جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة : **حفيان انصاف**

الموضوع

حل عددي للمعادلات التفاضلية التكاملية ذات رتب كسرية باستعمال دوال مهجنة (دوال القطع النبضية وكثيرات حدود جاكوبي)

تناقش يوم 2018/06/06 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	أستاذ مساعد. أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
عباسي حسين	أستاذ مساعد. أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
بن الشيخ عبد الكريم	أستاذ مساعد. أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

إهداء

اللهم انفعني بما علمتني بما ينفعني وزدني علما، اللهم اجعل القرآن ربيع قلبي ونور صدري وجلاء حزني وذهاب همي- آمين-

أهدي ثمرة جهدي هذا إلى:

من بلغ الرسالة أدى الأمانة ونصح الامة على نبي الرحمة سيدنا محمد "صلى الله عليه وسلم" على روح قلبي ونور قلبي منبع العطاء، إلى من يحرسني دعاؤها ويحميني رضاؤها، إلى من جعل الخالق الجنة تحت قدميها هدية الرب

" ماما حفظها الله"

إلى من رباني على المبادئ والقيم وعلمني معنى التحدي.. رمز العطاء والتفاني.. إلى من لم يجعلوا له عيدا وبالنسبة لي هو فرحة كل عيد.. إلى رفيقي وأستاذي في الحياة

"بابا حفظه الله"

إلى من يسري فينا دم واحد ونمثل جسد واحد إخوتي وأخواتي إلى كل الأصدقاء و الأحباب دون استثناء إلى الذين حملوا من أقدس الرسائل في الحياة.إلى جميع أساتذتي الأفاضل في مشواري الدراسي.

شكر وعرفان

اللهم لك الحمد حمدا كثيرامباركا فيه,ملئ السموات وملئ الأرض,وملئ ماشئت من شيء بعد,أهل الثناء والمجد,أحق ماقال العبد,وكلنا لك عبد,أشكرك ربي على نعمتك التي لا تعد,وألائك التي لا تحد,أحمدك ربي وأشكرك على أن يسرت لي إتمام هذا العمل على الوجه الذي أرجوأن ترضى به عني

ثم أتوجه بالشكر إلى من مهد لي هذه الرسالة الأستاذ الفاضل
عبد الكريم بن الشيخ

الذي لم يبخل علي بتوجيهاته وبنصائحه القيمة الثمينة طول مراحل إنجاز
هذا العمل

كما أتقدم بالشكر لكل الأساتذة في تكويني عبر المسار الدراسي
من الإبتدائية إلى الجامعة

وإلى كل من قدم يد المساعدة من قريب أو بعيد فله مني خالص التقدير و الإحترام وجزيل الشكر
نسأل الله أن يجازي الجميع كل الخير

ملخص

في هذه المذكرة نتطرق لعرض وافي لخصائص كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية و قدمنا مختلف مصفوفات العمليات الخاصة به.ثم إستخدمنا كثيرات حدود جاكوبي في إيجاد حل تقريبي للمعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية حيث تتحول تلك المعادلات إلى جملة معادلات جبرية غير خطية يمكن حلها بعدة طرق معروفة كطريقة نيوتن. هذا الأسلوب أثبت فاعلية في الوصول إلى حلول دقيقة من خلال عرض مجموعة أمثلة عددية تبين دقة وتقارب الحل نحو الحل الحقيقي,كما يمكن تطبيق هذا المنهج في عدة مسائل رياضية أخرى.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية ,كثيرات كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية ,مصفوفات العمليات.

Abstract

We have discusse in this research the properties of hybrid jacobi and block pluse functions and we have provided various operations matrice,then we have used jacobi polynomas to find an approximate solution to nonlinear fractional integro-differential equation where this equation transforms into nonlinear equations phrases algebraic wich can be solved by well-known methods as Newton's method.this method has proved its effectiveness for accessing numerical exemples that show it, andcan be applied this approsch to several other mathematical problems.

Key words: nonlinear fractional integro-differential equations, hybrid jacobi and block pluse functions,operational matrice.

Résumé

Nous avons discuté dans cette recherchles propriétés des polynômes hybrides de jacobiet et les fonctions block pulse nous avons fourmileurs différentes matrices opérationnelles,puis nous avons utilisé des polynômes de jacobi pour trouver une solution approchée de integro-différentiel fraclionnaire non linéaire equation où cette équation se transformer en phrases d'équations algébriques non linéaire peut être résolu par des méthods de Newton.cette méthode a prouvé son efficacité pour accés a des solution précises en affichant des exemples numériques qui le montrent, et peut être appliqué cette approche a plusieurs autres problémes matématiques.

Mots-clés : integro-différentiel fraclionnaire non linéaire equation, polynômes hybrides de jacobiet et les fonctions block pulse ,matrices opérationnelles.

الفهرس

ترميز

الرمز	معناه
$\Gamma(x)$	الدالة غاما
$B(x,y)$	الدالة بيتا
J^V	التكامل الكسري بمفهوم ريمان-لوفيل
D^V	المشتق الكسري بمفهوم ريمان-لوفيل
D_*^V	المشتق الكسري بمفهوم كابوتو
$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	الشكل التحليلي لكثيرات حدود جاكوبي المتغيرة
δ_{ij}	دلتا كرونكر ($\delta_{ij}=1$ إذا كان $i=j$ و $\delta_{ij}=0$ إذا كان $i\neq j$)
$w(x)$	دالة الوزن
$b_j(x)$	دالة القطع النبضية
$h_{mn}(x)$	كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية
$\widetilde{B}$	مصفوفة العمليات الكسرية للجداء
E	مصفوفة تكامل الجداء الثنائي
I^V	مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل

مقدمة

إن العديد من المسائل الفيزيائية تؤول عند دراستها إلى معادلات تفاضلية تكامليةوالتي ضهرت عن طريق فولتيرا عام 1900. ومن بين هذه المعادلات لدينا المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية,التي تلعب دور مهم في العديد من المجالات مثل الإقتصاد,المرونة, حركة الموائع, إنتشار الحرارة, ونضرية التذبذب.عادة يصعب إيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية التكاملية بالطرق التحليلية لذلك نلجأ إلى الطرق العددية.وقد عمل الباحثون على إستنباط طرق عددية مختلفة وتطويرها وتحسينها لحل هذه المعادلات مثل طريقة وظائف قياس المويجات (the wavelet method),طريقة دالة والش (Walsh function method),طريقة التحليل الهوموتوبي (homotopy analysis method),طريقة التحويل التفاضلي (differential transform method),إستخدام المزج بين كثيرات حدود لجندر ودوال القطع النبضية (hybrid of Legendre polynomails and block pulse functions), طريقة كثيرات حدود تشيبيتشيف (Chebyshev polynomial method),طريقة مصفوفة برنولي(Bernoulli matrix method). إن الغرض من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية التالية:

$$D_*^V f(x) - \int_0^1 K(x,t)F(f(t))dt = g(x) \qquad (1)$$

والتي تحقق الشروط الإبتدائية:

$$f^{(i)}(0) = a_i \qquad i = 0, \dots, m' - 1;$$

حيث $f(x), g(x) \in H_{w_s}^r$ و $K(x,t) \in H_{w_s}^r((0,1)\times(0,1)), r \in N$
$f(x)$ دالة معلومة, D_*^V المشتق الكسري لكابوتو من الدرجة $m' - 1 < V \leqslant m'$ وأيضا F كثير حدود للدالة f
وذلك بإستخدام كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية لتحويل المعادلات التفاضلية التكاملية ذات الرتب الكسرية غير خطية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية قابلة للحل بسهولة.
تحتوي المذكرة على ثلاثة فصول وهي مقسمة كالاتي:

1. الفصل الأول:

يتضمن هذا الفصل ثلاثة أجزاء,في الجزء الأول تم ذكر بعض التعريفات التي ترتبط بباقي الأجزاء الأجزاء والفصول الأخرى,وفي الجزء الثاني تم ذكر كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية,تقريب تابع.

2. الفصل الثاني:

ينقسم هذا الفصل إلى ثلاثة أجزاء,في الجزء الأول تم تعيين مصفوفة تكامل الجداء الثنائي.في الجزء الثاني ,تم تعيين مصفوفة العمليات الكسرية للجداء ,في الجزء الثالث مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل.

3. الفصل الثالث:

ينقسم هذا الفصل إلى أربعةأجزاء ,الجزء الأول تم تعريف المعادلات التفاضلية-التكاملية من رتب كسرية غير خطية.الجزء الثاني يوضح طريقة حل هذه المعادلات ,وفي الجزء الثالث تحليل الخطأ.وفي الجزء الرابع تم تطبيق الطريقة المقترحة على بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية-التكاملية من رتب كسرية غير خطية.

وفي الأخير جاءت الخاتمة التي إشتملت على أهم النتائج التي توصلنا إليها يتبعها أسماء المصادر والمراجع التي إعتمدنا عليها في إنجاز هذه المذكرة.

الفصل الأول
مفاهيم أساسية

1.1 التكامل والتفاضل الكسري

في هذا القسم,نقدم بعض التعاريف والخصائص الأساسية للتفاضل والتكامل الكسري التي تستخدم في حل العديد من المسائل المعقدة.

