i) M est une martingale de la classe (D).
ii) A est un processus prévisible, croissant, et $A_0 = 0$.
On peut alors montrer que (A_t) et $A_{D_t^\varepsilon}$ sont indistinguables de la preuve qu'on ne détaille pas ici, l'intérêt est d'introduire le processus (A_t) qui sera utile dans la suite).
On a donc facilement :

$$\begin{aligned} E[U_t] &= E[M_t] - E[A_t] \\ &= E[M_{D_t^\varepsilon}] - E[A_{D_t^\varepsilon}] \\ &= E[U_{D_t^\varepsilon}] \end{aligned}$$

De plus $D_t^\varepsilon < \infty$ et U et Z sont continues à droite donc $U_{D_t^\varepsilon} \leq Z_{D_t^\varepsilon} + \varepsilon$, et ainsi :

$$E[U_{D_t^\varepsilon}] \leq E[Z_{D_t^\varepsilon}] + \varepsilon$$

Cette approximation via les temps d'arrêt ε-optimaux permet de prouver l'existence d'un temps d'arrêt optimal dans le cas d'un obstacle (Z_t) régulier.

Théoréme 3.7.4 *:*

On suppose que (Z_t) est régulier, c'est-à-dire qu'il est continu et vérifie

$$E[\sup_{R_+} Z_s] < \infty.$$

On a :
i) $(U_t) = Snell(Z_t)$ est lui aussi régulier.
ii) Si l'on pose $\tau_0 = \inf\{s \geq 0 \;\; tq \;\; U_s = Z_s\}$, alors il existe un temps d'arrêt optimal si et seulement si $P(\tau_0 < \infty) = 1$, et alors τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal.
On voit de plus qu'en se plaçant à horizon fini $\mathbb{T} > 0$, on a $P(\tau_0 < \infty) = P(\tau_0 \leq \mathbb{T}) = 1$, donc sous les hypothèses de régularité l'existence d'un temps d'arrêt optimal est garantie. Si l'on se place de plus dans un cadre discret, l'hypothèse de régularité devient superflue, et il y a ainsi toujours un temps d'arrêt optimal au problème. On peut enfin s'intéresser au plus grand (s'il existe) temps d'arrêt optimal. On a la proposition suivante :

Proposition 3.7.5 *:*

On suppose toujours que (Z_t) est un obstacle régulier. Alors :
i) Si τ^* est un temps d'arrêt optimal, alors $\tau^* \leq \tau_{\max} = \inf\{s; A_s > 0\}$.
ii) Si $P(\tau_{\max} < \infty) = 1$, alors $\tau_{\max}$ est optimal.
On peut en déduire, à horizon fini, un résultat déjà évoqué plus haut (dans le cas déterministe), à savoir que, si ps, $\forall t \geq 0$, $E[Z_T|F_T] \geq Z_T$, alors $\tau_{\max} = T$. Avant de passer à la théorie de la valorisation des options américaines et l'application de la théorie ci-dessus, résumons ce que nous avons montré. Guidés par l'équation

$$V_t = \sup\left\{E\left[\frac{h_\tau}{S_\tau^0}|\mathcal{F}_t\right]; \tau \ t.a.valeurs\ dans\ [t,T]\right\}$$

qui décrit a priori (on le détaille dans la section suivante) le prix d'une option américaine, on a défini l'enveloppe de Snell qui permet de donner un sens probabiliste à cette équation. Nous avons fait le lien entre le processus obstacle et son enveloppe de Snell, en particulier via le principe de programmation dynamique, et nous avons vu comment on pouvait définir des temps d'arrêt optimaux au problème en considérant ces deux processus.

3.8 Application du problème :

Nous avons mené une étude sur trois actions (**Carrefour**,**Orange**,**Peugeot**) ,d'une bourse française (CAC 40) , et nous avons remarqué comment résoudre le problème de senll de la courbe de chaque action.
Remarque : Temps d'étude de 27|02|2018 jusqu'à 25|05|2018.
Carrefour :

Figure 1 – Les actions Carrefour ont changé au cours de 3 mois

DATE	X = U_n	variation
28|02|2018	18.96	+18.7 %
07|03|2018	17.59	+10.1 %
20|03|2018	17.01	+6.4 %
22|03|2018	16.95	+6.1 %
29|03|2018	16.86	+5.5 %
05|04|2018	16.89	+5.7 %
26|04|2018	17.08	+6.9 %
30|04|2018	17.04	+6.7 %
17|05|2018	16.37	+2.5 %
22|05|2018	16.57	+3.8 %

Notons que :
U_n : est une enveloppe de snell.
C_n : est un processus adaptée liée à l'action carrefour.
$\star$ le temps utilisé dans l'étude et les jours .
alors :
$U_n = C_n$ à touts les points X

