



# جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة : ابتسام معمري

الموضوع

متعدد مويجات ليجندر في حل معادلة فولتيرا  
التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden

تناقش يوم ../05/2018 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	الرتبة أستاذ محاضر "ب" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	معمري محمد
ممتحنا	الرتبة أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	عباسي حسين
مشرفا	الرتبة أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	بن الشيخ ع/الكريم

## شكر وعرّفان

- أشكر الله وأحمده حمداً بليغاً يليق بجلاله وجهه وعظيم سلطانه الذي منحني الصبر والثبات ورفقني لإتمام هذا البحث .  
أتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى  
الأستاذ "بن شيخ عبد الكريم" الذي أشرف على إنجاز هذا العمل وجاد علياً بنصائحه وتوجيهاته السديدة في ميدان البحث  
العلمي .
- والأساتذة الذين أدلوا بأرائهم وتوضيحاتهم بكل صراحة وموضعية .
  - وكل من ساهم في تكويني طيلة مشواري الإبتدائي والمتوسط والثانوي .
  - وفي الأخير أشكر كل من مدني بيد العون من بعيد أو من قريب لإتمام هذه المذكرة .

## إهداء

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره  
أو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائليه  
فأظهر بسماحته تواضع العلماء  
وبرحابته سماحة العارفين .

إلى التي جعل الله الجنة تحت قدميها ، إلى من رعنتني بعطفها وغمرتني بحبها ، إلى من تأملت لألمي و فرحت لفرحي ، إلى من يعجز اللسان عن وصف فضائلها ، إلى الغالية التي تحن العين وتبكي لرؤيتها ، إلى أعز وأغلى شئ أملكه في الوجود .

أمي حبيبتي حفصتها الله

إلى من مهد لي الطريق من أجل الوصول إلى هذا المستوى ، إلى الذي لم يبخل عليا بشئ يوماً ، إلى من ترقب نجاحاتي

أبي حفصته الله

إلى دعمي وسندي أختي الغالية شهرزاد ، إلى أختي ورفيقة دربي في هذه الحياة ، معي أكون أنا وبدونكي أكون مثل أي شيء إلى التي لم تلدها أمي "أمال" .

وفي الأخير وليس أخراً إلى من حبهم يجري في عروقي ويلهج بذكرهم فؤادي ، إلى أخواتي : سهام و سمية و قرة أعينهم أبناءهم ، وأخر العنقود ليديا .

إلى أشقائي أوتاد حياتي حمزة ، محمد الأمين و بدر الدين .

إلى توأم روحي و صديقة دربي إلى صاحبة القلب الطيب و النوايا الصادقة صديقة و أختي زينب .

ولا أنسا الكتكوتا شهد والغالية العزيزة لينا .

وإلى كل من سقط مني اسمه سهواً .

إلى كل طلبة السنة الثانية ماستر رياضيات تخصص تحليل دالي دفعة 2017/2018

# الفهرس

2	1	متعدد مويجات ليجندر وتقريب التابع
3	1.1	كثيرات حدود ليجندر . . . . .
3	1.1.1	تعريف كثيرات حدود ليجندر . . . . .
7	2.1.1	العلاقة بين كثيرات حدود ليجندر: . . . . .
9	3.1.1	التمثيل التكاملي لكثيرات حدود ليجندر: . . . . .
9	4.1.1	تعاملد كثيرات حدود ليجندر: . . . . .
10	5.1.1	معادلة ليجندر: . . . . .
11	2.1	لمحة عن المويجات . . . . .
11	1.2.1	تعريف المويجات . . . . .
11	2.2.1	مجالات تطبيق المويجات: . . . . .
12	3.2.1	خواص المويجات: . . . . .
13	4.2.1	توابع المولدة من تابع المويجة: . . . . .
14	5.2.1	تحويل المويجات المستمر CWT: . . . . .
14	6.2.1	تحويل المويجات المتقطع (DWT): . . . . .
15	7.2.1	تحليل متعدد الدقة: . . . . .
15	3.1	متعدد مويجات ليجندر . . . . .
16	4.1	تقريب تابع بمتعدد مويجات ليجندر: . . . . .
16	5.1	تحليل التقارب: . . . . .
19	2	المعادلات التفاضلية نوع Lane-Emden
20	1.2	مقدمة في المعادلات التفاضلية . . . . .
20	1.1.2	لمحة تاريخية: . . . . .
20	2.1.2	مفاهيم اساسية: . . . . .
20	3.1.2	المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات العوامل المغيرة: . . . . .
21	4.1.2	حل المعادلات التفاضلية باستعمال سلسلة تايلور: . . . . .
22	5.1.2	حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية باستعمال السلاسل (طريقة فروينيس): . . . . .
29	2.2	المعادلة التفاضلية نوع Lane-Emden: . . . . .
29	1.2.2	المعادلة الفردية الغير خطية المعيارية ل Lane-Emden . . . . .
32	3.2	دراسات سابقة في حل معادلة Lane-Emden: . . . . .



---

34	حل فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden	3
35	فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden	1.3
35	استعمال متعدد مويجات ليجنندر لحل المسألة (LMWM)	2.3
37	تطبيقات عديدة:	3.3

## مقدمة

يلجئ الكثير من الباحثين في الفيزياء و الفلك إلى نمذجة الظواهر الفيزيائية عن طريق المعادلات الرياضية ومعظم هذه المسائل لا تحل بالطرق التحليلية لهذا نلجأ للطرق التقريبية لتقريب حل المسألة بإستعمال كثيرات حدود ، حيث ظهرت الكثير من الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية معتمدا على كثيرات حدود . حاولنا في مذكرتنا هذه التطرق إلى معادلات Lane-Emden من النوع الأول

$$y'' + \frac{k}{x}y' + y^m = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, k > 1 \quad (1)$$

معادلة Lane-Emden من النوع الثاني

$$y'' + \frac{k}{x}y' + e^y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, k \geq 1 \quad (2)$$

حيث  $k$  هو عامل الشكل .

تمثل المعادلة (1) معادلة أساسية في نظرية بنية النجم [20] . يتم إستخدامها في الفيزياء الفلكية لحساب البنية الداخلية للنجوم ، فهذه المعادلات تصف إختلاف درجة الحرارة في سخابة الغاز الكروية تحت الجذب المتبادل من جزيئاتها وتخضع لقانون الديناميكية الحرارية ، كما تضره هذه المعادلة في سياقات أخرى عديدة [15] . أما المعادلة (2) هي معادلة من النوع الثاني الذي يميز توزيع الكثافة في مجال متساوي الحرارة [13] . وقد إستخدمت معادلة Lane-Emden المعروفة لنمذجة عدت ظواهر في الفيزياء و الفلك كنظرية البنية النجمية و السلوك الحراري لسحابة الكروية من الغاز ، كرات الغاز متساوية الحرارة وفي نمذجة المجموعات المجرات . وقد تم إنجاز قدر كبير من العمل على هذه الأنواع من المشاكل لختلف الهياكل . والسبب الرئيسي في المعادلات (1) و (2) هو السلوك الفردي الذي يحدث في النقطة  $x = 0$  . حيث عملنا الأساسي هو تأسيس معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من معادلة Lane-Emden الشاذة من نوعها الأول و الثاني بإستخدام الطريقة الحديثة لمتعدد موجيات ليجنندر Legendre multi-wavelete Method ( LMWM ) تم تطبيق طريقة الأساطير متعددة الموجيات على حل المعادلات التكاملية المتباينة للأشكال المتنوعة [4, 5, 6, 2, 7] . حيث أن طريقة متعدد موجيات ليجنندر تحول معادلات فولتيرا التكاملية الى نظام من المعادلات الجبرية يمكن حل نظام المعادلات مرة أخرى بأي طريقة عددية معتادة .

# الفصل الأول

## متعدد موجبات ليجندر وتقريب التابع

### قائمة المحتويات

---

3	.....	1.1	كثيرات حدود ليجندر
11	.....	2.1	لمحة عن الموجبات
15	.....	3.1	متعدد موجبات ليجندر
16	.....	4.1	تقريب تابع بمتعدد موجبات ليجندر:
16	.....	5.1	تحليل التقارب:

---

## 1.1 كثيرات حدود ليجندر

### 1.1.1 تعاريف كثيرات حدود ليجندر

التعريف المباشر لكثيرات حدود ليجندر:

$P_n(x)$  هي كثيرات حدود ذات الرتبة  $n$  للمتغير  $x$  معرفة على المجال  $[-1, 1]$  تعطى بالعلاقة التالية

$$(0 = n) \quad P_0(x) = 1$$

$$(n \geq 1) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (1.1)$$

حيث [] هي الجزء الصحيح .

