N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماستر أكاديمي

الميدان :رياضيات و إعلام آلي

الشعبة :رياضيات

التخصص :تحليل دالي

من إعداد الطالبة : بن الزاوي نسيمة

تحت إشراف الأستاذ : عسيلة مصطفى

تحت عنوان

التشويش المنضبط على مؤثر الجداء في المتغير المستقــل

نوقشت يوم 25 جوان 2019 من طرف أعضاء اللجنة :

الأستاذ : مفلاح مبروك	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الأستاذ : السعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الأستاذ : عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية 2018-2019

شكر وعرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

"*وما توفيقي إلا بالله*"

الحمد لله الذي أخرجني من الظلمات إلى النور وسهل لي طريق العلم

الحمد لله الذي هداني وكل الإحسان أتاني و أن وفقني لإنجاز هذا العمل والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى صلى الله عليه وسلم ، الذي قال ....

"((....من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله به طريق إلى الجنة..))"

بعد إسدال الستار على العام الجامعي الخامس ، وبمناسبة إتمام مذكرتي في الماستر أتقدم بالشكر الجزيل إلى الأستاذ القدير :

"الدكتور مصطفى عسيلـــــــــــــــــــــــــــة"

على إقتراحه موضوع المذكرة ، وما بذله من جهد ومتابعة مدة الإشراف ، الذي لم تكتفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره عليَّ لإتمام هذا العمل

لا يفوتني توجيه الشكر والتقدير الى أساتذة اللجنة المناقشة : إلى الأستاذ " **مفلاح مبروك** " على قبوله ترؤس لجنةالمناقشة، و الأستاذ الدكتور "**السعيد محمد السعيد** " على قبوله مناقشة هذه المذكرة.

كما أوجه تحية عطرة ونيّرة إلى كل أساتذة قسم الرياضيات وخاصة منهم الدكتور:

"**إسماعيل مرابط** " على مساعدته لي في كثير من الأمور المتعلقة ببرنامج لاتاكس ، كما أوجه الشكر الكبير للطالبة " **ريحانـــــــــــــــــــــــــة** " على مساعدتها لي في الترجمة.

إهــداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبنوره تتنزل البركات

أهذي ثمرة جهدي إلى

رمز الحب الصافي ونبع الحنان والعطاء الوافي إلى التي أوصى بها خير الأنام

وجعلت الجنة إكراما لها تحت الأقدام

"أمي ....أمي لآخر يوم في عمري "

إلى من أهداني بسمة الأمل وعلمني المبادئ والكفاح و أن أسير إلى طريق النجاح لنيل المبتغى

"أبي العزيز رحمـــــــــــــــــــــــه الله "

إلى من قاسمني فرحة نجاحي كل سنة وفي كل لحظة طوال مشواري الدراسي زوج أختي

"جمال محلـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــي "

إلى أستاذي المحترم الذي كلما دّب اليأس في نفسي زرع في الأمل لأسير قدمًا نحو الأمام ، لنيل المبتغى

وكلما سألته عن معرفة زودني بها وكلما طلبت جزء من وقته الثمين وفره لي بالرغم من تعدد مسؤوليته

"الدكتور مصطفى عسيلـــــــــــــــــــة "

إلى حاملي مشعل العلم والأمل وساروا بهذا النهج من معلمي الأول إلى أستاذي اليوم.