DATE	$C_n = U_{n+i}$	X
28|02|2018	$C_n = U_n$	18.96
07|03|2018	$C_n = U_{n+1}$	17.59
20|03|2018	$C_n = U_{n+2}$	17.01
22|03|2018	$C_n = U_{n+3}$	16.95
29|03|2018	$C_n = U_{n+4}$	16.86
05|04|2018	$C_n = U_{n+5}$	16.89
26|04|2018	$C_n = U_{n+6}$	17.08
30|04|2018	$C_n = U_{n+7}$	17.04
17|05|2018	$C_n = U_{n+8}$	16.37
22|05|2018	$C_n = U_{n+9}$	16.57

Nous soulevons également le problème de snell

$$\begin{cases} U_n = C_n \\ U_n = \sup(C_n \ , \ E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

le temps d'arrêt optimal défini par :
$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \ , \ tq \ U_t = C_t\}$
τ^* : représente les jours
Dans ce cas le temps (28|02|2018) est un bien temps d'arrêt optimal car la valeur 18.96 vérifier la condition

$$E(C_{\tau^*}) = \sup E(C_\tau) = 18.96$$

et cette valeur liée à plus grand variation v = +18.7 %.

Orange :

Figure 2 – Les actions orange ont changé au cours de 3 mois

DATE	X = U_n	**variation**
16|03|2018	14.04	-6.2 %
29|03|2018	13.79	-7.8 %
05|04|2018	13.99	-6.5 %
10|04|2018	14.16	-5.3 %
12|04|2018	14.20	-5.1 %
18|04|2018	14.54	-2.8 %
23|04|2018	14.89	-0.5 %
02|05|2018	15.15	+1.2 %
04|05|2018	15.17	+1.4 %
09|05|2018	15.24	+1.9 %
11|04|2018	15.19	+1.6 %
17|05|2018	14.64	-2.1 %
24|05|2018	15.00	+0.3 %

Notons que :
U_n : est une enveloppe de snell .
O_n : est un processus adaptée liée à l'action orange.
Donc :

DATE	$O_n = U_{n+i}$	X
16|03|2018	$O_n = U_n$	14.04
29|03|2018	$O_n = U_{n+1}$	13.79
05|04|2018	$O_n = U_{n+2}$	13.99
10|04|2018	$O_n = U_{n+3}$	14.16
12|04|2018	$O_n = U_{n+4}$	14.20
18|04|2018	$O_n = U_{n+5}$	14.54
23|04|2018	$O_n = U_{n+6}$	14.89
02|05|2018	$O_n = U_{n+7}$	15.15
04|05|2018	$O_n = U_{n+8}$	15.17
09|05|2018	$O_n = U_{n+9}$	15.24
11|04|2018	$O_n = U_{n+10}$	15.19
17|05|2018	$O_n = U_{n+11}$	14.64
24|05|2018	$O_n = U_{n+12}$	15.00

$U_n = O_n$ à touts les points X, mais la valeurs qui satisfait la condition est 15.24 car le problème de snell posé par :

$$\begin{cases} U_n = O_n \\ U_n = \sup(O_n\ ,\ E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \quad\quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

Notez qu'aujourd'hui (09|05|2018) est un bien temps d'arrêt optimal .car la valeur 15.24 vérifier la condition

$$E(O_{\tau^*}) = \sup E(O_\tau) = 15.24$$

Cette valeur liée à plus grand variation v = +1.9 %

Peugeot :

Figure 3 – Les actions peugeot ont changé au cours de 3 mois

DATE	X= U_n	**variation**
01|03|2018	19.46	-5.8 %
06|03|2018	19.26	-6.8 %
08|03|2018	19.31	-6.6 %
15|03|2018	19.05	-7.8 %
27|03|2018	18.96	-8.3 %
29|03|2018	19.54	-5.5 %
06|04|2018	19.99	-3.3 %
10|04|2018	20.41	-1.3 %
13|04|2018	20.41	-1.3 %
17|04|2018	20.46	+0.4 %
20|04|2018	20.80	+0.7 %
30|04|2018	20.42	-1.1 %
08|05|2018	20.32	-1.6 %
22|04|2018	20.95	+1.4 %
25|05|2018	20.69	+0.2 %

En notons que :
U_n : est une enveloppe de snell .
P_n : est un processus adaptée liée à l'action peugeot .
Il y a 15 valeurs vérifient $U_n = P_n$,ils sont répertoriés dans le tableu ci-dessus .

DATE	$P_n = U_{n+i}$	X
01|03|2018	$P_n = U_n$	19.46
06|03|2018	$P_n = U_{n+1}$	19.26
08|03|2018	$P_n = U_{n+2}$	19.31
15|03|2018	$P_n = U_{n+3}$	19.05
27|03|2018	$P_n = U_{n+4}$	18.96
29|03|2018	$P_n = U_{n+5}$	19.54
06|04|2018	$P_n = U_{n+6}$	19.99
10|04|2018	$P_n = U_{n+7}$	20.41
13|04|2018	$P_n = U_{n+8}$	20.41
17|04|2018	$P_n = U_{n+9}$	20.46
20|04|2018	$P_n = U_{n+10}$	20.80
30|04|2018	$P_n = U_{n+11}$	20.42
08|05|2018	$P_n = U_{n+12}$	20.32
22|04|2018	$P_n = U_{n+13}$	20.95
25|05|2018	$P_n = U_{n+14}$	20.69

avec le problème de snell posé par

$$\begin{cases} U_n = P_n \\ U_n = \sup(P_n \ , \ E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \quad\quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