1.1.1 توابع خاصة GammaوBeta

تعريف 1.1.1. [2]
التابع غاما (Gamma) المعرفة على المجال $[0,\infty)$ هو تابع من الشكل:

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \tag{1.1}$$

خواص 1.1.1.
التابع غاما تحقق الخواص التالية:

.1
$$\Gamma(x)>0$$

.2
$$\Gamma(1)=1$$

.3
$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\quad ,\forall x\neq 0$$

برهان. .1
لدينا:
$$f(x)=e^{-t}t^{x-1}\geqslant 0$$
وحدود التكامل من المجال $[0,\infty)$ ومنه $\Gamma(x)>0$

.2 بتطبيق مباشر للتعريف نحصل على:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{1-1}dt\\ &= \int_{0}^{\infty}e^{-t}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[-e^{-t}\right]_0^\infty \\ &= 1 \end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{(x+1)-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x} \end{aligned}$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة وذلك بوضع

$$u = t^x \qquad dv = e^{-t} dt$$

ومنه

$$du = x t^{x-1} dt \qquad v = -e^{-t}$$

نحصل على

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right) x t^{x-1} dt \\ &= 0 + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

$\square$

التابع غاما تحقق أيضا الخواص التالية:

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ و $\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

ويمكن أيضا تعريف التابع غاما بأحد الأشكال التالية:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{x} \Pi_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^2 (1+\frac{x}{n})^{-1} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\ln t}\right)^{x-1} dt$$

مثال 1.1.1.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \\
\Gamma(\frac{3}{2}) &= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\Gamma(\frac{5}{2}) &= \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&\vdots \\
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

حيث n=1,2,3...

ملاحظة 1.1.1.

لدينا: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

بوضع$x = n$حيث n عدد صحيح موجب

بإستخدام التكامل بالتجزئة عدة مرات نحصل على:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots 1\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}
$$

نظرية 1.1.1.

التابع غاما قابلة للإشتقاق حيث:

$$\Gamma^{'}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}log(t)e^{-t}dt \qquad (1.-3)$$

برهان.
لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial x}(t^x) = t^x log(t)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^x}{t}dt\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\frac{\partial}{\partial x}(t^x)dt \\
&= \int_0^\infty t^{x-1}log(t)e^{-t}dt
\end{aligned}$$

□

تعريف 2.1.1.
يعرف التابع بيتا (Beta) بالشكل التالي:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (1.-2)$$

حيث $x, y > 0$

خواص 2.1.1.

1.

$$B(x,y) = B(y,x)$$

2.

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$$

3.

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

.4

$$B(x,y) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{x+y}} dt$$

برهان. .1
لدينا:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

بوضع

$$dt = -dz \qquad ; z = 1-t$$

$$t = 0 \Leftrightarrow z = 1; \quad t = 1 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int\limits_1^0 (1-z)^{x-1} z^{y-1}(-dz) \\ &= \int\limits_0^1 (1-z)^{x-1} z^{y-1}(dz) \\ &= B(y,x) \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{-1}{2}}du \\ &= 2\arcsin(1) \\ &= 2\frac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

3. لدينا

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

لتكن:

$$t = \sin^2\theta \Rightarrow dt = 2\sin\theta\cos\theta dt$$

ومنه

$$t = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \quad t = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)}\theta(1-\sin^2\theta)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta \end{aligned}$$

4. لتكن

$$t = \frac{u}{1+u} \Rightarrow dt = \frac{1}{(1+u)^2}du$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 0; \quad t = 1 \Leftrightarrow u = \infty$$

بالتعويض في العلاقة نحصل على:

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} (\frac{u}{1+u})^{x-1}(1-\frac{u}{1+u})^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}du$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \end{aligned}$$

□

نظرية 1.2.1.
من أجل $x, y > 0$ لدينا العلاقة بين التابع جاما وبيتا

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1-.1}$$

برهان.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-t-s}dtds \end{aligned}$$

بوضع: $t = uv$ و $s = u(1-v)$
بحيث u و v معرفتين على المجالين التاليين على التوالي:
$0 \le u < \infty$, $0 \le v \le 1$

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

بالتعويض نحصل على:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-t-s}dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}u^{x-1}v^{x-1}u^{y-1}(1-v)^{y-1}ududv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{-u}u^{(x+y)-1}du \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv \\ &= \Gamma(x+y)B(x,y) \end{aligned}$$

بالتالي نحصل على

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

□

مثال 2.1.1.

.1

$$\begin{aligned} B(6,5) &= \int_0^1 x^5(1-x)^4 \\ &= \frac{\Gamma(6)\Gamma(5)}{\Gamma(11)} \\ &= \frac{(6-1)!(5-1)!}{(11-1)!} \\ &= \frac{1}{1260} \end{aligned}$$

.2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x)\cos^3(x)dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}B(4,2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(4-1)!(2-1)!}{(6-1)!} \\ &= \frac{1}{240} \end{aligned}$$

2.1.1 التفاضل والتكامل بمفهوم Riemann-Liouville

تعريف 3.1.1. [27]
يعرف ريمان-لوفيل التكامل الكسري من الدرجة $V \geq 0$ للدالة f بالشكل التالي:

$$J^V f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(V)} \int\limits_0^t (t-s)^{V-1} f(s) ds & V > 0 \\ f(t) & V = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

حيث $t \in R$

تعريف 4.1.1.
يعرف ريمان-لوفيل المشتق الكسري من الدرجة $V > 0$ للدالة f بالشكل التالي:

$$D^V f(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m J^{m-V} f(t) \tag{1.1}$$

أي

$$D^V f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int\limits_0^t (t-s)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(s) ds \tag{2.1}$$

حيث $m - 1 < V \leqslant m$ و m عدد صحيح

خواص 3.1.1.

.1

$$J^V t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+V)} t^{\gamma+V} \tag{3.1}$$

حيث $\gamma > -1$

.2

$$J^V J^\gamma f(t) = J^{V+\gamma} f(t) \tag{4.1}$$

$V, \gamma > 0$

.3

$$D^V\left[D^U f(t)\right] = D^{(U+V)} f(t) \tag{5.1}$$

برهان.

$$\begin{aligned} J^V t^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^t (t-s)^{V-1} s^\gamma ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^t (1-\frac{s}{t})^{V-1} t^{V-1} s^\gamma ds \end{aligned}$$

بوضع $u=\frac{s}{t}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^1 (1-u)^{V-1} t^{V-1} (tu)^\gamma t du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(V)} t^{\gamma+V}\int_0^1 u^\gamma (1-u)^{V-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(V)} t^{\gamma+V} \beta(\gamma+1, V) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+V+1)} t^{\gamma+1} \end{aligned}$$

.2 بوضع $J^\gamma f(t) = F(t)$ نحصل على

$$\begin{aligned} J^V J^\gamma f(t) &= J^V F(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^t (t-s)^{V-1} F(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^t (t-s)^{V-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^x (x-y)^{\gamma-1} f(y) dy\right] ds \\ &= \frac{\beta(V,\gamma)}{\Gamma(V)\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-y)^{\gamma+V-1} f(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(V+\gamma)}\int_0^t (t-y)^{\gamma+V-1} f(y)dy \\
&= J^{(\gamma+V)} f(t)
\end{aligned}$$

.3

$$D^V\left[D^U f(t)\right] = D^{(U+V)} f(t)$$

بإتباع نفس الطريقة السابقة

□

مثال 3.1.1.

$$J^V \ln t = \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^t (t-s)^{V-1} \ln s ds$$

بوضع $s = tx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(V)}\int_0^1 (t-tx)^{V-1}\ln(tx) t dx \\
&= \frac{t^V}{\Gamma(V)}\int_0^1 (1-x)^{V-1}\ln(tx) dx \\
&= \frac{t^V}{\Gamma(V)}\left[\int_0^1 (1-x)^{V-1}\ln t dx + \int_0^1 (1-x)^{V-1}\ln x dx\right] \\
&= \frac{t^V}{V\Gamma(V)}\ln t + \frac{t^V}{\Gamma(V)}\int_0^1 (1-x)^{V-1}\ln x dx \\
&= \frac{t^V}{\Gamma(V+1)}\ln t + \frac{t^V}{\Gamma(V)}\beta(1,V)\left[\Psi(1)-\Psi(1-V)\right]
\end{aligned}$$

ملاحظة 2.1.1.
من أجل $f(x) = K$ حيث K ثابت فإن المشتق الكسري لريمان-لوفيل يكون كالتالي

$$D^V K = \frac{K}{\Gamma(1-V)} t^{-V} \qquad V \geqslant 0, t > 0$$

3.1.1 المشتق الكسري بمفهوم Caputo

تعريف 5.1.1. [27]
يعرف كابوتو المشتق الكسري للدالة f بالشكل التالي:

$$D_*^V f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^t (t-s)^{m-v-1} f^{(m)}(s)ds \tag{6.1}$$

حيث $m-1 < v \leqslant m$ و m عدد صحيح موجب

نظرية 1.3.1.

$$D_*^V f(t) = D^V f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-V}}{\Gamma(k+1-V)} f^{(k)}(0) \tag{7.1}$$

برهان.
بإستخدام نشر تايلور للدالة f عند النقطة 0 نحصل على

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \end{aligned}$$

حيث

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)(t-\tau)}{(n-1)!} d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau = J^n f^{(n)}(t)$$

$$\begin{aligned} D^V f(t) &= D^V \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^V t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^V R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-V)} \frac{t^{k-V}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^V J^n f^n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-V}}{\Gamma(k+1-V)} f^{(k)}(0) + J^{n-V} f^n(t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-V}}{\Gamma(k+1-V)} f^{(k)}(0) + D_*^V f(t)$$

ومنه

$$D_*^V f(t) = D^V f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-V}}{\Gamma(k+1-V)} f^{(k)}(0)$$

□

ملاحظة 3.1.1.