هذا نورد كثيرات الحدود هذه من  $P_0(X)$  وحتى  $P_{10}(X)$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(23x^6 - 315x^4 + 15x^2 - 5),$$

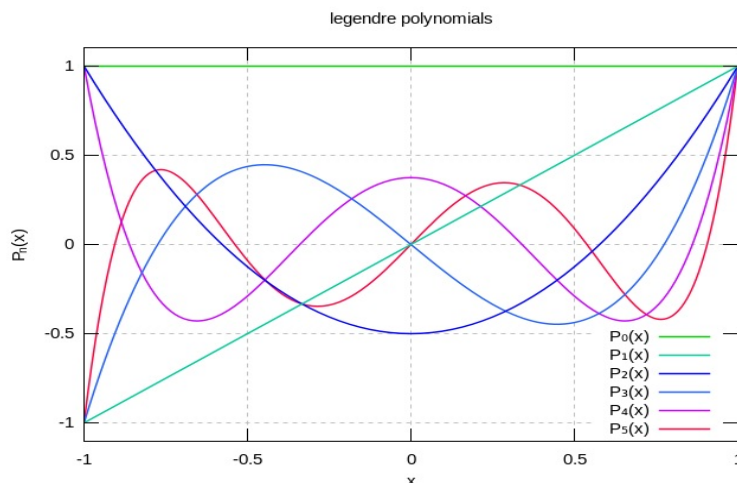
$$P_7(x) = \frac{1}{48}(1287x^7 - 2049x^5 + 945x^3 - 105x),$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(1237x^8 - 16024x^6 + 630x^4 - 1260x^2 + 35),$$

$$P_9(x) = \frac{1}{256}(35530x^9 - 51480x^7 + 4036x^5 - 105x^3 + 630x),$$

$$P_{10}(x) = \frac{4}{256}(24086x^{10} - 109395x^8 + 360360x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 36).$$





شكل 1.1: تمثيل لبعض حدوديات ليجنדר

تعريف كثيرات حدود ليجنדר بالاشتقاق :

مبرهنة 1.1.1 : تكتب كثيرات حدود ليجنדר حيث  $x \in [-1, 1]$  بعلاقة رودريدج:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

ملاحظة 1.1.1 : تعطى كثيرات حدود ليجنדר من أجل  $x \in [a, b]$  على الشكل التالي :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x - a)^n (x - b)^n]}{dx^n}. \quad (3.1)$$

التعريف كثيرات حدود ليجنדר بالمكاملة:

مبرهنة 2.1.1 تعرف كثير حدود ليجنדר من الدرجة  $n$  من أجل  $x \in [a, b]$  بدلالة كثير حدود من الدرجة  $2n$  نرمز لها بالرمز  $R(x) = R_{2n}(x)$ . وبحيث لكل كثير حدود  $Q(x)$  من كثيرات حدود ليجنדר التي هي من درجة أقل من  $n$  يتحقق أن

$$\int_a^b R_n(x) Q_n(x) dx = 0 \quad (4.1)$$

و

$$(5.1)$$

$$R(a) = R'(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0, \quad R(b) = R'(b) = \dots = R^{(n-1)}(b) = 0.$$

التعريف كثيرات حدود ليجندر بدالة المولدة :

مبرهنة 3.1.1 تعطي كثيرات حدود ليجندر بدلالة الدالة المولدة وفق العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} \\ &= (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \end{aligned} \quad (6.1)$$

ملاحظة 2.1.1 يمكن نشر الدالة المولدة بالشكل

$$\begin{aligned} G(t, x) &= (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= [(1 - xt)^2 - t^2(x^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 - xt} \left[ 1 - \frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k t^{2k}(x^2 - 1)^k}{k!(1 - xt)^{2k-1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (2k + 1)_n (x^2 - 1)^k t^{2k-n}}{k!n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (n + 2k)! (x^2 - 1)^k t^{n+2k}}{k!(2k)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k n! (x^2 - 1)^k x^{n-2k}}{k!(2k)!(n - 2k)!} t^n \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(x^2 - 1)^k x^{n-2k}}{2^{2k}(k)!(n - 2k)!}$$

ملاحظة 3.1.1 يمكن التعبير عن كثيرات حدود ليجندر بعلاقات مكافئة للعلاقة (1 . 1 . 1) بالشكل

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n - 2k)! x^{n-2k}}{k!(n - k)!(n - 2k)!}$$

و من أجل أدلة زوجية أو فردية نكتب

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left( 1 - \frac{2n(2n+1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{4!} x^4 - \dots \right)$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} \left( x - \frac{2n(2n+3)}{3!} x^3 + \frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{5!} x^5 - \dots \right).$$

تعريف كثيرات حدود ليجندر بدلالة الزاوية :

إذا فرضنا في كثيرات حدود ليجندر أن  $x = \cos \varphi$  عندها يمكن بالتبديل المباشر الحصول على القواعد التالية:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = \cos \varphi,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\varphi - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\varphi - 3 \cos \varphi),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\varphi + 20 \cos 2\varphi + 9),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{128}(63 \cos 5\varphi + 35 \cos 3\varphi + 30 \cos \varphi),$$

وهكذا بالإستمرار في التبديل المباشر يمكن التعبير عن كثيرات حدود ليجندر بدلالة الدوال المثلثية, ومن أجل أي دليل لكثيرات الحدود هاته نجد

$$P_n(\cos \varphi) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!} \left( \begin{aligned} &\cos n\varphi + \frac{1}{4} \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\varphi + \frac{1.3}{1.2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \\ &\cos(n-4)\varphi + \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \\ &\cos(n-6)\varphi + \dots \end{aligned} \right)$$

ومن أجل دلائل زوجية أو فردية نجد

$$P_{2n}(\cos \varphi) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!} \left( \begin{aligned} &\sin^{2n} \varphi - \frac{(2n!)^2}{2!} \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n-1)!} \cos^{2n} \varphi \end{aligned} \right)$$

$$P_{2n+1}(\cos \varphi) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} \cos \varphi \left( \begin{aligned} &\sin^{2n} \varphi - \frac{(2n!)^2}{3!} \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \cos^{2n} \varphi \end{aligned} \right)$$

### 2.1.1 العلاقة بين كثيرات حدود ليجندر :

علاقة التراجع لكثيرات حدود ليجندر:

ذكرنا أنه يمكن توليد كثيرات حدود ليجندر من الدالة  $G(t, x)$  والتي يمكن نشرها بالشكل التالي

$$G = G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (7.1)$$

و بالمفاضلة بالنسبة للمتغير  $t$  نجد

$$(8.1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{x - t}{1 - 2xt + t^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \frac{x - t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} G = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

وعندها حول علاقات التراجع بين كثيرات حدود ليجندر نورد المبرهنة التالية :

مبرهنة 4.1.1 تحقق كثيرات حدود ليجندر المتتابعة العلاقات التالية :

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - x(2n + 1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.1)$$

علاقات التراجع لمشتقات كثيرات حدود ليجندر:

مبرهنة 5.1.1 تحقق كثيرات حدود ليجندر و مشتقاتها العلاقات التالية :

$$P'_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2n - 4r - 1) P_{n-2r-1} P_{n-2r-1} \quad (10.1)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x) \quad (11.1)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \quad (12.1)$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n+1}(x) - (n + 1)xP_n(x) \quad (13.1)$$

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (14.1)$$

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = (n + 1)[P_{n+1}(x) - xP_n(x)]. \quad (15.1)$$

القيم الخاصة لكثيرات الحدود ليجندر:

القيم الخاصة لكثيرات حدود ليجندر نوردها في المبرهنة التالية:

مبرهنة 6.1.1 القيم الخاصة لكثيرات حدود ليجندر تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$$

برهان 1.1.1 لدينا

$$G(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

ومنه

$$G(t, 1) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

وبالمطابقة نجد أن  $P_n(1) = 1$  . كذلك فإن

$$G(t, -1) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n$$

إذن  $P_n(-1) = (-1)^n$  ولدينا أيضا

$$G(t, 0) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n t^{2n}}{n!} \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n \right)$$

وهذا معناه أن الحد الأيمن من المجموع الأخير يحوي فقط القوى الزوجية، إذن

$$P_{2n+1}(0) = 0 \text{ و } P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}.$$

نتائج 1.1.1 من نشر الدالة المولدة السابقة حسب قوى  $t$  وبمعاملات هي كثيرات حدود ليجندر فإننا يمكن أن نبدل المتغير  $x$  بالمتغير  $-x$  لنحصل على علاقتي التساوي التالية:

$$. P_{2n+1}(-x) = (-1)^n P_{2n+1}(x), \quad P_{2n}(-x) = P_{2n}(x)$$

القيم الخاصة لمشتقات كثيرات حدود ليجندر:

حول القيم الخاصة لمشتقات كثيرات حدود ليجندر نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة 7.1.1 مشتقات كثيرات الحدود التالية صحيحة :

$$P'_{2n}(0) = 0$$

$$P''_{2n+1}(0) = 0$$

$$P'_n(-1) = (-1)^n \frac{n}{2}(n+1)$$

$$P'_n(1) = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$P''_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n+1}n!(n-1)!}$$

$$P'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

3.1.1 التمثيل التكاملي لكثيرات حدود ليجندر:

يمكن إعطاء كثيرات حدود ليجندر بشكل تكاملي، نورده في المبرهنة التالية:

مبرهنة 8.1.1 تمثل كثيرات حدود ليجندر بالشكل

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi]^n d\varphi \quad (16.1)$$

4.1.1 تعامد كثيرات حدود ليجندر:

قضية 1.1.1 كثيرات حدود ليجندر متعامدة على المجال  $[-1, 1]$

برهان 2.1.1 لإثبات أن

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

إذا كان  $(m \neq n)$  بما أن كل من  $P_m(x)$  و  $P_n(x)$  يحقق معادلة ليجنندر فإن

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n + 1)P_n = 0$$

$$(1 - x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m + 1)P_m = 0$$

نضرب المعادلة الأولى في  $P_m$  والثانية في  $P_n$  ثم نطرح الطرفين فنجد

$$(1 - x^2)[P_mP_n'' - P_nP_m''] - 2x[P_mP_n' - P_nP_m'] = [m(m + 1) - n(n + 1)]P_nP_m$$

وهذه الأخيرة يمكن كتابتها على الشكل

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(1 + x^2)[P_mP_n' - P_nP_m']\} = [m(m + 1) - n(n + 1)]P_nP_m$$

و بالمكاملة نجد

$$[m(m + 1) - n(n + 1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = (1 + x^2)[P_mP_n' - P_nP_m']_{-1}^1 = 0$$

بما أن  $m \neq n$  فإن

$$[m(m + 1) - n(n + 1)] \neq 0$$

ومنه

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

### 5.1.1 معادلة ليجنندر:

نسمي معادلة ليجنندر المعادلة التفاضلة التالية ذات الوسيط  $\lambda$  :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0 \quad (17.1)$$

## 2.1 لمحة عن الموجيات

### 1.2.1 تعريف الموجيات

الموجة هي تابع يمثل ذبذبة واحدة أما الموجيات فهي تعتبر تابع تذبذبي كتتابع الجيب وجيب التمام. وسبب في رواج الموجيات هو فعاليتها في تمثيل و معالجة العديد من المسائل من بينها معالجة الإشارات غير مستقرة . وكذلك متنوعة حيث أنها تعطي تنوعا في حلول المسألة وهذا ما يحفز الباحثين على إيجاد موجيات جديدة بنتائج أفضل ملائمة للمسائل المطروحة .