τ^* : représente les jours
$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \ , \ tq \ U_t = P_t\}$
Notez qu'aujourd'hui (22|05|2018) est un bien temps d'arrêt optimal car 20.95 vérifient

$$E(P_{\tau^*}) = \sup E(P_\tau) = 20.95$$

Cette valeur liée à plus grand variation v = +1.4 %

Conclusion

le problème de snell est un problème central dans le domaine des options financières, il a également un rôle important au sien du marché financier.
Nous avons noté à travers l'étude que les hypothèses présentées dans le premier sujet confirmaient et résultaient des problèmes partiels du problème présenté.Il s'avère que le problème de Snell est une problème d'optimisation basé sur un temps d'arrêt optimal,C'est ce que nous atteignons à travers l'étude appliquée,Grâce à l'étude appliquée du problème **SNEL**, nous avons constaté que la solution est toujours présente et ceci est noté dans les 3 exemples précédents.
Comme ça l'application du problème de snell est ouverte à tous jeux de hasard basé les martingales.

Bibliographie

[1] Neveu, J. (1975). Discrete-parameter Martingales . North Holland, Amsterdam.

[2] Brennan, M. and Schwartz, E. (1977).The valutation of American put options.Journal of Finance, XXXII :449-462.

[3] Boyle, P.(1977).Options : A Monte Carlo approach. Journal of Financial Economics, 4 :323-338

[4] Tilley, J.(1993). Valuing American options in a path simulation model. Transactions of the Society of Actuaries, 45 :83-104

[5] Broadie, M. and Glasserman, P. (1997).Pricing American-style securities using simulation.Journal of Economics Dynamics and Control, 21 :1323-1352.

[6] Longstaff, F., Schwartz, E.(2001). Valuing American options by simulation : A simple least-square approach . The Review of Financial Studies, 14 :113-147.

[7] Broadie, M. and Glasserman, P. (2004).A stochastic mesh methode for pricing high-dimensionnal American option. Journal of Computationnal Finance, 7 :35-72.

[8] Rogers, C.(2002).Monte Carlo valuation of American options. Mathematical Finance, 12 :271-286.

[9] Andersen, L. and Broadie, M. (2004).Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensionnal Américain options.Management Science, 50 :1222- 1234.

[10] Broadie, M. and Glasserman, P. (2004).A stochastic mesh methode for pricing high-dimensionnal American option. Journal of Computationnal Finance, 7 :35-72.

[11] Carriere , J.(1996). Valuation of the early-exercice price for options using simulations and non-parametric regression.Insurance : Mathematics and Economics, 19 :19-30.

[12] Vincent Gagnon , Problème de snell et application aux options bermudiennes ,18-04-2008.

[13] Erwan Penchévres, Mathématique Financières, 2011-2014.

[14] Gray Oger, Arrêt optimal et application à la valorisation des options américaines,12-10-2011,

[15] Lionel Gomez Sanchez, Absence d'arbitrage et martingales,Février 2002.

- ملخص -

يعتبر مشكل سنل من اكثر المشاكل المالية دراسة ،فقد تبنت دراسته العديد من الخيارات من بينها الامريكية والاوروبية وخيار برمودا .تطرقنا في هذا العمل الى نمذجة ومعرفة مفهوم سنل وخصائصه وكيفية العمل به. كما يرتكز مشكل سنل المالي في دراسته على الترشيحات والتضعيفات وبوجه الخصوص على تحديد زمان توقف تتم فيه العملية يسمى بزمان التوقف الامثل .

كلمة المفتاح - مشكل سنل .الترشيحات .التضعيفات .زمان التوقف الامثل

-Résume

Le problème de Snell étant l'un des problèmes financiers les plus étudiés, son étude a adopté de nombreuses options, dont l'option américaine, européenne et bermudienne, Dans ce travail, nous avons discuté de la modélisation et de la connaissance du concept de Snell et de ses caractéristiques, et comment y faire face, Nous avons adopté l'étude de ce problème sur la martingale et la filtrations ,Il est également lié à l'identification d'un temps d'arrêt spécifique pour que l'opération ait lieu, On l'appelle le temps d'arrêt optimal.

Mots clés : problème de Snell , la filtrations , la martingales , le temps d'arrêt optimal.

obstract -

Since Snell's problem is one of the most studied financial problems, his study has adopted many options, including the American, European and Bermudian option. In this work, we discussed modeling and knowledge of the concept of Snell and its characteristics, and how to deal with it, We adopted the study of this problem on martingale and filtrations, It is also related to the identification of a specific downtime for the operation to have place, It's called the optimal downtime.

Key word: Snell problem, Nominations, Tensions, Optimal downtime.