إلى كل أساتـــــــــــذة وطلبة قسم الرياضيـــــــــات

بن الزاوي نسيمة

الفهرس

دليـــل الرّمـــوز

الرّمــز	مدلـوله	الرّمــز	مدلـوله
$\|x\|$	نضيم العنصر	$(X, \|\|)$	الفراغ الشعاعي النضيمي
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$، (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)	$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة	$\langle , \rangle$	تطبيق الجداء السلمي
$\Phi(\Phi_0)$	العناصر المنضبطة (منضبطة تامة)	H	فراغ هيلبار
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F
$\ker F$	نواة المؤثر F	$F : X \longrightarrow Y$	F مؤثر من X في Y
$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F	X^*	فراغ الأشكال الخطية على X
$L(X, Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	$L(X)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه
$l(X, Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	$l(X)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه
F^*	المؤثر القرين للمؤثر F	I	المؤثر الحيادي
$\delta(F, T)$	الإنفراج بين المؤثرين F و T	S	مؤثر الجداء في المتغير المستقل
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F	$(F_n)_{n \geqslant 1}$	متتالية المؤثرات
$F_n \xrightarrow{u} F$	F_n متقاربة بانتظام نحو المؤثر F	$F_n \xrightarrow{s} F$	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F
$F_n \xrightarrow{w} F$	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	V_λ	الفراغ الذاتي
$\widetilde{F}$	غلاقة المؤثر F	$\Im(X, Y)$	مجموعة المؤثرات المغلقة
M_λ	الفراغ الجذري	$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	$P_\sigma(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F

الرّمز	مدلوله	الرّمز	مدلوله
$C_\sigma(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	$R_\sigma(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F
$R_\lambda(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F	$f(F)$	دالة المؤثر F
$A(F)$	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	E_φ	الدالة الطيفية للمؤثر F
P_σ	المسقط الطيفي	$\{E_\varphi\}$	تحليل الوحدة لـ F
$l_2(X)$	صنف مؤثرات شميد من X في نفسه	$l_0(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المنتهية من X في Y
$l_\infty(X,Y)$	مجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y	$l_1(X)$	صنف المؤثرات النووية من X في نفسه

مقدّمـــــة

نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين ، ورغم حداثة سنّه نسبيا ، إلا أنه يحتل مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة .

يشغل مفهوم "المؤثر" مركز الصدارة في التحليل الدالي ،فهو تعميم لمفهوم الدالة ودراسة المؤثرات جاءت لتعميم مفاهيم الجبر الخطي في الأبعاد غير المنتهية ،وهذه الدراسة تنقسم لعدة أقسام :عامة من حيث كونها خطية-غير خطية-محدودة-غير محدودة هذا كله من أجل تسهيل حل المعادلات الدالية التي عواملها مؤثرات ، وهذا يأتي من خلال معرفة الحالة والطيف للمؤثر ، حيث أن هذه الأخيرة قد تتغير خلال التشويش على المؤثر ،ونقصد بالتشويش أن نضيف إلى المؤثر مؤثر آخر بغية معرفة التغيرات الحاصلة على طيفه والحصول على خصائص طيفية أحسن .

في هذه المذكرة تم توضيح التغيرات الطيفية التي تحدث لمؤثر الجداء في المتغير المستقل S $(Sf(x) = xf(x))$ ، في فراغ هيلبار بعد التشويش عليه بمؤثر من الصنف المتراص وهو المؤثر المنضبط التام .

في البداية تطرقنا إلى دراسة مسألة التشويشات على المؤثر الخطي وبالأخص التشويشات الصغيرة بالنظيم ، وبعدها تم التشويش على المؤثر S بمؤثر متراص ، ثم بمؤثر V منضبط وفي النهاية بمؤثر V منضبط تام .

وعلى هذا الأساس اخترنا عنوان المذكرة :

" التشويش المنضبط تام على مؤثر الجداء في المتغير المستقل"

قسمنا هذه المذكرة إلى فصلين :

"الفصل الأول :" "مفاهيم أساسية على المؤثرات الخطية " ، وهي مجمل المفاهيم الأساسية التي تستعمل في الفصل الثاني وقد وردت بدون برهان لأنها ليست هدفاً في ذاتها .

"**الفصل الثاني :**" "حالة الطيف بعد التشويش المنضبط تام " تطرقنا في هذا الفصل إلى مفهوم التشويش بصفة عامة وبالأخص الناتجة عن التشويش على مؤثر الجداء في المتغير المستقل على كل المحور ، وهذا ما يسمى بالتشويشات الصغيرة بالنظيم ، وماذا يحدث للطيف من تغيرات بعد التشويش عليه تشويشا منضبطاً تاماً .

الفصل

1

مفاهيم أساسية على المؤثرات الخطية

1.0 مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية على المؤثرات الخطية ، وهي مجمل المفاهيم الأساسية التي تستعمل في الفصل الثاني وقد وردت بدون برهان لأنها ليست هدفا في ذاتها .