#### لمحة تاريخية للموجيات

في سنة 1807 برهن العالم فورييه بأنه يمكن تمثيل كل إشارة دورية لمجموع دوال مثلثية وعممها بالإشارات الغير دورية وهذا ما يعرف بتحويل فورييه عالج كل الإشارات المستقرة ولم يستطيع معالجة الإشارات الغير مستقرة وفي سنة 1946 إعتبر العالم غابور أن تحويل فورييه ذو توافق لمعالجة الإشارات الغير مستقرة ولاكن هذا التحويل لم يكن دقيقا ، فليجوء الى توابع الموجيات لبناء تحويل رياضي يعالج الإشارات الغير مستقرة بدقة

بدايتها كانت على يد العالم هار عام 1910 حيث قام بتعريف جديدة ومتعامدة لمثلث التابع وهي تحمل إسمه حاليا "موجة هار" .

حيث وجد العالم الفيزيائي ليفي سنة 1930 أن توابع قاعدة هار أفضل من توابع قاعدة فورييه لدراسة التفاصيل المعقدة للحركة البروانية وهي مستمرة إلى يومنا هذا الأبحاث والمقالات الجديدة حول تطور عمل الموجيات

### 2.2.1 مجالات تطبيق الموجيات :

تطبق الموجيات في العديد من الميادين التي تتطلب معالجة الإشارات كعلم الفلك و الإتصالات وغيرها .. ولها ايضا تطبيقات رياضية كحل المعادلات التفاضلية الجزئية وحل المعادلات التكاملية كما أنها تشكل قاعدة قابلة للعد للفضاء  $L^2(\mathbb{R})$  وكانت نتائجها جيدة في مجال تمثيل وتقريب التابع



### 3.2.1 خواص الموجيات :

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

1. تكامل التابع على كامل المحور الحقيقي يساوي الصفر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0 \quad (18.1)$$

2. أن ينتمي إلى الفضاء

$$L^2(\mathbb{R}) \text{ أي :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx < +\infty \quad (19.1)$$

نسمي  $\Psi$  تابع الموجة الأم أو موجة Wavelet.

مبرهنة 1.2.1 العلاقات (1) و (2) متكافئتان، إذا حقق التابع  $\Psi$  العلاقة (3) فإنه يحقق (1) و (2).

(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0$$

(2)

$$\tilde{\Psi}(0) = 0$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty.$$

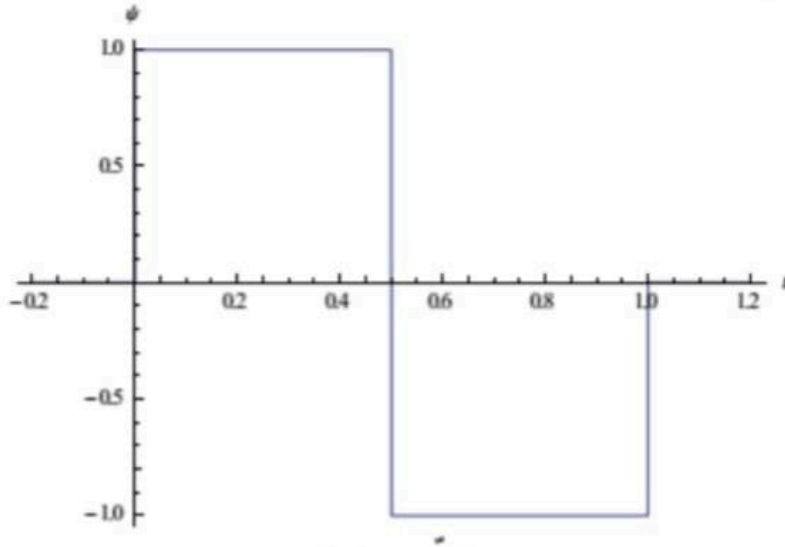
حيث  $\tilde{\Psi}$  هو تحويل فورييه ل  $\Psi$ . ونسمي الشرط (3) شرط القبول ( *Adminissibility Condition* )

مثال 1.2.1 موجة هار قام بتعريفها العالم الهنغاري هار عام 1909 وتعرف بشكل:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & \text{if } 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (20.1)$$

و الموضحة بالشكل (2 . 1)

إن  $Y$  موجة هار غير مستمرة عند النقطتين 0.5 و 0 مما يجعلها غير قابلة للمفاضلة عندهما وهذا من أهم عيوبها.



شكل 2.1

#### 4.2.1 تولد مولدة من تابع الموجية :

نعرف أسرة التتابع  $\Psi_{a,b}(x)$  المولدة من تابع الموجية  $\Psi$  بالعلاقة :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \quad (21.1)$$

حيث  $a$  وسيط يدل على المقاس scale ويقيس درجة إنضغاط الدالة .

أما  $b$  وسيط يدل على الانسحاب على محور الزمن .

نلاحظ أن  $\Psi_{1,0}(t) = \Psi(t)$

مثال 2.2.1 موجة القبة المكسيكية هي موجة مستمرة ومعروفة بالعلاقة

$$\Psi(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$$

الأسرة المولدة بموجة القبة المكسيكية :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(1 - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}$$

### 5.2.1 تحويل الموجيات المستمر CWT :

ليكن التابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$  نعرف تحويل الموجيات المستمر للتابع  $f$  بالنسبة للموجة  $\Psi$  كما يلي :

$$CWT : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

(22.1)

$$CWT(f) = W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\Psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\Psi}_{a,b}(t) dt$$

تدل  $\bar{\Psi}$  على المرافق العقدي لتابع  $\Psi$  او  $b$  إعادة حقيقية و  $a \neq 0$ .

### 6.2.1 تحويل الموجيات المتقطع (DWT):

هو تحويل يستخدم عددا محددًا من المقاسات حيث ينتج عنه كمية كافية من المعلومات في زمن أقل ودون خسائر معلومات هامة .

لدينا (1 . 22) و (1 . 21) نأخذ قيم خاصة ل  $a, b$

$$a = a_0^{-j} \quad j \in \mathbb{Z}; \quad b = k a_0^{-j} b_0 \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه

$$\Psi_{j,k}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \Psi \left( \frac{t - k a_0^{-j} b_0}{a_0^{-j}} \right) = a_0^{\frac{j}{2}} \Psi(a_0^j t - k b_0)$$

حيث  $a_0 > 1, b_0 > 0$  قيم ثابتة . ونأخذ غالبا ( حسب العالم شانون )  $a_0 = 2, b_0 = 1$  تصبح التتابع المولدة من الموجات المستخدمة في هذا التحويل هي:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k)$$

ويكون تحويل الموجيات المتقطع معرفا بالعلاقة التالية :

$$DWT(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \bar{\Psi}(2^j t - k) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\Psi}_{a,b}(t) dt; \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (23.1)$$

### 7.2.1 تحليل متعدد الدقة :

جاء على يد العالم ملاط عام 1989 حيث كان له أهمية كبيرة في معالجة الصوت و الصورة وغيرها من الإشارات الرقمية .

إن تحليل متعدد الدقة عبارة عن متتالية  $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  من الفضاءات الجزئية من الفضاء  $L^2(\mathbb{R})$  تحقق الخواص التالية :

1. الفضاءات متداخلة أي :

$$\forall k \in \mathbb{Z} : V_k \subset V_{k+1}$$

2. يشكل إجتماع هذه الفضاءات مجموعة كثيفة في  $L^2(\mathbb{R})$  أي :

$$\overline{\cup_{k \in \mathbb{Z}} V_k} = L^2(\mathbb{R})$$

3. تقاطع هذه الفضاءات يقتصر على العنصر الصفري أي :

$$\cap_{k \in \mathbb{Z}} V_k = \{0\}$$

4. تحقق العلاقة التالية :

$$f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(2x) \in V_{k+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$$

5. يوجد تابع  $\varphi \in V_0$  بحيث تشكل المجموعة  $\{\varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  قاعدة متعامدة منظمة ل  $V_0$  .  
نسمي  $\varphi$  تابع المقاس المرتبط بالتحليل المتعدد الدقة  $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  أو تابع الموجة الأب .