من أجل $f(x) = K$ حيث K ثابث فإن المشتق الكسري لكابوتو يكون معدوم أي

$$D_*^V K = 0$$

خواص 4.1.1.

1. خطية

$$D_*^V (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_*^V f(t) + \mu D_*^V g(t) \tag{8.1}$$

حيث λو μ ثوابث

.2

$$D_*^V t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-V+1)} t^{\alpha-V} \tag{9.1}$$

.3

$$J^V D_*^V(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n=1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!} \tag{10.1}$$

حيث k=0,1...n-1

برهان.

$$D_*^V (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^x (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^x \left[(x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \lambda f(t) + (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \mu g(t) \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^x (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \lambda f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^x (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \mu g(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^x \left[(x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \lambda f(t) + (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \mu g(t) \right] dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(m-V)} \int_0^x (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t) dt + \frac{\mu}{\Gamma(m-V)} \int_0^x (x-t)^{m-V-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} g(t) dt \\
&= \lambda D_*^V f(t) + \mu D_*^V g(t)
\end{aligned}
$$

.2

$$
\begin{aligned}
D_*^V t^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^t \frac{(s^\alpha)^{(m)}}{(t-s)^{V+1-m}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-V)} \int_0^t (s^{\alpha-m})(t-s)^{m-V-1} ds
\end{aligned}
$$

بوضع $s = \lambda t$ حيث $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
D_*^V t^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-V)\Gamma(\alpha-m+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{\alpha-m} \left((1-\lambda)t\right)^{m-V-1} t d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-V)\Gamma(\alpha-m+1)} t^{\alpha-V} \int_0^1 \lambda^{\alpha-m} (1-\lambda)^{m-V-1} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-V)\Gamma(\alpha-m+1)} t^{\alpha-V} B(\alpha-m+1, m-V) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-V)\Gamma(\alpha-m+1)} t^{\alpha-V} \frac{\Gamma(\alpha-m+1)\Gamma(m-V)}{\Gamma(\alpha-V+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-V+1)} t^{\alpha-V}
\end{aligned}
$$

3. لدينا

$$D_*^V(t) = D^V f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^{k-V}}{\Gamma(k+1-V)}$$

$$\begin{aligned} &= D^V f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{D^V x^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= D^V \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

بإدخال التكامل الكسري على الطرفين نحصل على

$$J^V D_*^V(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n=1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}$$

□

مثال 4.1.1.
لتكن $f(t) = t$ و $V = 1/2$, $m = 1$

$$\begin{aligned} D_*^{1/2} t &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{1}{t-s}^{1/2} ds \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{t-s}^{1/2} d(t-s) \end{aligned}$$

بوضع $u = (t-s)^{1/2}$

$$\begin{aligned} D_*^{1/2} t &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{u} du^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0) \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

2.1 كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية

1.2.1 دوال القطع النبضية

إن دوال القطع النبضية هي مجموعة دوال متعامدة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئي وهي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل,ومسائل التحكم و الأنضمة العلمية الأخرى.قدمت هذه المعادلات لأول مرة لمهندسي الكهرباء عن طريق هرميت في عام 1969,لكن لمدة حوالي سبع سنوات لم تلقى أي إهتمام من ناحية التطبيقات العملية.حتى منتصف السبعينات,حيث قام بعض الباحثين بدراسة دوال القطع النبضية و مصفوفة عملياتها الخاصة بالتكامل لإزالة تعقيد العبارات في حل مختلف مسائل التحكم بواسطة دوال والش.منذ ذلك الوقت,أصبحت دوال القطع النبضية تطبق على نطاق واسع ويعود ذلك لبساطتها وسهولة عملياتها.

تعريف 1.2.1.
دوال القطع النبضية (blok pluse functions) المعرفة على المجال $[0,T)$ هي دوال من الشكل

$$b_j(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[\frac{(j-1)T}{m},\frac{jT}{m}\right)\\ 0 & x\notin\left[\frac{(j-1)T}{m},\frac{jT}{m}\right)\end{cases}\qquad (11.1)$$

حيث $j=1,2,\dots m$ و m عدد صحيح موجب
فيما يلي نأخد $T=1$

خواص 1.2.1.
دوال القطع النبضية تحقق الخواص التالية:

.1

$$b_j(x)b_i(x)=\begin{cases}b_j(x) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad (12.1)$$

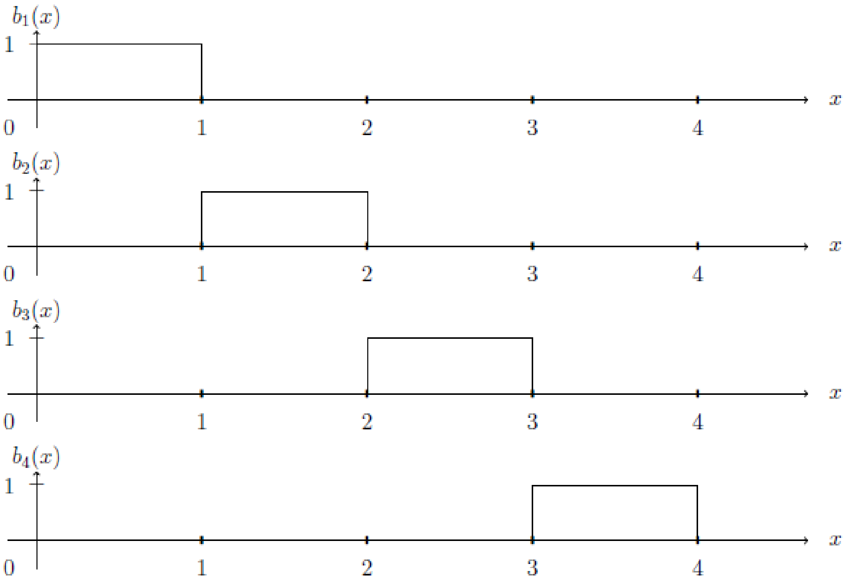
حيث $i,j=1,2,\cdots,m$

.2

$$\int_0^1 b_i(x)b_j(x)dx=h\delta_{ij}\qquad (13.1)$$

حيث $h=\frac{1}{m}$ و δ_{ij} هي دلتا كرونكر

.3 تامة, أي من أجل كل $f\in L^2([0,1))$ إذا كان $\int_0^1 b_i(x)f(x)dx=0$ فإنه يستلزم $f=0$ حيثما كان.



شكل 1.1: دوال القطع النبضية, $(m = 4)$

2.2.1 جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية

تعريف 2.2.1.
كثيرات حدود جاكوبي (jacobi polynomals) من الدرجة n على المجال $[0, 1]$ هي كثيرات حدود من الشكل

$$J_n^{\alpha,\beta}(z) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+\alpha}{i} \binom{n+\beta}{n-i} (x-1)^i (x+1)^{n-i} \tag{14.1}$$

من أجل الإستخدام التطبيقي لمتعدد حدود جاكوبي على المجال $x \in [0, 1]$ وذلك بوضع المتغير التالي:

$$z = 2x - 1$$

يتم الحصول على كثيرات حدود جاكوبي للمتغير x كمايلي

$$p_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = A(\alpha,\beta,i)p_i^{(\alpha,\beta)}(x) + (2x-1)B(\alpha,\beta,i)p_i^{(\alpha,\beta)}(x) - D(\alpha,\beta,i)p_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{15.1}$$

$$p_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \tfrac{(\alpha+\beta+2)(2x-1)}{2} + \tfrac{\alpha-\beta}{2}, p_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \qquad i = 1, 2 \ldots$$

شروط التعامد وتحويل دالة مرجحة هي على التوالي

$$\int_0^1 p_n^{\alpha,\beta}(x) p_m^{\alpha,\beta}(x) w_s^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \vartheta_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm} \tag{16.1}$$

حيث δ_{nm} هي دالة كرونكر و التي تساوي 1 إذا كان $n=m$ وتساوي 0 إذا كان $n\neq m$ و

$$\vartheta_n^{\alpha,\beta}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

و $w_s^{(\alpha,\beta)}=(1-x)^\alpha x^\beta$ دالة الوزن
كما أن الشكل التحليلي لكثيرات حدود جاكوبي المتغيرة كمايلي

$$p_n^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n+\alpha}{i}\binom{n+\beta}{n-i}\binom{i}{j}(-1)^j(x)^{n-j} \tag{17.1}$$

وتورد بعض الخصائص الأخرى من متعددي الحدود لجاكوبي على النحو التالي:

$$p_n^{\alpha,\beta}(0)=(-1)^n\binom{n+\alpha}{n} \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}p_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+i+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}p_{n-i}^{\alpha+i,\beta+i} \tag{19.1}$$

$$p_n^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{i=0}^{n}p_i^{(n)}x^i \tag{20.1}$$

