بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم و رحمة الله تعالى و بركاته

ضيوفنا الكرام
حللتم أهلا و طبتم سهلا

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة
ماستر أكاديمي
تخصص:تحليل
تحت عنوان:

التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

14 جوان 2018

مخطط العرض

1. مفاهيم أساسية
   المؤثرات ونظرية الأطياف

2. التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

مخطط العرض

1. مفاهيم أساسية

المؤثرات ونظرية الأطياف

2. التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

المؤثرالموجب ،القيمة المطلقة و التقايس الجزئي

مخطط العرض

1. مفاهيم أساسية

المؤثرات ونظرية الأطياف

2. التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

المؤثرالموجب ،القيمة المطلقة و التقايس الجزئي

التحليل القطبي

مقدمة

إن التحليل الدالي الذي يهتم بدراسة فضاءات الدوال ,و من مفاهيمه مفهوم المؤثرات . و في مذكرتنا هذه تطرقنا إلى دراسة التحليل القطبي ، و اعتمدنا على المؤثر القرين لنفسه من نوع خاص.

تحتوي هذه المذكرة المعنوة ب:

" التحليل القطبي للمؤثرات الخطية"

على فصلين :

1. الفصل الاول:"مفاهيم اساسية "،و عرفنا فيه أهم المفاهيم المتعلقة بالتبولوجيا ،التقايس ،التحليل المركب و التحليل الدالي و بلأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية التي سنستعملها في الفصل الأول.
2. الفصل الثاني:"التحليل القطبي للمؤثرات الخطية "، و تطرقنا فيه إلى مفهوم الجذر التربيعي و المؤثر الموجب ; كما قمنا ببرهان النظريات المتعلقة بمؤثر التقايس الجزئي و علاقته بقرينه .
بالإضافة إلى برهان وجود و وحدانية التحليل القطبي .و كذلك تبيين أهم تطبيقاته.و اعتمدنا في الدراسة على مؤثر قرين لنفسه من نوع خاص.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن D مجموعة غير خالية من X , $(D \subseteq X)$.

تعريف

- إذا أرفق بكل عنصر x من D، عنصرا معينا y من Y ، يقال أنه قد عرف مؤثرا من X في Y ، يرمز له بالرمز F، ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.
- المجموعة D، تسمى مجموعة تعريف المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y ، حيث $y = F(x)$ و $x \in D(F)$، تسمى مجموعة قيم المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $E(F)$، و نكتب:
$$E(F) = \{y \in Y / y = Fx, x \in D(F)\}$$

تعريف

المؤثر F من X في Y ، يقال أنه خطي، إذا تحقق مايلي:

- المجموعة $D(F)$، فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X .
- $\forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

.

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y ، بالرمز $L(X, Y)$.

المؤثرات الخطيةالمحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y .

تعريف

- يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا حول كل مجموعة محدودة في X، إلى مجموعة محدودة في Y.
- يقال أن F محدود، إذا تحقق: $\exists \alpha > 0, \forall x \in X \longrightarrow \|Fx\|_Y \leqslant \alpha \|x\|_X$ نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y، بالرمز $l(X, Y)$

المؤثر القرين

ليكن H_1, H_2 فراغي هيلبار، و F مؤثر من $l(H_1, H_2)$.

تعريف

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F ، المؤثر F^* ، المعرف من H_2 في H_1 ، كالتالي
من أجل كل (x, y) ، من $H_2 \times H_1$ يكون:

$$\langle Fx, y \rangle = \langle x, F^* y \rangle$$

تعريف

يقال أن المؤثر F قرينا لنفسه، إذا إنطبق على قرينه، أي $F = F^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Fx, y \rangle = \langle x, Fy \rangle$$

بالإضافة إلى تعريف النظيم للمؤثر القرين لنفسه، يعرف النظيم كالتالي:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle Fx, x \rangle|$$

يرمز لمجموعة المؤثرات القرينة لنفسها بالرمز $AL(H)$.

التحليل الطيفي

كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_λ متعلقة بوسيط حقيقي μ، و تحقق:

- ❖ $E_\lambda \leq E_\mu; \qquad \lambda \leq \mu$
- ❖ $E_{\lambda+0} = E_\lambda$
- ❖ $E_\lambda = I \quad \lambda \geq M_F \longrightarrow; \qquad E_\lambda = 0 \quad \lambda < \mu \longrightarrow$.

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F = \int_{m_F-0}^{M_F} \lambda dE_\lambda$$

الدالة الطيفية

تعريف

نعرف الدالة الطيفية لـ F بأنها الدالة E_λ.

الفصل الثاني

التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

المؤثرالموجب و التقايس الجزئي و القيمة المطلقة

ليكن F مؤثرا من $l(H)$، حيث H فراغ هيلبار.