### 3.1 متعدد موجيات ليجنדר

رمزه

$$\Psi_{m,n}(x) = \Psi(k, m, n, x)$$

لديه أربعة متغيرات حيث :

$$m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$$

$$k \in \mathbb{Z}^+$$

$n$  هي رتبة كثير حدود ليجنדר

$x$  متغير بنسبة لزمن .

تعرف الدالة على المجال  $[0, T)$  [1] بشكل التالي :

$$\Psi_{m,n}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \left( \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{T}} \right) P_m \left( \frac{2^k x}{T} - m \right), & \frac{mT}{2^k} \leq x < \frac{(m+1)T}{2^k} \\ 0. & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (24.1)$$

وسيط يدل على المقاس يقيس درجة انضغاط الدالة

$$a = 2^{-k}T$$

وسيط يدل على الانسحاب على محور الزمن

$$b = n2^{-k}T$$

#### 4.1 تقريب تابع بمتعدد موجيات ليجندر :

الدالة  $f(x)$  معرفة على المجال  $[0, T)$  نعبر عليها من قبل متعدد موجيات ليجندر

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \Psi_{m,n}(x) \quad (25.1)$$

عندما يكون  $C_{m,n} = \langle f(x), \Psi_{m,n}(x) \rangle$  بحيث  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  الجداء السلمي حيث أنه يمكن كتابة (25 . 1) على النحو التالي :

$$f(x) \cong \sum_{m=0}^{2^k-1} \sum_{n=0}^N C_{m,n} \Psi_{m,n}(x) = C^T \Psi(x) \quad (26.1)$$

أين ما يكون  $C$  و  $\Psi(x)$  في  $(2^k(N+1) \times 1)$  مصفوفة تعطي بالعلاقة التالية

$$C = [C_{0,0}, C_{0,1}, \dots, C_{0,N}, C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,N}, \dots, C_{2^k-1,0}, \dots, C_{2^k-1,N}]^T \quad (27.1)$$

$$\Psi(x) = [\Psi_{0,0}(x), \Psi_{0,1}(x), \dots, \Psi_{0,N}(x), \Psi_{2^k-1,0}(x), \dots, \Psi_{2^k-1,N}(x)]^T \quad (28.1)$$

#### 5.1 تحليل التقارب :

نظرية 1.5.1 إن مجموعة حلول السلسلة:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \Psi_{m,n}(x) \quad (29.1)$$

المعرفة على (1.25)

بإستخدام طريقة متعدد موجيات ليجندر يتقارب إلى  $Y(x)$

برهان 1.5.1 المجموعة  $\{\Psi_{m,n}; m, n = 0, 1, \dots\}$  هي مجموعة متعامدة في فضاء هيلبرت  $L^2(\mathbb{R})$ .  
نفرض أن  $y(x) = \sum_{n=0}^N C_{m,n} \Psi_{m,n}(x)$  عندما يكون  $C_{m,n} = \langle y(x), \Psi_{m,n}(x) \rangle$  حيث  $n$  ثابت.  
ونزمل  $\Psi_{m,n}(x)$  ب  $\Psi(x)$  ونترك  $a_j = \langle y(x), \Psi(x) \rangle$ , الآن نعرف تسلسل المجموع الجزئي  $(S_m)$  من  $(a_j \Psi(x_j))$ . نترك  $\{S_m\}$  و  $\{S_n\}$  يكونا المجموعة الجزئية مع إفتراض أن  $m \geq n$ .  
يجب علينا أن نثبت أن  $\{S_m\}$  هو تسلسل كوشي في فضاء هيلبرت. نضع  $S_m = \sum_{j=1}^m a_j \Psi(x_j)$ .

$$\langle y(x), S_m \rangle = \langle y(x), \sum_{j=1}^m a_j \Psi(x_j) \rangle = \sum_{j=1}^m |a_j|^2.$$

نفرض أن

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |a_j|^2, m \geq n$$

والآن

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j) \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j), \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j) \right\rangle = \sum_{j=n+1}^m |a_j|^2$$

لما  $m > n$  وبتالي

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j) \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |a_j|^2, m > n$$

لدينا  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$  متقاربة وبتالي

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j) \right\|^2 \longrightarrow 0 \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

إذن

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m a_j \Psi(x_j) \right\|$$

و  $\{S_n\}$  هي متتالية كوشي وتتقارب نحو  $s$   
ونحن نؤكد أنه  $y(x) = s$

في الواقع

$$\begin{aligned}
\langle s - y(x), \Psi(x_j) \rangle &= \langle s, \Psi(x_j) \rangle - \langle y(x), \Psi(x_j) \rangle \\
&= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \Psi(x_j) \rangle - a_j \\
&= a_j - a_j.
\end{aligned}$$

هذا يعني  $\langle s - y(x), \Psi(x_j) \rangle = 0$ ,  
الذي تعطي  $y(x) = s$  و  $\sum_{j=1}^m a_j \Psi(x_j)$  متقاربة نحو  $y(x) = s$  لما  $n \rightarrow \infty$

# الفصل الثاني

## المعادلات التفاضلية نوع Lane-Emden

### قائمة المحتويات

---

20	.....	1.2	مقدمة في المعادلات التفاضلية
29	.....	2.2	المعادلة التفاضلية نوع Lane-Emden :
32	.....	3.2	دراسات سابقة في حل معادلة Lane-Emden :

---



## 1.2 مقدمة في المعادلات التفاضلية

### 1.1.2 لمحة تاريخية :

شهدت الرياضيات في القرنين السابع عشر والثامن عشر ميلادي تطور واسع في نظرية المعادلات التفاضلية وتطبيقها .

حيث يرجع تاريخ المعادلات التفاضلية النظرية إلى بداية علم التفاضل وتكامل الذي بداه إسحاق نيوتن (1642 – 1727) وجونرود بنيتز (1646 – 1716) في القرن السابع عشر ميلادي .  
وفي الاخير كتبت في ورقة على يد وجونرود بنيتز في 11 نوفمبر 1675

### 2.1.2 مفاهيم اساسية :

رتبة المعادلة: هي أعلى درجة اشتقاق للمتغير المستقل في المعادلة تفاضلية .  
درجة المعادلة: هي أكبر أس ترفع إليه أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية . في بعض المعادلات التفاضلية تعطى شروط يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية وهذه الشروط تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لإستخدام عمليات التكامل لإيجاد الحل .

### 3.1.2 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات العوامل المغيرة :

تكتب من الشكل :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = r(x) \quad (1.2)$$

فهي معادلة خطية من الرتبة الثانية .

إذا كان  $r(x) = 0$  فإن المعادلة من الرتبة الثانية متجانسة .

أما إذا كان  $r(x) \neq 0$  فإن المعادلة من الرتبة الثانية غير متجانسة .

تعددت طرق حل هذه المعادلة و من بين طرقها :

طريقة تغيير الوسائط

طريقة التحويل إلى صورة قياسية

طريقة تحليل الوثر

طريقة إستبدال المتغير المستقل... وغيرها من الطرق

## 4.1.2 حل المعادلات التفاضلية باستعمال سلسلة تايلور :

سلسلة تايلور

تكتب سلسلة تايلور على النحو التالي :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.2)$$

يمكن حل المعادلة التفاضلية في صورة سلسلة تايلور وهذا بالحصول على المشتقة الاولى وجميع المشتقات العليا وذلك حسب رتبة المعادلة التفاضلية . لسلسلة تايلور عدة منافع أهمها أنها تسمح بتعبير عن أي دالة رياضية عن طريق كثير حدود فيمكننا ذلك من إيجاد حلول تقريبية لمسألة ما إذا كان دقيقا مستعصيا. تستخدم سلسلة تايلور في حالة وجود نقطة مفردة (نقطة شاذة) للمعادلة التفاضلية لأن بقية السلاسل لا تعطينا حلا تاما على شكل سلسلة وتسمى النقطة المفردة في المعادلة

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (3.2)$$

بنقطة منتظمة إذا إستطعنا كتابة المعادلة من الشكل :

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x - x_0}y' + \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2}y = 0 \quad (4.2)$$

حيث  $R_1(x)$  و  $R_2(x)$  يمكن فهمهما تسلسلة تايلور حول  $x = x_0$  فتكون السلسلة الناتجة هي عبارة عن سلسلة تايلور

$$R_1(x)y + R_2(x - x_0)y' + R_1(x - x_0)y'' = 0 \quad (5.2)$$

الحل باستخدام سلسلة تايلور

سلسلة تايلور هي سلسلة التي يمكن كتابتها على الصفة التالية

$$F(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots \quad (6.2)$$

نفرض أن المعادلة المعطاة على الصيغة التالية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y \quad (7.2)$$

نفرض أن  $x = x_0$  معطى

باستخدام قيمة نجد قيم كل من

$$(y, y', y'', \dots)$$

كالآتي

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0$$

نفاضل المعادلة (2.7) لإيجاد المشتقة الثانية :

$$y''' = p'(x)y' + p(x)y'' + q(x)'y + q(x)y' \quad (8.2)$$

وبالمثل نستمر لإيجاد المشتقات الأخرى من المعادلة نضع  $Y = F(x)$  تصبح المعادلة على النحو التالي

$$Y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots \quad (9.2)$$

5.1.2 حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية باستعمال السلاسل (طريقة فروبينيس):

بعض الخواص على العلاقات التجميعية

.1

$$\sum_{n=p}^k Q(n) = Q(p) + Q(p+1) + Q(p+2) + \dots + Q(k); k > p. \quad (10.2)$$

 $p, k$  اعداد حقيقية .