1.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.1.1 المؤثرات الخطية:

ليكن $(X, \|.\|_X)$، $(Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة غير خالية من X، (D قد تساوي X).

تعريف 1.1.1

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y، يرمز له بالرمز F ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y = Fx$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:

$$E(F) = \{y \in Y / \ y = Fx, \ x \in D(F)\}$$

- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X\times Y$ حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx)/\ x \in D(F)\} \subset X\times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:

$$\ker F = \{x \in D(F)/\ \ Fx = 0\}$$

تعريف 2.1.1

إذا كان T, F مؤثرين من X في Y, يقال إن :

1. المؤثرين T, F منطبقان, إذا تحقق مايلي :
   - $D(F) = D(T) = D$
   - $\forall x \in D \longrightarrow T(x) = F(x)$
2. المؤثر T تمديد (توسيع) للمؤثر F , أو اقتصار للمؤثر T إذا تحقق مايلي :
   - $D(F) \subset D(T)$
   - $\forall x \in D(F) \longrightarrow T(x) = F(x)$

تعريف 3.1.1

المؤثر F من X في Y يقال إنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغX.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F),\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Bbbk \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 (Fx_2)$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X, X) = L(X)$.
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X, \mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

تعريف 4.1.1

من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1, F_2 من $L(X, Y)$ يعرف

1. جمع المؤثريين F_1, F_2 كالتالي:

$$(F_1 + F_2)x = F_1 x + F_2 x,\ \ x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x / \quad x \in D(F_1), \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 1.1.1

$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

1.2 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y.

تعريف 1.2.1

يقال إن F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق:

$$\exists c > 0, \ \forall x \in D(F), \ \|F(x)\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x من X يقال إن F محدود على X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(F) \equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

تعريف 2.2.1

يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية:

1. $\|F\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$
2. $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Fx\|_Y$
3. $\|F\| = \min\{c / \|Fx\|_Y \leqslant c\|x\|_X\}$
4. $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Fx\|_Y$

-الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي

$$X' = l(X,X) = l(X)$$

نتيجة 1.2.1

$l(X,Y)$ ف.ش.ن يكون لبناخ ، إذا كان Y لبناخ .

تعريف 3.2.1

1. يقال إن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0/\ (\forall x \in D(F)/\ \|x - x_0\|_X < \delta) \longrightarrow \|Fx - Fx_0\|_Y < \varepsilon$$

2. يقال إن المؤثر F مستمر إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه.

نتيجة 2.2.1

إذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 3.2.1

إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ فإن:

1. $\forall x \in X,\ \|Fx\| \leqslant \|F\|\|x\|$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X/\ \|Fx_\varepsilon\| > (\|F\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$

1.3 تبولوجيا الفراغ $\mathbf{l(x,y)}$

نعتبر أن X, Y ف.ش.ن.

التبولوجيا المنتظمة:

تعريف 1.3.1

تعرف التبولوجيا المنتظمة بأنها التبولوجيا المعرفة على الفراغ $l(X,Y)$ من خلال نظيمه .

تعريف 2.3.1

متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بانتظام (وفق نظيم الفراغ) نحو مؤثرا F من $l(X,Y)$ ، إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n - F\| = 0$ ، ونكتب:

$$F = u - \lim_{n\to\infty} F_n \quad \text{أو} \quad F_n \xrightarrow{u} F$$

التبولوجيا القوية:

تعريف 3.3.1

تعرف التبولوجيا القوية على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر Ψ_x المعرف كالتالي:

$$\Psi_x : l(X,Y) \longrightarrow Y / \Psi_x(F) = Fx$$

مستمرا من أجل كل x من X.

تعريف 4.3.1

متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا القوية نحو مؤثرا F ، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y، وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل x من X يكون: $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_nx - Fx\| = 0$ ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{s} F \text{ أو } F = s - \lim_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا الضعيفة:

تعريف 5.3.1

تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر $\Psi_{x,f}$ المعرف كالتالي:

$$\Psi_{x,f} : l(X,Y) \longrightarrow \mathbb{C} / \Psi_{x,f} = f(Fx)$$

مستمرا من أجل كل x من X، ومن أجل كل f من Y'.