المؤثر الموجب

يقال أن المؤثر F من $Al(H)$ ، أنه موجب (أكبر من المؤثر المعدوم)، ونكتب: $F > 0$ ، إذا كان

$$\langle Ff, f\rangle > 0, \quad \forall f \in H$$

القيمة المطلقة

تعرف القيمة المطلقة للمؤثر F ويرمز لها بالرمز $|F|$ بأنها المؤثر الوحيد T الذي يحقق:

$$T^2 = F^* F$$

أي $|F| = \sqrt{F^* F}$.

التقايس الجزئي

ليكن U مؤثر من H يقال إنه تقايس جزئي إذا وجد فضاء M من H :
$M = D(U) \subset H$ حيث :

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in D(U);$$

$$U(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{D(U)}$$

التحليل القطبي

لكل مؤثر F من $L(H)$ يوجد شكل وحيد تقايس جزئي يحقق الصيغة:

$$F = U|F|$$

الصيغة الأخيرة تسمى التحليل القطبي للمؤثر F و تعميم للصيغة المركبة $Z = |Z|e^{\imath\theta}$.

1

قضية

من أجل كل مؤثر F يكون:

$$U_F^* = U_{F^*} \qquad (2)$$

البرهان

لدينا:

$$F|F| = |F^*|F \qquad (3)$$

بالتراجع نجد $F(F^*F)^n = (F^*F)^n F$

و منه من أجل كل كثير حدود P يكون : $FP(F^*F)^n = P(F^*F)^n F$

و باعتبار أن الجذر التربيعي للمؤثر غير سالب هو نهاية قوية لمتتالية كثير حدود نحصل على :

$$U_{F^*}|F^*|^2 U^*{}_{F^*} = (U_{F^*}|F^*|)(U_{F^*}|F^*|)^*$$

$$= F^*F^{**} = F^*F = |F|^2$$

$$U^*{}_{F^*}|F|^2 = U^*{}_{F^*}U_{F^*}|F^*|^2 U^*{}_{F^*} = |F^*|^2 U^*{}_{F^*}$$

لدينا:

$$U^*{}_{F^*}|F|^2 = U^*{}_{F^*}U_{F^*}|F^*|^2U^*{}_{F^*} = |F^*|^2U^*{}_{F^*}$$
$$= |F^*|F^{**}$$
$$= |F^*|F = F|F|$$

التي تكافئ :

$$U^*{}_{F^*}|F| = F|_{E(|F|)}$$

المساواة الأخيرة مع الساواة الواضحة $U^*{}_{F^*}|F| = F|_{\ker(|F|)}$ نحصل على :

$$U^*{}_{F^*}|F| = F$$

$$\ker(U^*)_{F^*} = (E(U_{F^*}))^{\perp}$$

أي: $\ker U^*{}_{F^*} = (E(U_{F^*}))^{\perp} = kerF$
و منه: $\ker(U^*)_{F^*} = \ker(|F|)$
و بما أن F قرين لنفسه فإن U_F أيضا قرين لنفسه. عندها يكون $U_F = SgnF$

في بعض الأحيان من المفيد في التحليل القطبي للمؤثر القرين لنفسه .
نضع تناظر قرين لنفسه S_F نعرفه كالتالي:

$$S_F = U_F|_{\overline{E}(F)} \oplus I_{\ker F}$$

و عليه نكتب : $F = S_F|F| = |F|S_F$
عندها يكون: $U_F = S_F P_{E(F)} = P_{E(F)} S_F$
يمكن تسمية تناظر قرين لنفسه S_F بالإشارة الحادة للمؤثر F.

قضية

❖ ليكن

$$H = H_1 \oplus H_2 \qquad (4)$$

تحليل الفراغ H و B مؤثر من H_2 في H_1 و C مؤثر قرين لنفسه في H حيث :

$$BC = 0 \qquad (5)$$

المؤثرات B و C تحقق:

❖ $P_{\ker B}|C| = C$

❖ $U_B|C| = 0$

❖ $S_C P_{\ker B} = P_{\ker B} S_C$

❖ $\ker(|B| + |C|) = \ker(B) \bigcap \ker(C)$

❖ $(B^* B + C^2)^{1/2} = |B| + |C|$

❖ نعتبر الان F مؤثر قرين لنفسه.باعتبار الصيغة (4) و (5) نكتب:

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$AB = 0 \qquad (7)$$

نظرية

المؤثر F المعرف بالصيغ $(5),(6)$ و (7) يحقق:

$$\begin{cases} |F| = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix} \\ S_F = \begin{bmatrix} S_A P_{\ker B^*} & U_B \\ U_{B^*} & S_C P_{\ker B} \end{bmatrix} \end{cases}$$