.2

$$\sum_{n=p}^{\infty} Q(n)a_n x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} Q(n-p)a_{n-p}x^n. \quad (11.2)$$

.3 إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإن  $a_n = b_n$  لجميع قيم  $n$ 

وأيضا إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n = 0$$

فإن  $a_n - b_n = 0$  و مثال على ذلك إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n = C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \dots + C_n x^{n+1}$$

فإن

$$C_1 = C_0; 2C_2 = C_1; 3C_3 = C_2; \dots; nC_n = C_{n-1}$$

أي

$$C_1 = C_0; C_2 = \frac{C_0}{2!}; C_3 = \frac{C_0}{3!}; \dots; C_n = \frac{C_0}{n!}$$

تعريف 1.1.2 سلسلة قوى حول  $x = a$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n. \quad (12.2)$$

أما إذا كانت سلسلة حول  $x = 0$  فإن

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (13.2)$$

تعريف 2.1.2 إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (14.2)$$

حيث كل من  $p_0, p_1, p_2$  دوال تحليلية في  $x$  أي يمكن التعبير عن كل منها بسلسلة قوى في  $x$

1.  $x = a$  تسمى نقطة عادية إذا كان  $p_0(a) \neq 0$

2.  $x = a$  تسمى نقطة شاذة (مفردة) إذا كان  $p_0(a) = 0$

3.  $x = a$  تسمى نقطة شاذة منتظمة :

إذا كان  $x = a$  نقطة شاذة و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-a), \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x-a)$$

موجودتان

## مثال 1.1.2 صنف النقط الشاذة في المعادلة

$$x(x-1)^2(x+2)y'' + x^2y' - (x^3 + 2x - 1)y = 0$$

الحل

$$p_0(x) = x(x-1)^2(x+2), \quad p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = -(x^3 + 2x - 1)$$

ندرس الآن النقط الشاذة  $p_2(x) = 0$  كان إذا  $x = -2, x = 1, x = 0$  فهى نقط عادية .

1.  $x = 0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^3 + 2x - 1)}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

إذن  $x = 0$  نقطة شاذة منتظمة.2.  $x = 1$ 

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x(x-1)(x+2)} = \infty$$

إذن  $x = 1$  نقطة شاذة غير منتظمة.3.  $x = -2$ 

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x+2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x(x-1)^2} = \frac{-2}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x+2)^2 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^3 + 2x - 1)(x+2)}{x(x-1)^2} = 0$$

إذن  $x = -2$  نقطة شاذة منتظمة.

طريقة فروبينيس

إذا كانت  $x_0$  نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية فإن الحل العام على صورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r} \quad C_0 \neq 0 \quad (15.2)$$

إذن :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)C_n(x-x_0)^{n+r-1} \quad (16.2)$$

إذن :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)C_n(x-x_0)^{n+r-2} \quad (17.2)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على العلاقات التكرارية ومعادلة الأسس (equation indicial) في الثابت  $r$  وهي معادلة من الدرجة الثانية في  $r$  وبحلها نحصل على جذرين وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية يتوقف على نوع هذين الجذرين وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال الآتي :

مثال 2.1.2 أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

في الصورة سلسلة قوى  $x$   
الحل

النقطة  $x = 0$  نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{2x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x}$$

النقطة  $x = 0$  نقطة شاذة منتظمة . نفترض أن الحل على صورة المعادلات (2 . 15), (2 . 16), (2 . 17)

بتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$(18.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_nx^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r+3)x^{n+r} = 0$$

بمساوات المعاملات  $x^{n+r-1}$  بصفر ( أقل قوى  $x$  )

$$C_n(n+r)(2n+2r-1) + C_{n-1}(n+r)(n+r+2) = 0 \quad (19.2)$$

نضع  $n = 0$  في المعادلة (2 . 19) فنحصل على

$$C_0 r(2r - 1) + C_{-1}(r + 2) = 0$$

حيث  $C_{-1} = C_{-2} = \dots = 0$   
فإن

$$C_0 r(2r - 1) = 0$$

وباعتبار أن  $C_0 \neq 0$  نحصل على

$$r(2r - 1) = 0 \quad (20.2)$$

المعادلة (20 . 2) تسمى المعادلة الدليلية ومنها نجد أن

$$r = 0 \quad \text{أو} \quad r = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (2 . 19) نحصل على العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{-(n + r + 2)}{(n + r)(2n + 2r - 1)} C_{n-1}, n \geq 1.$$

وسوف نجد قيم  $C_n$  المختلفة بدلالة  $C_0 \neq 0$  في حالي جذري المعادلة الدليلية (20 . 2).

$$r = 0 . 1$$

$$C_n = \frac{-(n + 2)}{n(2n - 1)} C_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-3}{1(1)} C_0 = -3C_0$$

$$C_2 = \frac{-4}{2(3)} C_1 = 2C_0$$

$$r = \frac{1}{2} . 2$$

$$C_n = \frac{-(n + \frac{5}{2})}{(n + \frac{1}{2})} C_{n-1} \quad n \geq 1$$

أو

$$C_n = \frac{-(2n + 5)}{2n(2n + 1)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-7}{2(3)}C_0 = -\frac{7}{6}C_0$$

$$C_2 = \frac{-9}{4(5)}C_1 = \frac{9(7)}{(4)(5)(6)}C_0 = \frac{21}{40}C_0$$

$$C_3 = \frac{-11}{6(7)}C_2 = \frac{-11(21)}{(6)(7)(40)}C_0 = \frac{-11}{80}C_0, \dots$$

وبفرض  $C_0 = 1$  فإن الحل العام يكون

$$y = A \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + B \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$y = A[1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots] + B[1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \dots]x^{\frac{1}{2}}$$

حالات جذري المعادلة الدليلية :

1. جذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح :  
في هذه الحالة نأخذ

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r} \quad (21.2)$$

و

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r} \quad (22.2)$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1(x) + By_2(x) \quad (23.2)$$

حيث  $A, B$  ثوابت اختيارية  
كما في المثال السابق .

2. جذران متساويان: في هذه الحالة نجد  $r = r_1$  ،  $r = r_2$  ، أي  $r_1 = r_2$  ويكون  
 $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x)^{n+r_1}$  وبذلك نحصل على حل واحد فقط ، ولكن للحصول على الحل الثاني



المستقلة خطيا.

نفرض  $y_1 = f(x, r_1)$  ; ولقد ثبت ان الحل الثاني يكون على الصورة

$$y_2 = \left. \frac{df(x, r)}{dr} \right|_{r=r_1} \quad (24.2)$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2 \quad (25.2)$$

$A, B$  ثوابت اختيارية

3. الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح موجب :

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلة  $r_1, r_2$  حيث  $r_2 > r_1$  فإن  $r_2 - r_1$  يكون عددا صحيحا موجبا .

في هذه الحالة يعطى  $r_2$  (أكبر جذرين) حلا ، وليكن  $y_2$  في حين يعطى الجذر  $r_1$  حلا وقد لا يعطى ، في حالة إذا وجد الحل  $y_1$  من  $r_1$  فإن الحل العام يكون

$$y = Ay_1 + By_2 \quad (26.2)$$

بينما في حالة أن  $r_1$  لا يعطي حلا فإننا نضع  $C_0 = b_0(r - r_1)$  في الحل الناتج ، وليكون الحل بعد التعويض ، على الصورة  $\bar{y}$  فإن الحل العام يكون

$$y = A\bar{y}|_{r=r_1} + B \left. \frac{d\bar{y}}{dr} \right|_{r=r_1} \quad (27.2)$$

## 2.2 المعادلة التفاضلية نوع Lane-Emden :

معادلة Lane-Emden الفردية غير الخطية المعممة هي معادلة معروفة جيدا في نظرية التركيب والنماذج الفلكية من الظواهر في الفيزياء الرياضية والفيزياء الفلكية ( Chandrasekhar, 1967 ) . إنها معادلة تفاضلية غير خطية تصف توزيع الكثافة المتوازنة في مجال الانجذاب الذاتي للغازات الحرارية المتغلبة ، ولديها تفرد منتظم عند المنشأ . تمت دراسة هذه المعادلة لأول مرة من قبل علماء الفيزياء الفلكية "جوناتان هومرلين" ( Lane Homer ) و "روبرت امدن" ( Emden Robert ) ( 1907 ) الذين نظرو في إختلاف درجة الحرارة لسحابة الغاز الكروية تحت جاذبية جزئياتها المتبادلة وتخضع لقوانين الديناميكية الحرارية الكلاسيكية . وتتبع نظرية النشريات ( Davis, 1962 ) لنجوم أساسا اعتبارات الديناميكية الحرارية التي تتعامل مع قضية نقل الطاقة ، من خلال نقل المادة بين مستويات مختلفة من النجم ونمذجة مجموعات المجرات . تنشأ معادلة Lane-Emden من معظم المشاكل المتعلقة بإنتشار الحرارة المتعامدة مع أسطح الطائرات المتوازنة ، يتم تمثيلها بمعادلة الحرارة .