تعريف 6.3.1

متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة نحو مؤثرا F، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ متقاربة بضعف في الفراغ Y نحو Fx، وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل f من Y' يكون:

$$\lim_{n\to\infty}\|f(F_nx) - f(Fx)\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{ أو } F = w - \lim_{n\to\infty} F_n$$

1.3.1 مبدأ التمديد بالإستمرارية :

ليكن X ف.ش.ن وY فراغا لبناخ.

نظرية 1.3.1 [3]

كل تطبيق f من $l(D(f),Y)$ ، حيث $\overline{D(f)}=X$، له تمديد f^* على X، يحقق: $\| f^* \|=\| f \|$ أي:

$$\exists f^* \in l(X,Y)/f^*(x)=f(x), x\in D(f) \;\; \| f^* \|=\| f \|$$

نتيجة 1.3.1 [3]

كل شكل خطي $f\in (D(f))' = l(D(f),K)$ ، حيث $\overline{D(f)}=X$ (X ف. ش. ن)،له تمديد $f^*\in X'$ يحقق :

$$\| f^* \|=\| f \|$$

1.3.2 نظرية بناخ -شتاينهوس :

لتكن $(f_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من $l(X,Y)$ ، حيث X بناخ.

قضية 1.3.1 [3]

إذا وجد ثابت c و $F(x_0,r)$ (كرة مغلقة)، بحيث :

$$\forall x\in F(x_0,r) \longrightarrow \| f_n(x) \| < c$$

فإن المتتالية $(\| f_n \|)_{n\geqslant 1}$ محدودة ،أي يوجد ثابت M ، يحقق : $\| f_n \| < M$

$$\exists M\in \mathbb{R}_+^*/ \| f_n \| \leqslant M, \quad \forall n\geqslant 1$$

1.3.3 نظرية ديني:

نظرية 2.3.1 [3]

اذا كان X فراغا متريا متراصا ، فان كل متتالية $(f_n)_{n\geqslant 1}$ من الفراغ $C(X,\mathscr{R})$ ،رتيبة ومتقاربة ببساطة نحو f من $C(X,\mathscr{R})$ تكون متقاربة با نتضام نحو f.

1.3.4 المؤثر القرين:

ليكن H_1، H_2 فراغين لهيلبار وF من $l(H_1,H_2)$.

تعريف 7.3.1

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H_2' في H_1'، بحيث من أجل كل (x,y) من $H_1 \times H_2$ يكون

$$\forall (x,y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Fx, y\rangle = \langle x, F^* y\rangle$$

نظرية 3.3.1 [3]

إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2', H_1')$ ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

خواص المؤثر القرين:

إذا كان $F, T \in l(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha} F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

1.3.5 :المؤثر القرين لنفسه

تعريف 8.3.1

يقال إن المؤثر $F \in l(H)$ قرين لنفسه إذا انطبق مع قرينه أي $F = F^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H, \ \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

خواص المؤثر القرين لنفسه:

ليكن F و T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$.

لدينا:

1. من أجل كل α و β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$ فإن المؤثر FT قرين لنفسه.

3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H .

4. $\|F\| = \max(|M_F|, |m_F|)$ حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

نظرية 4.3.1 [10]
إذا كان F مؤثر قرين لنفسه فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث كل مؤثر متناظر مغلق T ويحقق : $\hat{\delta}(T, F) < \delta$ يكون قرينا لنفسه .

1.3.6 المؤثر غير سالب:

تعريف 9.3.1
يسمى المؤثر F من $l(H)$ مؤثرا غير سالبا إذا كان قرينا لنفسه و يحقق $\langle Fx, x\rangle \geqslant 0$ من أجل كل $x \in H$.

نتيجة 2.3.1
كل مؤثر F من $l(X, Y)$ يمكن كتابته من الشكل

$$F = F_1 + iF_2$$

حيث :

$$F_1 = \frac{1}{2}(F + F^*)$$

و

$$F_2 = \frac{1}{2i}(F - F^*)$$

F_1, F_2 يسميان مركبات (أجزاء) المؤثر F.