حيث

$$p_i^{(n)}=(-1)^{n-i}\binom{n+\alpha+\beta+i}{i}\binom{n+\alpha}{n-i}$$

$i=0,...,n$

لإستخلاص نتائج التقريب ,لتكن $\tau=(0,1)$ و $r\in N$, نقدم الفضاء المرجح

$$H^r_{w_s^{(\alpha,\beta)}}(\tau)=\left\{f\mid f\ \text{قابلة للقياس}\quad \| f\|_{r,w_s^{(\alpha,\beta)}}<\infty\right\}$$

حيث يحدد النظيم التالي:

$$\| f\|_{r,w_s^{(\alpha,\beta)}}=\left(\sum_{k=0}^{r}\|\partial^r f\|^2_{w_s^{(\alpha+r,\beta+r)}}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad ,|f|_{r,w_s^{(\alpha,\beta)}}\ \|\partial^r f\|_{w_s^{(\alpha+r,\beta+r)}}$$

يمكن التعبيرعن الدالة $f(x)$ على المجال $[0,1]$ من حيث متعدد جاكوبي كمايلي

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i p_i^{\alpha,\beta}(x) \tag{21.1}$$

حيث يتم إعطاء معاملات λ_i كمايلي

$$\lambda_i = \frac{1}{V_i^{\alpha,\beta}} \int_0^1 p_i^{\alpha,\beta}(x) f(x) w_s^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

في الممارسة العملية يتم النظرفقط في $(m+1)$ حد الأولى من كثيرات حدود جاكوبي المتحولة لذلك يمكن كتابة التقريب على النحو التالي

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i p_i^{\alpha,\beta}(x) \Phi^T(x)\Lambda = \Lambda^T \Phi(x) \quad (22.1)$$

حيث يعطي الشعاعين Λ و $\Phi(x)$ كالتالي

$$\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}]^T$$

و

$$\Phi(x) = \left[p_0^{(\alpha,\beta)}(x), p_1^{(\alpha,\beta)}(x), \ldots, p_{m-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^T$$

خاصية 1.2.1.

لكل دالة وزن لجاكوبي $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ حيث $-\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{1}{2}$ ومن أجل كل دالة $f \in H^r_{w_s^{\alpha,\beta}}(\tau)$ تحقق

$$\| f - f_m \|_{L^2_{w_s^{(\alpha,\beta)}}}(\tau) \leq c_0 m^{-r} \| f \|_{H^{\alpha,\beta}_{w_s}(\tau)} \qquad m \geq 0$$

حيث c_0 ثابث موجب مستقل عن f و m

f_m أحسن تقريب للدالة f في أساس جاكوبي

تعريف 3.2.1.

كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القطع النبضية هي الدوال $h_{mn}(x)$ المعرفة على المجال $[0,1)$ من الشكل:

$$h_{mn}(x) = \begin{cases} p_{mn}^{\alpha,\beta} & x \in \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right) \\ 0 & x \notin \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right) \end{cases} \quad (23.1)$$

حيث $n = 0,1,\ldots,N-1$ و $m = 0,1,\ldots,M-1$ حيث n هي رتبة دوال القطع النبضية المعرفة على المجال $[0,T)$ هي دوال من الشكل

$$b_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m}\right) \\ 0 & x \notin \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m}\right) \end{cases} \quad (24.1)$$

حيث $j = 1,2,\ldots m$ و m عدد صحيح موجب

أما m فهي تمثل درجة كثير حدود جاكوبي

$$p_{mn}^{\alpha,\beta}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{m-j}c_{ijk}\binom{m+\alpha}{i}\binom{m+\beta}{m-i}\binom{i}{j}\binom{m-j}{k}x^k \tag{25.1}$$

حيث

$$c_{ijk}=(-1)^j(-n)^{m-j-k}N^k$$

توطئة 1.2.1.
يمكن الحصول على كثيرات حدود جاكوبي $p_{mn}^{\alpha,\beta}$ على الشكل

$$p_{mn}^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{m}p_{mn,\alpha\beta}^{k}x^k \tag{26.1}$$

حيث

$$p_{mn,\alpha\beta}^{k}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}d_{ij}^{k}\binom{m+\alpha}{i}\binom{m+\beta}{m-k-i}\binom{i}{j}$$
$$d_{ij}^{k}=N^k\binom{m+\alpha+\beta+k}{k}(-1)^j(-n)^{m-k}$$

برهان.
بإستخدام سلسلة تايلور يمكن الحصول على $p_{mn,\alpha\beta}^{k}$ كمايلي:

$$p_{mn,\alpha\beta}^{k}=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}p_{mn}^{\alpha,\beta}(x)|_{x=0};$$

بإستحدام الخاصيتن (1) و (2) أعلاه يمكن إثبات التوطئة □

توطئة 2.2.1.
مشتق كثير حدود جاكوبي من الرتبة i يمكن الحصول عليه على النحو التالي:

$$\frac{\partial^i}{\partial x_i}p_{mn}^{\alpha,\beta}(x)=N^i\frac{\Gamma(m+\alpha+\beta+i+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+1)}p_{m-i}^{\alpha+i,\beta+i} \tag{27.1}$$

برهان.
بإستخدام الخاصية (2) المذكورة أعلاه يمكن إثبات التوطئة □

توطئة 3،2،1.
دوال المزج $h_{mn}^{\alpha,\beta}$ متعامدة

برهان.
من (23.1) فمن الواضح أن من أجل $n \neq r$ فإن $h_{mn}^{\alpha,\beta}(x)$ و $h_{qr}^{\alpha,\beta}(x)$ هي تفكك
من أجل $n = r$

$$\int_0^1 h_{qr}^{\alpha,\beta}(x) h_{mn}^{\alpha,\beta}(x) w_s^n(x) dx = \xi_m \delta(nq)$$

حيث

$$w_s^n(x) = (\frac{n+1}{N} - x)^{\alpha}(x - \frac{n}{N})^{\beta}$$

و

$$\xi_m = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)m!\Gamma(m+\alpha+\beta+1)N^{\alpha}-\beta+1}$$

□

3،2،1 تقريب تابع

التابع $f(x) \in H_{w_s}^r(\tau)$, يمكن توسيعه بإستعمال دالة مهجنة على النحو التالي

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} h_{mn}^{\alpha,\beta}(x) \tag{28،1}$$

من أجل الإستخدام التطبيقي ,نعتبر السلسلة أعلاه منتهية الحدود,إذا لدينا:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} h_{mn}^{\alpha,\beta}(x) = F^T H(x) \tag{29،1}$$

حيث

$$F = [f_{0,0}, f_{0,1}, \dots, f_{0,N-1}, \dots, f_{0,M-1}, \dots, f_{N-1,M-1}]^T \tag{30،1}$$

بإستخدام خاصية التعامد لدوال المزج,كل عنصر من F يكون كالتالي:

$$f_{mn} = \frac{1}{\xi_m}\int_0^1 f(x) h_{mn}(x) w_s^n(x) dx \tag{31،1}$$

و

(32.1)

$$H(x) = [h_{0,0}(x), h_{0,1}(x), \ldots, h_{0,N-1}(x), h_{1,0}(x), \ldots, h_{1,N-1}(x), \ldots, h_{M-1,0}(x), \ldots, h_{M-1,N-1}(x)]^T$$

من أجل التبسيط نستطيع كتابة(32.1) كالتالي:

(33.1)

$$H(x) = \left[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_N(x), h_{N+1}(x), \ldots, h_{2N}(x), \ldots, h_{(M-1)(N-1)}(x), \ldots, h_{MN}(x)\right]^T$$

بحيث $h_i(x) = h_{mN}(x)$ والمؤشر i يحدد بواسطةالعلاقة التالية $i = mN + n + 1$ خواص التعامد لحدوديات جاكوبي: لنفرض أن $\varphi_n = (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}$ كذلك

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$$

عندها

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} y_n(x)$$

وبالنسبة إلى تعامد حدوديات جاكوبي نورد المبرهنة التالية: حدوديات جاكوبي متعامدة على الفترة $[-1,1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ أي أنها تحقق علاقات التعامد التالية:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y_m(x) y_n(x) dx = \lambda_n^2 \delta_{mn}; \quad (0 \le m \le n)$$

لدينا

$$I = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y_m(x) y_n(x) dx = \int_{-1}^{1} y_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$$

وبالمكاملة بالتجزئة حيث نفرض بداية أن $dv = \varphi_n^{(n)}(x)$ $x = y_m(x),$ نجد

$$I = -\int_{-1}^{1} y_m' \varphi_n^{(n-1)}(x) dx$$

وعند المكاملة بالتجزئة m مرة متتالية فنجد أن:

$$I = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} y_m^{(m)} \varphi_n^{(n-m)}(x) dx$$

ومن أجل $m < n$ فإن بالمكاملة بالتجزئة مرة أخيرة نجد أن

$$I = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} y_m^{(m+1)} \varphi_n^{(n-m-1)}(x) dx = 0$$

الفصل الثاني

مصفوفات العمليات الكسرية وفق أساس جاكوبي المهجن

1.2 مصفوفة تكامل الجداء الثنائي

$$E=\int_0^1 H(x)H^T(x)dx=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} \frac{2}{2}I & \mathbf{0} & \frac{2}{4}I & \mathbf{0} & \cdots & \frac{2}{M}I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{4}{3}I & \mathbf{0} & \frac{4}{5}I & \mathbf{0} & \cdots & \frac{4}{M+1}I \\ \frac{2}{4}I & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \frac{4}{5}I & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{2M-4}{M+1}I \\ \frac{2}{M}I & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{4}{M+1} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{2M-4}{M+1}I & \mathbf{0} & \frac{2M}{M+1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