### 1.2.2 المعادلة الفردية الغير خطية المعيارية ل Lane-Emden

النظر في معادلة Lane-Emden المعممة

$$\xi^{-\alpha}(\xi^\alpha \omega_\xi(\xi))_\xi + kf(\xi)g(\omega) = u(\xi), \quad 0 < \xi \leq 1, \alpha > 0, \quad (28.2)$$

حيث  $(\xi)$  يمثل درجة الحرارة . في حالة الإستقرار , يعتبر  $u(\xi) = 0$  في المعادلة ( 28 . 2 ) ويصبح

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} + kf(\xi)g(\omega) = 0, \quad 0 < \xi \leq 1, \alpha > 0, \quad (29.2)$$

تخضع للشروط:

$$\omega(0) = A, \omega'(0) = B \quad \text{أو} \quad \omega(0) = 0, \omega(1) = B \quad (30.2)$$

تحدد قيمة  $\alpha$  هندسيا شكل المعادلة ( 29 . 2 ) . بالنسبة للهندسة المحددة بشكل جيد, تمثل  $\alpha = 0$  لوحا لا نهائيا ,  $\alpha = 1$  اسطوانة دائرية لانهائية و  $\alpha = 2$  كرة .

عندما  $\alpha = 2$  ,  $f(\xi) = 1$  و  $g(\xi) = \omega^p$  ، المعادلة ( 29 . 2 ) تصبح المعادلة القياسية ل Lane-Emden مع مؤشر بوليتروبيك ( polytropic )  $p$  . في مضمون هذا النطاق الأنظمة الفيزيائية من الرتبة  $p$  حيث  $0 \leq p \leq 5$  . اعتبر فاولر ( Fowler ) تعميما لمعادلة Lane-Emden المسماة معادلة Fowler Lane-Emden لين-امدن فاولر ( 1984 ) . حيث  $f(\xi) = \xi^n$  و  $g(\omega) = \omega^p$  . درس امدن نظرية ريتشاردوس ( Richardson's ) ( 1901 ) الحرارية و المعادلة المشتقة من المجال الغازي المتساوي الحرارة ،

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} + e^{-p\omega} = 0, \quad p \neq 0, \quad (31.2)$$

معادلة Lane-Emden المعممة من النوع الأول [14] هي

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} + k\xi^n (\omega(\xi))^p = 0. \quad (32.2)$$

يتم تحديد الثوابت الحقيقية  $\alpha, k, n, p$  من فيزياء المشكلة قيد البحث . بإفتراض  $k \neq 0$  و  $p$  يمكن تجسيمها إلى  $+1$  أو  $-1$  .  
يلي معادلة Lane-Emden المعممة من النوع الثاني ( Khalique ) ( 2012 ) .

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} + k\xi^n e^{p\omega} = 0 \quad (33.2)$$

وجد وونغ Wong (1975) نسخة عامة أخرى عن طرق أخذها

$$f(\xi) = \xi^n, g(\omega) = (sgn\omega)(|\omega(\xi)|)^p \quad (34.2)$$

في المعادلة (29 . 2) اعتماد على القيم من  $\alpha, k, n, p$ ، المعادلة (32 . 2) اختزلت إما إلى معادلة توماس فرمي ( Fermi Thomes ) و التعميمات أو إلى معادلة واحدة من الحركة مع قوة اعتماد على قوة المسافة زائد . المعادلة (32 . 2) هي أيضا عندما واجهت حلول متناصرة كروية من معادلات حقل آينشتاين لمسألة السوائل الكمال مع القص أو بدون . نحن نقدم الأساس لاشتقاق المعادلة (28 . 2) في حالتين .

وقد استمدت ( Shakeri و Dehghan ) ( 2008 ) المعادلة القياسية Lane-Emden وحلت من أجل معالجة صعوبة نقطة الشاذة في  $\xi = 0$  .  
في الفيزياء الفلكية ، يمكن التعبير عن معادلة Lane-Emden في شكل معادلة بواسون ( Poisson ) كالتالي :

$$\nabla^2\varphi = -4\pi G\rho \quad (35.2)$$

بحيث  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$  ،  $\rho$  هي الكثافة على مسافة  $r$  من مركز سحابة كروية من الغاز و  $\varphi$  هي الكمون الثقلي للغاز. المعادلة (35 . 2) يحكمها مزيج من العلاقات التالية :

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}, \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (36.2)$$

حيث  $M(r)$  هي كتلة الكرة و  $\rho$  هي الضغط في نصف  $r$  . و  $G$  هي الجاذبية حيث ثابت الجاذبية هو  $(6.668 \times 10^{-8})$  وحدة . يعطى  $P$  بالعلاقة :

$$P = K\rho^\gamma \quad (37.2)$$

حيث  $\gamma$  و  $K$  هما ثابت اختيارية .  
 ضع في اعتبارك الشرط  $\varphi = \varphi_0 \omega$  ،  $\varphi_0$  هي قيمة  $\varphi$  في مركز الكرة ،  
 تختزل المعادلة (2 . 35) إلى الشكل :

$$\nabla^2 \varphi = -\alpha^2 \varphi^n \quad (38.2)$$

باعتبار  $\alpha^2 = (n + 1)K^{-n}G$  و  $n = \frac{1}{\lambda - 1}$  مع الأخذ  $r = \xi / \left( \alpha \varphi_0^{\frac{1}{2}(n-1)} \right)$  ، المعادلة  
 (2 . 38) تختزل إلى المعادلة (2 . 29) مع  $f(\xi) = 1, g(\omega) = \omega^p$  . الشروط التكميلية محددة في  
 المعادلة (2 . 30) في الحالة الثانية عندما يكون  $\varphi_0 = 0$  يجب إستبدال معادلة بواسون ب :

$$\nabla^2 \varphi = -\alpha^2 e^{\frac{\varphi}{k}}, \alpha^2 = 4\pi \rho_0 G. \quad (39.2)$$

نفترض أن التناظر الكروي مع  $\varphi = k\omega$  و  $r = \left( \sqrt{k/\alpha} \right) \xi$  ، هذه المعادلة تختزل في المعادلة  
 (2 . 31) حيث  $p = -1$  .

### 3.2 دراسات سابقة في حل معادلة Lane-Emden :

طبق وزواز (Wazwaz,2005) طريقة تحليلية لأدوميان على معادلة Lane-Emden حيث الدالة  $f(\xi)g(\omega) = k\omega^p$  و  $f(\xi)g(\omega) = ke^\omega$  ، لكن آسلانوف ( Aslanov,2009 ) مدد هذه الدوال في سياقات مختلفة .  
في الآونة الأخيرة ، إستخدمت العديد من الطرق التحليلية والعديد لحل معادلات Lane-Emden .

درس بينكو ( Benko,2009 ) طريقة سلسلة الطاقة لحل معادلة Lane-Emden ، إستخدم ( Mohan ) و ( Al-Bayaty ) 1982 أسلوب أولار ( Euler ) المختلف ، و حدد هارلي ( Harley ) و مومنيات ( Momoniat ) شروط حدودية ثابتة من معادلات Lane-Emden . إستخدم ( Yildirim,2009 ) طريقة التكرار التباين لحل مشكلة من نوع امدن فاوئر من المعادلات . ماندلزويغ (Mandelzweig) وآخرون (2001) قد إستخدمو طريقة الشبه خطي لحل المعادلة (29 . 2) .

كانت طريقة المويجات في السنوات القديمة أكثر شيعة في مجال التطبيقات العددية . حيث جاءت مويجات هار وهي أبسط أنواع المويجات المتعامدة التي إكتسبت شعبية بين الباحثين بسبب خصائصها المفيدة مثل قابلية التطبيق البسيط والتعامد ، حيث تسمح بإدراج و تقسيم الأنواع المختلفة من شروط الحدودية في الخوارزميات العددية بشكل مباشر ، وذلك بسبب الطبيعة الخطية و المختلفة .

قام يوسفني ( Yousefi , 2006 ) بتحويل معادلة Lane-Emden إلى معادلة تكاملية وحلها عن طريق قالاركين ( Galerkin ) وطرق التجميع مع مويجات ليجندر .

من مزايا طريقة المويجات هي قدرتها على إكتشاف الشوارد والبنيات غير المنتظمة والظواهر العابرة التي تظهر في الدالة التي تم تحليلها .

في عام ( 1916 ) ، قدم ( ألفريد هار ) دالة هار التي تقدم زوج نبض مستطيل . ليس من الممكن تطبيق مويجة هار مباشرة لحل المعادلات التفاضلية لأن مويجات هار هي دالة متقطعة ، لذا فهي ليست مختلفة في مكان . هناك بعض الإحتمالات للخروج من هذا الطريق المسدود .

أولا ، يمكن تنظيم دالة هار الثابتة البطيئة بإستخدام مفاتيح الإستيفاء ، وقد تم تطبيق هذه التقنية بواسطة ( Cattani , 2009 ) . لاحظ Cattani أن التعقيد الحسابي يمكن أن ينقص إذ تم تقسيم فاصل التكامل إلى بعض الأجزاء ، ويمكن تطبيق طريقة تسمى بالتقريب الثابت المتقطع .

الإحتمال الثاني هو الإستفادة من الطريقة التكاملية التي من خلالها يتم توسيع المشتقات الأعلى التي تظهر في المعادلة التفاضلية إلى سلسلة هار . يتم دمج شروط الحدودية بإستخدام ثوابت التكامل . وقد تم تحقيق هذه الطريقة من قبل تشن Chen و هسيا Hsiao (1997) اللذان إستمدوا أول مصفوفة تطبيقية لهار من أجل تكاملات دوال هار و وضع التطبيق لتحليل دالة هار في الأنظمة الديناميكية .