البرهان

المعدلات الموجودة في القضية السابقة محققة

$$F^2 = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 + BB^* & AB + BC \\ B^*A + CB^* & BB^* + C^2 \end{bmatrix}$$

ومنه بإستعمال (4) و (5) من القضية السابقة و الصيغة الأخيرة نجد :

$$F^2 = \begin{bmatrix} A^2 + BB^* & 0 \\ 0 + CB^* & BB^* + C^2 \end{bmatrix} \qquad 9)($$

ومنه بإستخدام العلاقةالاخيرة من النظرية السابقة والصيغة الأخيرة نجد:

$$|F| = (F^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (A^2 + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 + CB^* & (BB^* + C^2)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}$$

ومنه بإستخدام العلاقة الاخيرة من النظرية السابقة والصغية الأخيرة نجد:

$$|F| = (F^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (A^2 + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 + CB^* & (BB^* + C^2)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}$$

من ناحية ثانية ليكن S مؤثر قرين لنفسه مصفوفته حسب (4) من القضية السابقة $(S_{ij})_{ij=\overline{1,2}}$ و $S_{21} = S_{12}^*$

S يعتبرإشارة حادة للمؤثر F إذا وفقط إذا تحققت الشروط:

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ S_{11}(|B^*|+|A|)=A \\ 2)\ S_{12}(|B|+|C|)=B \\ 3)\ S_{21}^{*}(|B^*|+|A|)=B^* \\ 4)\ S_{22}(|B|+|C|)=C \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5)\ S_{11}^{2}+S_{12}S_{12}^{*}=I_{H_1} \\ 6)\ S_{22}^{2}+S_{12}^{*}S_{12}=I_{H_2} \\ 7)\ S_{11}S_{12}=S_{12}S_{22}=0 \end{array}\right. \tag{11}$$

12) (

$$\begin{cases} \forall h_1 \in \ker B^* \cap \ker A \\ \forall h_2 \in \ker B \cap \ker C \\ 8)\ S_{11}h_1 + S_{12}h_2 = h_1 \\ 9)\ S_{12}^* h_2 = S_{22}h_2 = h_2 \end{cases}$$

المجموعة (10) تعني $S|F| = F$

المجموعة (11) تعني $S^2 = I_H$

المجموعة (12) تعني $S|_{\ker |F|}$

أيضا نلاحظ أن الشروط $(4),(2),(6),(9)$ تؤول إلى $(1),(3),(5),(8)$ على التوالي في (4)

$$(S_{12} \to S_{12}^{*} \quad ; S_{22} \to S_{11}; \quad h \leftrightarrows h_2) \qquad 13)($$

نأخذ الأن في مكان S المصفوفة الثانية في الصيغة (5) نحصل على الصيغة الأخيرة من أجل S
هذا يعني أنه من أجل برهان المساواة $S = S_F$ يكفي برهان فقط العلاقات $(4),(2),(6),(7),(9)$ في هذه الحالة

(2

$$S_{12}(|B|+|C|) = V_B|B|+ = V_B|C| = B$$

(4

$$S_{22}(|B|+|C|) = S_C P_{\ker B}|B| = SP_{\ker B}|C| = S_C P_{\ker B}|B| = S|C| = C$$

(6

$$S_{22}^2 + S_{12}^* S_{12} = S_C^2 P_{\ker B} + V_B^* V_B = P_{\ker B} = P_{E(B^*)} = I_{H_2}$$

(7

$$S_{11}S_{12}+S_{12}S_{22} = S_A P_{\ker B^*} V_B + V_B S_C P_{\ker B} = V_B + V_B P_{\ker B} S_C = 0$$

والأن نبرهن (9) :

ليكن $h_2 \in \ker B \cap \ker C$; $h_1 \in \ker B^* \cap \ker A$ أشعة كيفية،

$$V_B^* h_1 = V_{B^*} h_1 \in V_{B^*} \ker B^* = \{0\}$$

من ناحية ثانية

$$P_{\ker B} h_2 = h_2 \quad ; \quad S_C h_2 = h_2$$

ومنه :

$$S_{12}^* h_1 + S_{22} h_2 = V_B^* h_1 + S_C P_{\ker B} h_2 = h_2$$

خاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على تبيين وجود و وحدانية التحليل القطبي وأهميته في التحليل الدالي ،فقد ركزنا في الدراسة على مؤثر قرين لنفسه من نوع خاص. لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع و بعض المراجع من التحليل الدالي و نظريةالمؤثرات.

كل هذا يكمن في تسهيل حلول المعادلات الدالية التي معاملاتها مؤثرات قرينة لنفسها من نوع خاص و العمل يبقى مفتوحا من أجل مؤثرات أخرى.

شكرا لأساتذتنا الأعزاء وضيوفنا الكرام على حسن الإستماع.

صح عيدكم كل عام و أنتم بألف خير.