حيث $\mathbf{0}$ هو عبارة عن مصفوفة صفرية,و I مصفوفة الوحدة من الصنف $N\times N$ تعطى ب

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2 مصفوفة العمليات الكسرية للجداء

الأن يتم تقديم الصيغة العامة للحصول على مصفوفة العمليات الكسرية لناتج الجداء $\widetilde{B}$ من الرتبة $MN\times MN$ كمايلي:

$$H(x)H^T(x)B\simeq \widetilde{B}H(x) \tag{3.2}$$

يتم حساب عناصر المصفوفة $\widetilde{B}$ في المعادلة (3.2) على النحو التالي:

$$\widetilde{B}_{ij}=\frac{1}{\xi_m}\sum_{k=0}^{MN} g_{ijk}b_k,$$

حيث

$$g_{ijk}=\int_0^1 h_i(x)h_k(x)h_j(x)w_s^n(x)dx,$$

و $j=mN+n+1 \qquad h_j(x)=h_{m,n}(x)$

$n=0,\dots,N-1 \qquad m=0,\dots,M-1$

b_i هي مركبات الشعاع B في المعادلة(3.2)

3.2 مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل

في هذا الجزء يتم تعيين مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل لريمان -لوفيل وفق أساس جاكوبي المهجن بدوال القطع النبضية والتي نجدها بإستخدام الصيغة العامة التالية:

$$J^V H(x) = \frac{1}{\Gamma(V)} \int_0^x (x-t)^{V-1} H(t)dt \simeq I^V H(x) \tag{4.2}$$

نظرية 3.1.2.
لتكن I^V مصفوفة العمليات الكسرية للتكامل من الرتبة $V > 0$ من الشكل:

$$I^V = \left[(E_{mz})_{m,z=0}^{M-1} \right]_{MN \times MN}$$

حيث $E_{m,z}$ مصفوفة توبليتز

$$\zeta_i = \frac{1}{\xi_z} \sum_{l=0}^{m} P^l_{mn,\alpha\beta} \sum_{k=0}^{l} t_{kl} \sum_{r=0}^{z} P^r_{zq,\alpha\beta} a_i^{lkr} \quad ,$$

حيث $t_{kl} = \frac{l!}{(l-k)!\Gamma(k+V+1)}$
و

$$a_1^{lkr} = \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} \left(\frac{1}{N}\right)^{l-k} \left(x - \frac{1}{N}\right)^{k+V} x^r w_s^1(x)dx \quad ,$$

$$a_i^{lkr} = \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{l-k} \left(x - \frac{1}{N}\right)^{k+V} \left(\frac{2}{N}\right)^{l-k} \left(x - \frac{2}{N}\right) \right) x^r w_s^i(x)dx$$

$i = 2, \dots N$

برهان.
لدينا

$$h_{mn}(x) = \left(\sum_{l=0}^{m} P^l_{mn,\alpha\beta} x^p \right) \chi \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N} \right] \tag{5.2}$$

والتكامل الكسري ل $h_{mn}(x)$ نستطيع كتابته من الشكل

$$J^v h_{mn}(x) = \frac{1}{\Gamma(V)}(x^{V-1}) * (h_{mn}(x)) \quad , \tag{6.2}$$

حيث $*$ تدل على الجداء

بإستخدام تحويل لبلاص للمعادلةأعلاه نحصل

$$L(J^v h_{mn}(x)) = \frac{1}{\Gamma(V)} L(x^{V-1}) L\left(h_{mn}(x)\right) \tag{7.2}$$

حيث:

$$L(x^{V-1}) = \frac{\Gamma(V)}{s^v} \quad , \tag{8.2}$$

و

$$L\left(h_{mn}(x)\right) = \left(\sum_{l=0}^{m} P^l_{mn,\alpha\beta} x^p \chi\left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right]\right)$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{m} P^l_{mn,\alpha\beta} x^p \left[u\left(x - \frac{n}{N}\right) - u\left(x - \frac{n+1}{N}\right)\right]\right) \tag{9.2}$$

حيث $u(x)$ هي دالة خطوة الوحدة مع إستخدام خصائص لبلاص التالية للدالة f والعددية a

$L\left(x^n f(x)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

$L\left(u(x-a)\right) = \frac{e^{-as}}{s}$

أيضا بإستخدام الصيغة $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{e^{-ax}}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a^{n-k} \frac{n!}{(n-k!)} \frac{1}{x^{k+1}} e^{-ax}$ يمكننا بسهولة الحصول على العلاقات التالية:

$$L\left(x^l u\left(x - \frac{n}{N}\right)\right) = \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{n}{N}\right)^{l-k} \frac{l!}{(l-k)!} \frac{1}{s^{k+1}} e^{-\frac{n}{N}s} \quad ,$$

$$L\left(x^l u\left(x - \frac{n+1}{N}\right)\right) = \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{n+1}{N}\right)^{l-k} \frac{l!}{(l-k)!} \frac{1}{s^{k+1}} e^{-\frac{n+1}{N}s}$$

بإستخدام المعادلات أعلاه وبإستبدال (8.2) و(9.2) في (7.2) هذا يكافئ

$$L\left(J^V h_{mn}(x)\right) = \left(\sum_{l=0}^{m} P^l_{mn,\alpha\beta} \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)! s^{k+V+1}} \left[\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k} e^{-\frac{n}{N}s} - \left(\frac{n+1}{N}\right)^{l-k} e^{-\frac{n+1}{N}s}\right]\right. \tag{10.2}$$

الأن بإستخدام تحويل لبلاص العكسي نحصل على

$$J^{V}h_{mn}(x)=\sum_{l=0}^{m}P_{mn,\alpha\beta}^{l}\sum_{k=0}^{l}t_{kl}\left[X(x)-Y(x)\right] \tag{11.2}$$

بحيث

$$t_{kl}=\frac{l!}{(l-k)!\Gamma(k+V+1)}$$

و

$$X(x)=\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n}{N}\right),$$

$$Y(x)=\left(\frac{n+1}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n+1}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n+1}{N}\right) \tag{12.2}$$

هذفنا هو الحصول على عناصر مصفوفة العمليات للتكامل I^V ,لذلك

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{\xi_z}\int_{0}^{1}J^{V}h_{mn}(x)h_{zq}(x)w_{s}^{q}(x)ds$$

$$=\frac{1}{\xi_z}\int_{0}^{1}J^{V}h_{mn}(x)\left(\sum_{r=0}^{z}p_{zq,\alpha\beta}^{r}x^{r}\right)\left(u\left(x-\frac{q}{N}\right)-u\left(x-\frac{q+1}{N}\right)\right)w_{s}^{q}(x)dx \tag{13.2}$$

بحيث $i=mN+n+1$ و $j=zN+q+1$

عن طريق إستبدال (11.2)في (13.2),لدينا

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{\xi_z}\sum_{l=0}^{m}p_{mn\alpha\beta}^{l}\sum_{k=0}^{l}t_{kl}\sum_{r=0}^{k}p_{zq\alpha\beta} \tag{14.2}$$

حيث

$$f_{nq}^{lkr}=\int_{0}^{1}x^{r}\left(X(x)-Y(x)\right)\left(u\left(x-\frac{q}{N}\right)-u\left(x-\frac{q+1}{N}\right)\right)dx \quad ,$$

$$f_{nq}^{lkr}=\int_{0}^{1}x^{r}\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n}{N}\right)u\left(x-\frac{q}{N}\right)w_{s}^{q}(x)dx$$

وبالتالي فإن الصيغة العامة ل f_{nq}^{lkr} هي:

$$-\int_0^1 x^r\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n}{N}\right)u\left(x-\frac{q+1}{N}\right)w_s^q(x)dx$$

$$-\int_0^1 x^r\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n+1}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n+1}{N}\right)u\left(x-\frac{q}{N}\right)w_s^q(x)dx$$

$$-\int_0^1 x^r\left(\frac{n+1}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n+1}{N}\right)^{k+V}u\left(x-\frac{n+1}{N}\right)u\left(x-\frac{q+1}{N}\right)w_s^q(x)dx$$

من خلال النضر في حالات مختلفة من n و q وبإستخدام صيغة مضاعفة الدالتين خطوة الوحدة ,يمكن تبسيط المعادلة المذكورة أعلاه على النحو التالي

من أجل $n=q$

$$f_{nq}^{lkr}=\int_{\frac{n}{N}}^{\frac{n+1}{N}} x^r\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{k+V}w_s^q(x)dx \quad ,$$

إذا كان $n>q$

$$f_{nq}^{lkr}=0 \quad ;$$

وكذلك لأجل $n<q$

$$f_{nq}^{lkr}=\int_{\frac{q}{N}}^{\frac{q+1}{N}} x^r\left[\left(\frac{n}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n}{N}\right)^{k+V}-\left(\frac{n+1}{N}\right)^{l-k}\left(x-\frac{n+1}{N}\right)^{k+V}\right]\times w_s^q(x)dx$$

وبالتالي فإن مصفوفة العمليات I^V تكون كالتالي

$$I^V=\left[(E_{mz})_{m,z=0}^{M-1}\right]_{MN\times MN} \tag{15.2}$$

$$E_{mz}=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_0 & \cdots & & \zeta_N\\ & \zeta_1 & \zeta_2 & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \zeta_2\\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \zeta_1\end{bmatrix} \tag{16.2}$$

حيث

$$\zeta_1=\frac{1}{\xi_z}\sum_{l=0}^{m}P^{l}_{mn,\alpha\beta}\sum_{k=0}^{l}t_{kl}\sum_{r=0}^{z}P^{r}_{zq,\alpha\beta}f^{klr}_{11}$$

$$\zeta_i=\frac{1}{\xi_z}\sum_{l=0}^{m}P^{l}_{mn,\alpha\beta}\sum_{k=0}^{l}t_{kl}\sum_{r=0}^{z}P^{r}_{zq,\alpha\beta}f^{klr}_{1i},\qquad i=2,\dots,N$$

□

مثال 1.3.2.