اقترح كل من وانج Wang ( 2001 ) و ليبك Lepik (2009) طريقة مبنية على موجات هار لحل المعادلات التفاضلية القاسية اللاخطية . في هذا الفصل ، نجد حل الموجات هار من الإصدارات الأكثر عمومية من النوع الأول والثاني من معادلات Lane-Emden .

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الغير خطية في جوار النقطة الشاذة غير سهلة بطريقة مستعملة . في طريقتنا المقترحة يتم التعامل مع الجزء الغير خطي مع الشذية بطريقة فعالة ومن خلال التفكير في طريقة موجات هار لإيجاد حل معادلة Lane-Emden المعممة في منطقة نقطة الشاذة  $\xi = 0$  الإستفادة من هذه التقنية هو أنه يمكن إنتقاط حل للمشكلة في الجوار من نقطة الشاذة . يمكن أن تكون الموجات أكثر دقة للعثور على الدقة الكافية في الحلول بسبب خصائصه، ومن السهل التعامل مع موجات هار بإستخدام طريقة التجميع الشبه خطي وعملية الحل المعادلات التفاضلية الشاذة الغير الخطية من طريقة قالاركين . علاوة على ذلك ، في هذه الطريقة يتم إنشاء نظام خطي سهل حله مقارنة بالنظام غير الخطي للمعادلات التي تم الحصول عليها بطريقة أخرى .

هذه الخاصية من طريقة موجة هار الشبه خطية يزيل إمكانية الحل الغير مستقر بسبب شرط مبدئي مفقود .

الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو دراسة تطبيقات موجات هار لإتقاط حلول معادلة Lane-Emden الشاذة الغير الخطية المعممة وهي معادلة معروفة جيدا في الفيزياء الفلكية . لقد استخدمنا الشبه الخطي جراء طريقة تجميع الموجات مع موجات هار لهذا الهدف . الطريقة المقترحة تقلل المشكلة إلى نظام معادلات جبرية وتلتقط بنجاح الحلول لمشكلة مستهدفة . ويخصص هذا القسم لتقديم مختلف أشكال معادلة Lane-Emden غير الخطية المعممة وطريقة مختلفة لإيجاد الحلول .

# الفصل الثالث

## حل فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden

### قائمة المحتويات

---

35	.....	1.3	فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden
35	.....	2.3	استعمال متعدد موجات ليجنر لحل المسألة (LMWM)
37	.....	3.3	تطبيقات عديدة:

---

### 1.3 فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden

نفترض أن معادلة Lane-Emden

$$y''(x) + \frac{k}{x}y'(x) + f(y) = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (1.3)$$

بضرب في  $x^k$  و المكاملة على المجال  $[0, x]$  تصبح لدينا

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^k}{x^k}\right) f(y(t)) dt, \quad y(0) = a, \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

وبتكامل مرة أخرى على  $[0, x]$  لدينا

$$y(x) = a - \frac{1}{k-1} \int_0^x t \left(1 - \frac{t^{k-1}}{x^{k-1}}\right) f(y(t)) dt. \quad (3.3)$$

### 2.3 استعمال متعدد موجات ليجندر لحل المسألة (LMWM)

نعتبر المعادلة التفاضلية-التكاملية لفولترا المعطاة في (2 . 3) والتي هي على شكل معادلة Lane-Emden المعرفة في (1 . 3) . بتطبيق متعدد موجات ليجندر [2, 5, 4, 3, 6] ويجب أولاً أن نتقارب المعادلة

$$y(x)$$

إلى

$$y(x) = C^T \Psi(x). \quad (4.3)$$

عندما تكون  $C$  معرفة مثل (1 . 27) .

نكامل (2 . 3) وباستخدام الشروط الابتدائية  $y(0) = a$  لدينا

$$y(x) = a - \int_0^x \left[ \int_0^z \left(\frac{t^k}{z^k}\right) f(y(t)) dt \right] dz, \quad k \geq 1. \quad (5.3)$$

ثم من (3 . 4) و (3 . 5) لدينا :

$$\begin{aligned} C^T \Psi(x) &= a - \int_0^x \left[ \int_0^z \left(\frac{t^k}{z^k}\right) f(C^T \Psi(x)) dt \right] dz, \quad k \geq 1 \\ &= a - \int_0^x H(z) dz, \end{aligned} \quad (6.3)$$



عندما يكون

$$H(z) = \int_0^z \left(\frac{t^k}{z^k}\right) f(C^T \Psi(t)) dt$$

والآن نقوم بتغيير المتغير  $x$  في (3 . 6) إلى  $x_i = \frac{(2i-1)T}{2^{k+1}(N+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^k(N+1)$

$$C^T \Psi(x_i) = a - \int_0^{x_i} H(z) dz \quad (7.3)$$

باستخدام صيغة التكامل "غوص" "Gaussian" ل (3 . 7) ، نغير المجال  $[0, x_i]$  إلى المجال  $[-1, 1]$  عن طريق التحويل

$$\tau = \frac{2}{x_i} z - 1$$

يمكن كتابة (3 . 7) على نحو التالي

$$C^T \Psi(x_i) = a - \frac{x_i}{2} \int_{-1}^1 H\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1)\right) d\tau \quad (8.3)$$

باستخدام صيغة تكامل "غوص" "Gaussian" ، نحصل :

$$C^T \Psi(x_i) \cong a - \frac{x_i}{2} \sum_{j=1}^s w_j H\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1)\right), \quad (9.3)$$

حيث  $\tau$  هي  $s$  أصفار من كثيرات حدود لجندر  $P_{s+1}$  و  $w_j$  هي دالة الوزن .  
الفكرة وراء التقريب أعلاه هي دقة صيغة تكامل "غوص" "Gaussian" لمتعدد حدود من درجة لا تتجاوز  $2s + 1$ .

المعادلة (3 . 9) يعطي نظام معادلات جبرية غير خطية  $2k(N+1)$  مع نفس العدد الغير معروف لمصفوفة المكونة  $C$  حل هذا النظام عدديا بواسطة طريقة نيوتن يمكننا الحصول على قيم المجهول  $C$  وبالتالي نحصل على حل المعادلة التالية  $y(x) = C^T \Psi(x)$  .

### 3.3 تطبيقات عددية:

مثال 1.3.3 يعتبر الشكل العام لمعادلة Lane-Emden من نوع الاول

$$y''(x) + \frac{k}{x}y'(x) + y^n(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad k \geq 1.$$

هذه المعادلة تكافئ المعادلة التفاضلية-التكاملية

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^k}{x^k}\right)y^n(t)dt, \quad y(0) = 1, \quad k \geq 1.$$

الحلول الدقيقة لهذا الشكل  $k = 2$  و  $n = 0, 1, 5$  على التوالي

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^2$$

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2}$$

الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من طريقة متعدد موجبات ليجندر ( $N = 7, k = 1$ ) بالنسبة لعامل الشكل مع حلولها المقابلة المطابقة والأخطاء المطلقة في الجداول (1) (2) (3) على التوالي.

مثال 2.3.3 تعتبر معادلة Lane-Emden من نوع الثاني

$$y''(x) + \frac{k}{x}y'(x) + e^{y(x)} = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad k \geq 1.$$

هذه المعادلة تكافئ المعادلة

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^k}{x^k}\right)e^{y(t)}dt, \quad y(0) = 1, \quad k \geq 1.$$

انخطا المطلق	الحل الدقيق	حل LMWM	x
2.66664E-12	0.993333	0.993333	0.2
2.13333E-11	0.973333	0.973333	0.4
7.20001E-11	0.940000	0.940000	0.6
1.70667E-10	0.893333	0.893333	0.8
3.33333E-10	0.833333	0.833333	1

جدول 1:الحلول العددية مثال (1.3.3) من اجل  $k = 2, n = 0$

انخطأ المطلق	الحل الدقيق	حل LMWM	x
2.45593E-9	0.993347	0.993347	0.2
5.46664E-10	0.973546	0.973546	0.4
2.45289E-10	0.941071	0.941071	0.6
1.94895E-10	0.896695	0.896695	0.8
2.48936E-10	0.841471	0.841471	1

جدول 2:الحلول العددية مثال (1.3.3) من اجل  $k = 2, n = 1$

انخطأ المطلق	الحل الدقيق	حل LMWM	x
2.66055E-9	1	1	0
1.07934E-11	0.993399	0.993399	0.2
1.17952E-11	0.974355	0.974355	0.4
1.64531E-11	0.944911	0.944911	0.6
2.17233E-11	0.907841	0.907841	0.8

جدول 3:الحلول العددية مثال (1.3.3) من اجل

$$k = 2, n = 5$$

الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من طريقة متعدد مويجات ليجندر ( $N = 7, k = 2$ ) لعامل الشكل  $k = 2, 3, 4$  تم مقارنة مع الحلول التي تم الحصول عليها بواسطة طريقة التكرار المتغير (VIM) [14] المذكورة في الجدول (4) .

k=4		k=3		k=2		x
VIM	LMWM	VIM	LMWM	VIM	LMWM	
0	-1.2637E-11	0	-2.484E-11	0	-5.7433E-11	0
0.003994-	0.003994-	0.004992-	0.004992-	0.006653-	0.006653-	0.2
0.015909-	0.015909-	0.019868-	0.019868-	0.026456-	0.026456-	0.4
0.035544-	0.035544-	0.044337-	0.044337-	0.058944-	0.058944-	0.6
0.062578-	0.062578-	0.077935-	0.077935-	0.103386-	0.103386-	0.8

جدول 4: الحلول العددية للمثال (2.3.3)

مثال 3.3.3 بعد ذلك تعطي معادلة Lane-Emden المعطيات بشكل

$$y''(x) + \frac{8}{x}y'(x) + (18y(x) + 4y(x)\ln(y(x))) = 0; y(0) = 1; y'(0) = 0$$

تعطي صيغة فولترا تفاضلية-التكاملية لهذه المعادلة بشكل التالي

$$y'(x) + \int_0^x \frac{8}{x}(18y(t) + 4y(t)\ln(y(t)))dt = 0; y(0) = 1$$

حيث الحل الدقيق  $e^{-x^2}$ . حلول متعدد مويجات ليجندر  $k = 1, N = 7$  حيث أن حلولها الدقيقة والاختلاف المطلقة موضحة في الجدول (5).

انخطأ المطلق	الحل الدقيق	حل LMWM	x
3.95615E-8	1	1	0
2.96242E-10	0.990050	0.990050	0.1
3.82808E-10	0.960789	0.960789	0.2
2.95619E-8	0.913931	0.913931	0.3
4.68592E-7	0.852143	0.852143	0.4
3.64064E-6	0.778797	0.778797	0.5

جدول 5: الحلول العددية من أجل المثال (3.3.3)

مثال 4.3.3 يعتبر نظام المعادلات غير خطية من نوع Lane-Emden المعطى بشكل الآتي

$$y_1''(x) + \frac{8}{x}y_1'(x) + (18y_1(x) - 4y_1(x)\ln y_2(x)) = 0$$

$$y_2''(x) + \frac{4}{x}y_2'(x) + (4y_2(x)\ln y_1(x) - 10y_2(x)) = 0$$

مع الشروط الأولية

$$y_1(0) = 1; y_1'(0) = 0;$$

$$y_2(0) = 1; y_2'(0) = 0$$

حيث تعطى صيغة فولترا تفاضلية-التكاملية الغير خطية لها بشكل التالي

$$y_1'(x) + \int_0^x \frac{t^8}{x^8}(18y_1(x) - 4y_1(x)\ln y_2(x))dt = 0$$

$$y_2'(x) + \int_0^x \frac{t^4}{x^4}(4y_2(x)\ln y_1(x) - 10y_2(x))dt = 0$$

ذي شروط أولية

$$y_1(0) = 1; y_2(0) = 1$$

وحلها الدقيقة المقابلة هي

$$y_1(x) = e^{x^{-2}}; y_2(x) = e^{x^2}$$

الحلول التقريبية التي حصلت عليها طريقة متعدد مويجات ليجندر  $k = 1, N = 7$  حلولها الدقيقة والأخطاء المطلقة موضحة في جدول (6)

الخطأ المطلق		الحل الدقيق		حل LMWM		x
$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	
8.44232E-8	7.15876E-8	1	1	1	1	0
6.59049E-10	5.61584E-10	1.01005	0.99005	1.01005	0.99005	0.1
3.34747E-10	9.69923E-10	1.04081	0.960789	1.04081	0.960789	0.2
4.47131E-8	3.5286E-8	1.09417	0.913931	1.09417	0.913931	0.3
8.00388E-7	6.22823E-7	1.17351	0.852144	1.17351	0.852144	0.4
7.03964E-6	4.48153E-6	1.28403	0.778801	1.28402	0.778805	0.5

جدول 6: الحلول العددية من أجل المثال (4.3.3)

## خاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة في عرض طريقة عديدة لحل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden باستخدام متعدد موجبات ليجندر .  
ومن مزايا هذه الطريقة الحصول على الحل الأكثر دقة ، لذلك درسنا هذا الموضوع وقسمناه إلى ثلاثة فصول .

الفصل الأول تعرفنا على كثيرات حدود ليجندر و الموجبات ، و كذلك تقريب التابع بمتعدد موجبات ليجندر ، أما الفصل الثاني تعرفنا على معادلة Lane-Emden ومختلف الدراسات لحلها ، وختمنا الدراسة في الفصل الثالث حيث حولنا معادلة Lane-Emden إلى معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية واستخدمنا متعدد موجبات ليجندر في حلها و طبقنا الطريقة على بعض الأمثلة .

## المراجع العلمية

- [1] S. A. YOUSEFI ,*Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, Numer. Methods Partial Diferential Eq., 26 (2010), 535-543.*
- [2] J. BIAZAR, H. EBRAHIMI,*Legendre Wavelets for Systems of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, World Applied Sciences Journal, 9(9) (2010), 1008-1012.*
- [3] S.A.YOUSEFI,M.BEHROOZIFAR,MEHDI DEHGHAN, *Numerical solution of the non linear age-structured population models by using the operational matrices of Bernstein polynomials,Applied Mathematical Modelling,22july2011 .*
- [4] K. MALEKNEJAD, M. T. KAJANI, Y. MAHMOUDI, *Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equation of the second kind by using Legendre wavelets, Kybernetes, 32(9/10) (2003), 1530-1539.*
- [5] K. MALEKNEJAD, S. SOHRABI; , *Numerical solution of Fredholm integral equations of the frst kind by using Legendre wavelets, Appl. Math. Comput., 186 (2007), 836-843 .*
- [6] S. YOUSEFI, M. RAZZAGHI; *Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm in- tegral equations, Mathematics and Computers in Simulation, 70 (2005), 1-8.*
- [7] X. ZHENG, X. YANG; *Techniques for solving integral and dierential equations by Legendre wavelets, International Journal of Systems Science, 40(11) (2009), 1127-1137.*

- [8] H. GOENNER, P. HAVAS, *Exact solutions of the generalized Lane-Emden equation*, *J. Math. Phys.*, 41 (2000), 7029-7042.
- [9] C. M. KHALIQUE, F. M. MOHAMED, B. MUATJETJEJA; , *Lagrangian formulation of a generalized Lane-Emden equation and double reduction*, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 15(2) (2008), 152-161. ,
- [10] P. MACH , *All solutions of the  $n = 5$  Lane-Emden equations*, *J. Math. Phys.*, 53 (2012), 062503.,
- [11] K. MALEKNEJAD, B. BASIRAT, E. HASHEMIZADEH ,*Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra-Fredholm integro-diferential equations*, *Computers and Mathematics with Applications*, 61 (2011), 2821-2828. ,
- [12] K. PARAND, M. SHAHINI, M. DEGHAN; ,*Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear diferential equations of Lane-Emden type*, *J. Comput. Phys.*, 228 (2009), 8830- 8840. ,
- [13] S. SRIVASTAVA; ,*On the physical validity of Lane-Emden equation of index 5*, *Math. Stud.*, 34 (1966), 19-26.,
- [14] A. M. WAZWAZ; ,*Analytical solution for the time-dependent Emden-Fowler type of equations by Adomian decomposition method*, *Appl. Math. Comput.*, 166 (2005), 638-651,
- [15] A. M. WAZWAZ; , *A new algorithm for solving diferential equations of Lane-Emden type*, *Appl. Math. Comput.*, 118 (2001), 287-310. ,
- [16] A. M. WAZWAZ ,R. RACH, J. S. DUAN ,*Adomian decomposition method for solving the Volterra integral form of the Lane-Emden equations with initial values and boundary conditions*, *Appl. Math. Comput.*, 219(10) (2013), 5004-5019. ,
- [17] A. M. WAZWAZ ,*The variational iteration method for solving the Volterra integro-dierential forms of the Lane-Emden equations of the frst and the second kind*, *J Math Chem.*, 52(2) (2014), 613-626.,





- [18] A. YILDIRIM, T. AZIS; ,*Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by homotopy perturbation method*, *Phys. Lett. A.*, 369 (2007), 70-76.,
- [19] L. ZHU, Q. FAN ,*Solving fractional nonlinear Fredholm integro-diferential equations by the second kind Chebyshev wavelet*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17 (2012), 2333-2341.
- [20] S.CHANDRASEKHAR ; ,*Introduction to the study of stellar structure*,*Dover,New York* ( 1967 ).

### ملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة فولترا التفاضلية-التكاملية الناتجة عن معادلة Lane-Emden من الدرجة الثانية وذلك بإستخدام متعدد موجات ليجنندر . ثم نقدم تطبيق هذه الطريقة في بعض الأمثلة , ومقارنة النتائج المتحصل عليها بإستخدام هذه الطريقة والنتائج المتحصل عليها بإستخدام طرق عددية أخرى لرؤية مدى صحة ودقة الطريقة المستخدمة .

**الكلمات المفتاحية:** معادلة فولترا التفاضلية-التكاملية ، معادلة Lane-Emden ، متعدد موجات ليجنندر .

### Abstract

The main objective of this work is to present a numerical method for solving the differential-integrative equation of the Lane-Emden equation of the second order using multi-waveigen ligand. Then, applying this method on some examples and comparing the results obtained using this method and the results obtained using other numerical methods to see the validity and accuracy of the method used.

**Keywords:** Volterra integro-differential equation , the Lane-Emden equation , Legendre multi-wavelets .

### Résumé

L'objectif principal de ce travail est de présenter une méthode numérique pour résoudre l'équation différentielle-intégrative de l'équation de Lane-Emden du second ordre en utilisant un ligand multi-onde.

Ensuite, en appliquant cette méthode sur quelques exemples et en comparant les résultats obtenus en utilisant cette méthode et les résultats obtenus en utilisant d'autres méthodes numériques pour voir la validité et l'exactitude de la méthode utilisée.

**Mots clés:** l'équation différentielle-intégrative de volterra, l'équation de Lane-Emden , légendes multi-ondelettes