نختار $N=3$, $M=3$ و $V=\frac{1}{3}$

ثم نحسب مصفوفة العمليات على النحو التالي

$$I^{V}=\begin{bmatrix}
0.5990 & 0.2876 & 0.1663 & 0.1152 & -0.0654 & -0.0146 & -0.0269 & 0.0239 & 0.0017\\
0 & 0.5990 & 0.2876 & 0 & 0.1152 & -0.0654 & 0 & -0.0269 & 0.00239\\
0 & 0 & 0.5990 & 0 & 0 & 0.1152 & 0 & 0 & -0.0269\\
-0.2304 & 0.0808 & 0.0192 & 0.3744 & -0.0475 & -0.0042 & 0.1132 & 0.0269 & -0.0008\\
0 & -0.2304 & 0.0808 & 0 & 0.3744 & -0.0475 & 0 & 0.1132 & 0.0269\\
0 & 0 & -0.2304 & 0 & 0 & 0.3744 & 0 & 0 & 0.1132\\
0.1123 & 0.1676 & 0.00853 & -0.1319 & -0.0554 & -0.0080 & 0.3042 & 0.0293 & 0.001\\
0 & 0.1123 & 0.1676 & 0 & -0.1319 & -0.0554 & 0 & 0.3042 & 0.0293\\
0 & 0 & 0.1123 & 0 & 0 & -0.1319 & 0 & 0 & 0.3042
\end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية

1.3 مقدمة في المعادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الغير خطية

إن للمعادلات التفاضلية التكاملية دور بارز في تفسير عدة ظواهر منها ظواهر فيزيائية ,كيميائية, بيولوجية ,هندسية أو غيرها من الظواهر. وقد كان أول ضهورها في سنة 1900 عن طريق فولتيرا,ومن بين هذه المعادلات معادلات تفاضلية تكاملية من رتب كسرية غير خطية.

كما هناك العديد من الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية سواء كانت تحليلية أو عددية فمثلا بالنسبة للطرق التحليلية لدينا طريقة الحساب المباشر ,طريقة التكرار التغييري, طريقة أدوميان التحليلية المعدلة, اما بالنسبة للطرق العددية لدينا طريقة بي سبلاين ,ووظائف قياس الموجات ,طريقة الهوموتوبي الإضطرابية ,كثيرات حدود لوجندر ,طريقة تايلور التجميعية.

وسنتطرق في هذه المذكرة لحل نوع من المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية من الشكل التالي:

$$D_*^V f(x) - \int_0^1 K(x,t)F(f(t))dt = g(x)$$

والتي تحقق الشروط الإبتدائية:

$$f^{(i)}(0) = a_i$$

بطريقة عددية أخرى وذلك بإستخدام كثيرات حدود جاكوبي المهجنة بدوال القكع النبضية.

2.3 طريقة الحل

في هذا الجزء, نستخدم مصفوفة العمليات التي تم الحصول عليها في الفصل الثاني لحل المعادلات التفاضلية-التكاملية من رتب كسرية غير خطية من الشكل:

$$D_*^V f(x) - \int_0^1 K(x,t)F(f(t))dt = g(x) \tag{1.3}$$

$$f^{(i)}(0) = a_i \qquad i = 0, \ldots, m' - 1;$$

حيث $f(x), g(x) \in H^r_{w_s}$

و $r \in N$ $\qquad K(x,t) \in H^r_{w_s}((0,1)\times(0,1)),$

$f(x)$ دالة معلومة

D_*^V المشتق الكسري لكابوتو من الدرجة $m' - 1 < V \leqslant m'$ وأيضا F كثير حدود للدالة f

نعتبر $F(f(t)) = f(x)^q$ من أجل حل المعادلة(1.3) نقرب الدوال في هذه المعادلة عن طريق التوابع المهجنة

الدالتين المتغيرتين هما $K(x,t)$ و $g(x)$ يمكن تقريبهما على النحو التالي:

$$K(x,t) \simeq H(x)^T K H(x)$$
$$g(x) \simeq H(x)^T G \quad ,$$

حيث K مصفوفة و G عبارة عن شعاع يتم تحديد عناصرها كما يلي :

$$K_{ij} = \frac{1}{\xi_m \xi_p} \int_0^1 \int_0^1 K(x,t) h_{mn}(x) h_{pq}(t) w_s^n(x) w_s^q(t) dx dt$$

$$g_i = \frac{1}{\xi_m} \int_0^1 g(x) h_{mn}(x) w_s^n(x) dx \quad ,$$

حيث $i = mN + n + 1 \quad , \quad j = pN + q + 1$

و $m, p = 0, \ldots, M-1$ و $n, q = 0, \ldots, N-1$

الان لدينا:

$$D_*^V f(x) \simeq C^T H(x)$$

حيث C شعاع غير معلوم,

لتقريب $f(t)$ نستخدم (10.1)و(6.2)

$$f(x) \simeq C^T I^V H(x) + \sum_{k=0}^{m'-1} f^k(0) \frac{x^k}{k!}; \qquad (2.3)$$

نستطيع كتابة التقريب بالشكل التالي:

$$f(x) \simeq D^T H(x)$$

حيث

$D = C + C'$ و C' شعاع الدالة $\sum_{k=0}^{m'-1} f^k(0) \frac{x^k}{k!}$ في أساس التوابع المهجنة

من أجل التقريب $F(f(x)) = f(t)^q$ وفق أساس جاكوبي المهجن,نستخدم الطريقة التالية:

$$(f)^2 = D^T H(t) H^T(t) D = D^T \widetilde{D} H(t) = D_2^T H(t),$$

حيث $\widetilde{D}$ مصفوفة العمليات للجداء للشعاع D

$$\begin{aligned}(f(t))^3 &= D^T H(t) H^T(t) D_2 = D^T \widetilde{D}_2 H(t) = D_3^T H(t),\\ &\vdots\\ (f(t))^q &= D^T \widetilde{D}_{q-1} H(t) = D_q^T (H(t))\end{aligned}$$

حيث $\widetilde{D}_{q-1}$ مصفوفة العمليات للجداء للشعاع D_{q-1}
بإفتراض $(f(t))^{q-1} = D_{q-1}^T H(x)$ في الخطوة الأخيرة تكون جميع الدوال تقريبية بالتعويض في(1.3)

$$C^T H(x) - \int_0^1 (H^T(X) K H(t))(H^T(t) D_q) dt = G^T H(x)$$

أي تكافئ المعادلة التالية:

$$H^T(x) C - H^T K E D_q = H^T(x) G,$$

حيث $E = \int_0^1 H(t) H^T(t) dt$ التي تم الحصول عليها في (1.2)
لدينا جمل المعادلات غير خطية التالية

$$C - K E D_q = G,$$

لاحظ أن D_q يتكون من عناصر C لذلك من خلال حل الجملة أعلاه مع طريقة عددية مثل طريقة نيوتن نحصل على الشعاع C

3.3 تحليل الخطأ

في هذا الجزء ,نقوم بدراسة شاملة لتحليل الأخطاء المقترحة من خلال الخاصية التالية:

خاصية 1.3.3.
لتكن $f(x) \in H_{w_s}^r(\tau)$, $r \in N$, $I_n = \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right]$ و f_{MN} هو تقريب للدالة f بإستخدام دوال المزج سيتم الحصول على الخطأ على النحو التالي:

$$\| f(x) - f_{MN}(x) \|_{L^2_{w_s(\tau)}} \leq c_0 M^{-r} \| f \|_{H_{w_s}(0,1)^r} \quad ,$$

حيث c_0 ثابث موجب مستقل على f و M

برهان.
بإستخدام الخاصية(1.1.1)

$$\| f - f_{MN} \|^2_{L^2_{w_s(\tau)}} = \int_0^1 [f(x) - f_{MN}(x)]^2 w_s(x) dx$$

$$= \sum_{n} \int_{I_n} [f(x) - f_{MN}(x)]^2 \, w_s^n(x) dx$$
$$= \sum_{n} \left(c_0 M^{-r} \parallel f \parallel_{H_{w_s^n}} \right)^2 \leq \left(c_0 M^{-r} \parallel f \parallel_{H^r_{w_s^n}(0,1)} \right)^2$$

بإستخدام الجذر التربيعي نحصل على المطلوب □

4.3 تطبيقات عددية

في هذا الجزء نطبق الطريقة المقترحة لحل المعادلات التفاضلية التكاملية لفريد هولم غير خطية من النوع (4.1)

مثال 1.4.3. [24]
نعتبر المعادلة التفاضلية التكاملية لفريد هولم غير خطية التالية

$$D_*^V f(x) - \int_0^1 xtf(t)^2 dt = 1 - \frac{x}{4} \quad , \quad 0 \leq x < 1$$

من أجل $V = 1,$ الحل العددي من أجل $M = 3$ و $N = 1$ يساوي الحل الدقيق $f(x) = x$. الشكل 1.3 يبين النتائج العددية من أجل $V = 0, 8.0, 9.0, 95.1$ المقارنات تبين أن مع إقتراب V إلى 1 و الحلول التقريبية تتقارب إلى الحل التحليلي $f(x) = x$.

من أجل $V = 2$ الحل الدقيق $f(x) = 0,5x^2 - 0,035x^3$ الشكل 2.3 يمثل الحلول التقريبية لمختلف $1,5 < V \leq 2$

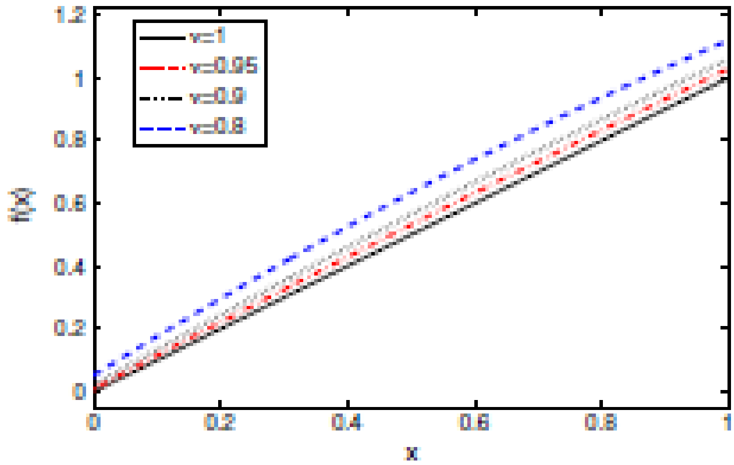
مثال 2.4.3. [23]
نعتبر المعادلة التفاضلية التكاملية التالية

$$D_*^{\frac{1}{2}} f(x) - \int_0^1 xt \left(f(t)\right)^4 dt = g(x) \quad , \quad 0 \leq x < 1$$

$f(0) = 0$ و $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{8}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} \right) - \frac{x}{1260}$ الشكل 3.3 و 4.3 يبين أن الحلول العددية في تناسق مع الحل الدقيق $f(x) = x^2 - x$ من أجل القيم الصغرى M و N, الشكل 5.3 يصور الأخطاء المطلقة ل f على المجال $[0,1]$ يمكن ملاحضةأن الطريقة المقترحة تقدم حلا عدديا دقيقا عن طريق زيادة M و N على الوجه المخصوص $M = 5$ و $N = 2$

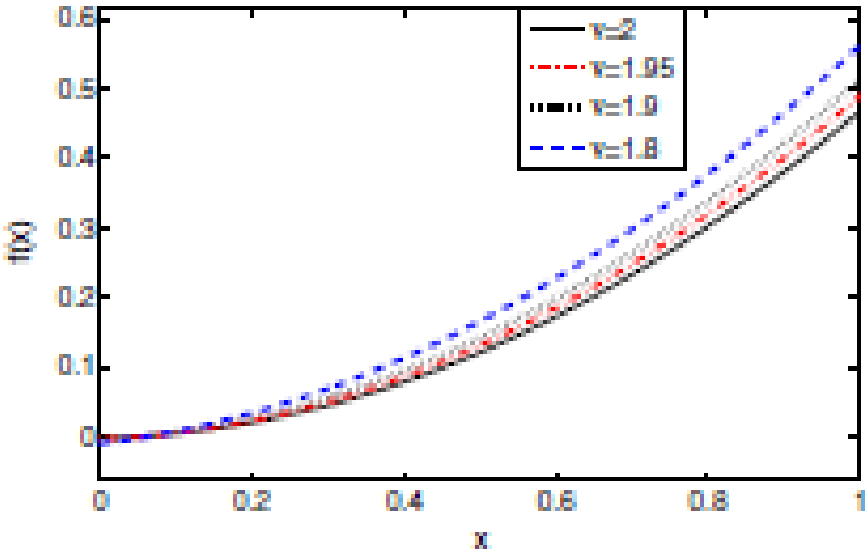
مثال 3.4.3. [24]

$$D_*^{\frac{5}{3}} f(x) - \int_0^1 (x+t)^2 \left(f(t)\right)^3 dt = g(x) \quad , \quad 0 \leq x < 1$$

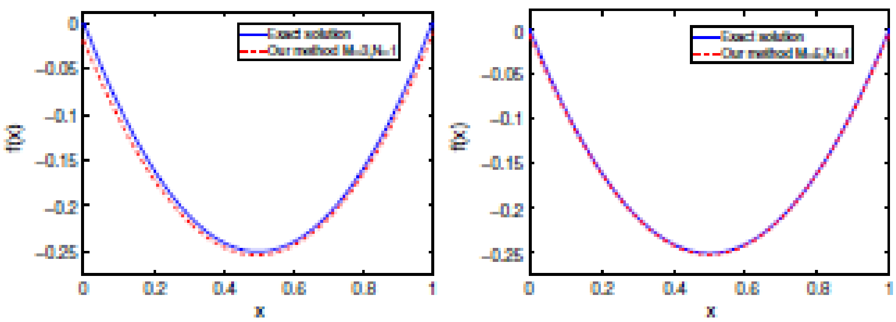


شكل 1.3: الحل التقريبي للمثال 1.4.3من أجل $M=3, N=1$ و $0.5 < V \leqslant 1$، $(\alpha=\beta=1)$

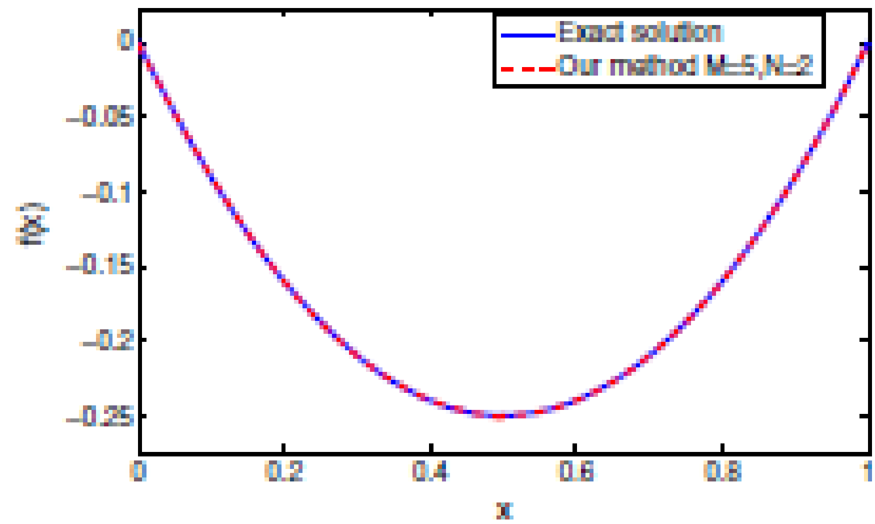
حيث $g(x)=\frac{6}{\Gamma(\frac{1}{3})}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{7}-\frac{x}{4}-\frac{1}{9}$،
$f(0)=f'(0)=0$. الشكل 6.3 و 7.3 يبين النتائج العددية لمختلف α و β مع الحل الدقيق $f(x)=x^2$ يمكن ملاحضة أن النتائج الحالية هي في تناسق جيد مع الحل التحليلي. أيضا,في هذا المثال بإستخدام $\alpha=\beta=1$ أفضل دقة من $\alpha=\beta=0$ وهي الحالة الخاصة من كثير حدود لجندر.



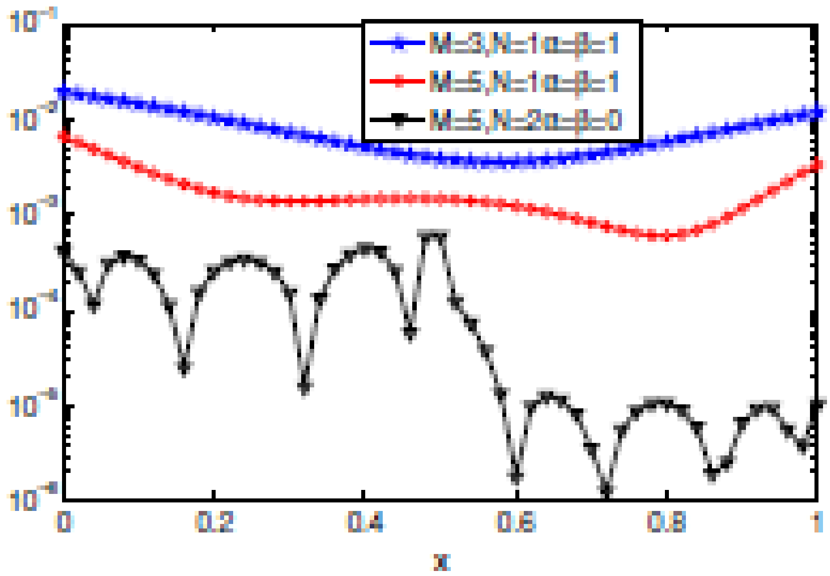
شكل 2.3: النتائج العددية للمثال1.4.3 من أجل $M=5, N=1$ و $1.5 < V \leqslant 2$, $(\alpha=\beta=1)$



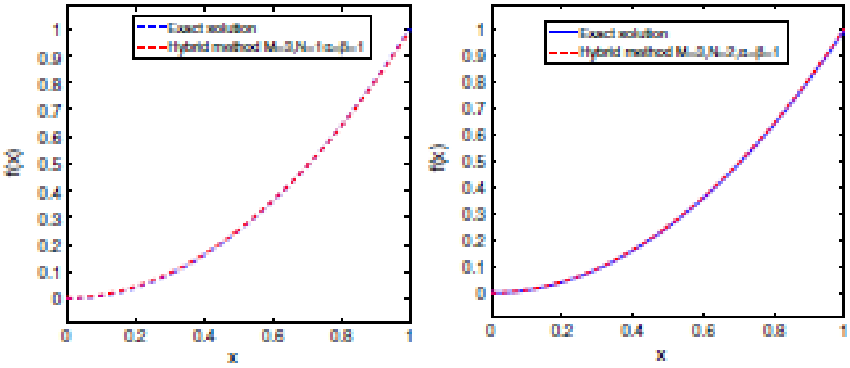
شكل 3.3: الخطأ المطلق ل f على المجال $[0,1]$ في المثال2.4.3



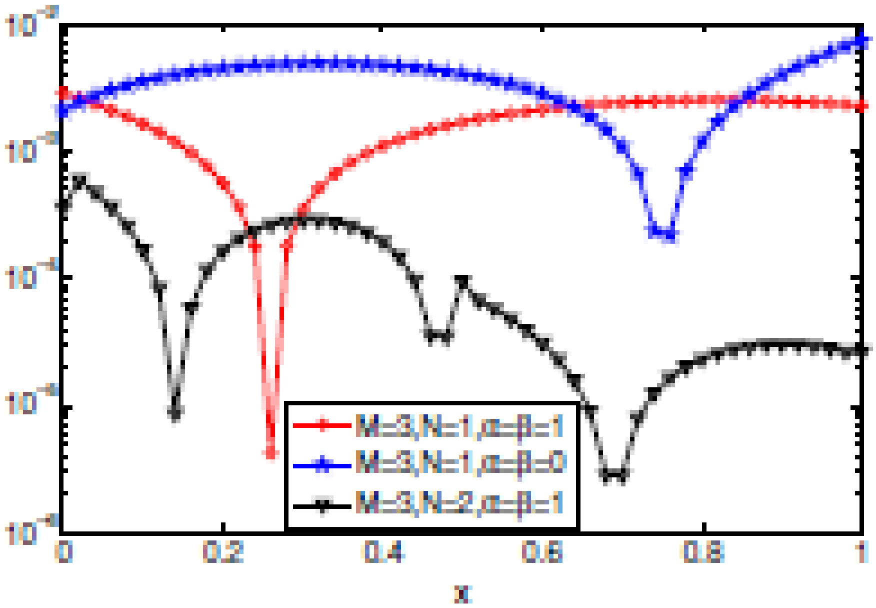
شكل 4.3: المقارنة بين الحل التقريبي والدقيق للمثال2.4.3 $(\alpha = \beta = 1)$



شكل 5.3: النتائج العددية للمثال2.4.3 من أجل $M = 5, N = 2$ و $(\alpha = \beta = 0)$



شكل 6.3: النتائج العددية للمثال 3.4.3



شكل 7.3: الخطأ المطلق ل f على المجال $[0,1]$ في المثال3.4.3

خاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة, في عرض طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية التكاملية من رتب كسرية غير خطية ,وذلك بتحويل هذه المعادلات إلى جمل معادلات جبرية غير خطية .بإستخدام كثيرات حدود جاكوبي المهجن بدوال القطع النبضية,وإستخدمت الأمثلة التوضيحية مع النتائج المرضية لإثبات تطبيق هذه الطريقة ومن مزاياها ,الحصول على الحل التحليلي إذا كان الحل الحقيقي عبارة عن دالة كثير حدود,وإستخدمت الأمثلة التوضيحية لإثبات تطبيق هذه الطريقة.

المراجع العلمية

[1] Bagley RL, Torvik PJ (1986) On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. J Rheol 30(1):133–155. doi:10.1122/1. 549887

[2] Calderon AJ, Vinagre BM, Feliu V (2006) Fractional order control strategies for power electronic buck converters. Signal Process 86(10):2803–2819. doi:10.1016/j.sigpro.2006.02.022

[3] Grigorenko I, Grigorenko E (2003) Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. Phys Rev Lett. doi:10.1103/PhysRev Lett.91.034101

[4] Kumar S, Kumar D, Singh J (2016) Fractional modelling arising in unidirectional propagation of long waves in dispersive media. Adv Nonlinear Anal 5(4):383–394. doi:10.1515/anona-2013- 0033

[5] Al Jarbouh A (2012) Rheological behaviour modelling of viscoelastic materials by using fractional model. Energy Procedia 19:143–157. doi:10.1016/j.egypro.2012.05.194

[6] Mainardi F (2012) Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. arXiv preprint arXiv: 1201.0863. In: Carpinteri A, Mainardi F (eds) (1997) Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Springer Verlag, Wien and New York, pp 291–348

[7] Tavazoei MS, Haeri M (2008) Chaos control via a simple fractional- order controller. Phys Lett A 372(6):798–807. doi:10.1016/ j.physleta.2007.08.040

[8] Aghajani A, Jalilian Y, Trujillo J (2012) On the existence of solutions of fractional integro-differential equations. Fract Calc Appl Anal 15(1):44–69. doi:10.2478/s13540-012-0005-4

[9] Deng J, Ma L (2010) Existence and uniqueness of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations. Appl Math Lett 23(6):676–680. doi:10.1016/j.aml.2010.02. 007

[10] Kumar S, Kumar A, Baleanu D (2016) Two analytical methods for time-fractional nonlinear coupled Boussinesq–Burgers equations arise in propagation of shallow water waves. Nonlinear Dyn 85(2):699–715. doi:10.1007/s11071-016-2716-2

[11] Inc M (2008) The approximate and exact solutions of the spaceand time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method. J Math Anal Appl 345(1):476–484. doi:10.1016/j.jmaa.2008.04.007

[12] Ray SS (2009) Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step Adomian decomposition method. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 14(4):1295–1306. doi:10. 1016/j.cnsns.2008.01.010

[13] Heydari MH, Hooshmandasl MR, Mohammadi F, Cattani C (2014) Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integro-differential equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 19(1):37–48. doi:10.1016/j.cnsns. 2013.04.026

[14] Hosseini VR, Shivanian E, Chen W (2016) Local radial point interpolation (MLRPI) method for solving time fractional diffusion- wave equation with damping. J Comput Phys 312:307–332. doi:10.1016/j.jcp.2016.02.030

[15] Hosseini VR, Shivanian E, Chen W (2015) Local integration of 2-D fractional telegraph equation via local radial point interpolant approximation. EPJ Plus 130(2):1–21. doi:10.1140/epjp/i2015- 15033-5

[16] Hosseini VR, Chen W, Avazzadeh Z (2014) Numerical solution of fractional telegraph equation by using radial basis functions. Eng Anal Bound Elem 38:31–39. doi:10.1016/j.enganabound. 2013.10.009

[17] Kazem S (2013) An integral operational matrix based on Jacobi polynomials for solving fractional-order differential equations. Appl Math Model 37(3):1126–1136. doi:10.1016/j.apm.2012.03. 033

[18] Lia C, Kumarb A, Kumarb S, Yangc XJ (2016) On the approximate solution of nonlinear time-fractional KdV equation via modified homotopy analysis Laplace transform method. J Nonlinear Sci Appl 9:5463–5470

[19] Yin XB, Kumar S, Kumar D (2015) A modified homotopy analysis method for solution of fractional wave equations. Adv Mech Eng 7(12):1–8. doi:10.1177/1687814015620330

[20] Atabakzadeh MH, Akrami MH, Erjaee GH (2013) Chebyshev operational matrix method for solving multi-order fractional ordinary differential equations. Appl Math Model 37(20):8903–8911. doi:10.1016/j.apm.2013.04.019

[21] Kilicman A, Al Zhour ZAA (2007) Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications. Appl Math Comput 187(1):250–265. doi:10.1016/j.amc.2006.08.122

[22] Keshavarz E, Ordokhani Y, Razzaghi M (2014) Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. Appl Math Model 38(24):6038–6051. doi:10.1016/j.apm.2014.04.064

[23] Zhu L, Fan Q (2013) Numerical solution of nonlinear fractionalorder Volterra integro-differential equations by SCW. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 18(5):1203–1213. doi:10.1016/j. cnsns.2012.09.024

[24] Saeedi H, Moghadam MM, Mollahasani N, Chuev GN (2011) A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integrodifferential equations of fractional order. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 16(3):1154–1163. doi:10.1016/j.cnsns.2010.05.036

[25] Saadatmandi A, Dehghan M (2010) A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. Comput Math Appl 59(3):1326–1336. doi:10.1016/j.camwa.2009.07.006

[26] Yi M, Huang J (2014) Wavelet operational matrix method for solving fractional differential equations with variable coefficients. Appl Math Comput 230:383–394. doi:10.1016/j.amc. 2013.06.102

[27] Podlubny I (1999) Fractional differential equations. Academic Press, San Diego