تعريف 10.3.1
المؤثر F يملك :

1. مركبة تخيلية غير سالبة إذا كان $F_2 \geqslant 0$ أي F_2 مؤثر غير سالب.
2. مركبة حقيقية غير سالبة إذا كان $F_1 \geqslant 0$ أي F_1 مؤثر غير سالب.

1.3.7 المؤثرالمتقايس:

تعريف 11.3.1
يسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان $\|Fx\| = \|x\|$ ، وذلك من أجل كل $x \in H$.

1.3.8 التقايس الجزئي:

المؤثر F يقال أنه تقايس جزئي إذا وفقط إذا تحقق :

$$\|Fx\| = \|x\| \quad , \qquad x \in (\ker F)^{\perp}$$

الفراغ $(\ker F)^{\perp}$ يسمى فراغ البداية ل F .

1.3.9 المؤثرالعكسي:

ليكن F مؤثرا من X في Y ، $D(F)$ مجموعة تعريفه و $E(F)$ مجموعة قيمه.

تعريف 12.3.1

يقال إن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذلك من أجل كل y من $E(F)$.

يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

1.3.10 قابلية القلب بإستمرار:

تعريف 13.3.1

المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال إنه قابل للقلب باستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي $\exists F^{-1} \in l(Y,X)$.

نتيجة 3.3.1 (نظرية بناخ للمؤثر العكسي)

إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X, Y لبناخ، فإنّ المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 4.3.1

ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث X, Y لبناخ. إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق: $TF = I_Y$ و $FT = I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $F^{-1} = T$.

نظرية 5.3.1 [3]

إذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $\|F\| < 1$، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$\|I - (I - F)^{-1}\| \leqslant \frac{\|F\|}{1 - \|F\|}, \quad \|(I - F)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|F\|}$$

قضية 2.3.1 [3]

يكون للمؤثر F ، $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c $(c > 0)$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geqslant c\|x\|.$$

نظرية 6.3.1 [3]

ليكن f,g من $l(X,Y)$ ، حيث Y,X لبناخ. إذا كان f قابلا للقلب باستمرار ، والمتراجحة $\| (g-f)f^{-1} \| < 1$ محققة ،فإن التطبيق g يكون قابلا للقلب باستمرار ويكون عندها :

$$\| g^{-1} - f^{-1} \| \leqslant \frac{\| f^{-1} \| \| (g-f)f^{-1} \|}{1 - \| (g-f)f^{-1} \|}; \quad \| g^{-1} \| \leqslant \frac{\| f^{-1} \|}{1 - \| (g-f)f^{-1} \|}$$

1.4 المؤثر المتراص :

1.4.1 الأعداد المميزة للمؤثر المتراص :

تعريف 1.4.1

العدد s الذي من أجله يوجد حل غير معدوم للجملة التالية :

$$h_1(\lambda) = \begin{cases} Fx = sy \\ F^*y = sx \end{cases} \qquad (1.1)$$

يسمى قيمة شاذة أو العدد المميز ل F والحلول x ، y المرفقة به تسمى العناصر الأساسية لشميد .

ليكن X و Y فراغين شعاعين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، و F مؤثر من $L(X,Y)$.

المؤثر المنته :

تعريف 2.4.1

المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه ذو رتبة منتهية (أو منته) إذا كان $\dim E(F) = n_0$.

نرمز لمجموعة المؤثرات المنتهية من X في Y بالرمز $l_0(X,Y)$.

تعريف 3.4.1

يقال أن المؤثر F متراص ، إذا حول كل مجموعة محدودوة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y .

تعريف 4.4.1

يقال أن المؤثر F متراص ، إذا كان :

1. المؤثر F يحول كرة الوحدة المغلقة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y .

2. المؤثر F يحول كل متتالية غير منتهية ومحدودة في X ،إلى متتالية في Y يمكن إستخراج منها متتالية أساسية .

3. يرمز لمجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y بالرمز $l_\infty(X,Y)$

نتيجة 1.4.1

$$l_0(X,Y) \subset l_\infty(X,Y) \subset l(X,Y) \qquad (1.2)$$

نتيجة 2.4.1

المؤثر المتراص يكون منتهيا إذا كانت $E(F)$ مغلقة في Y .

نتيجة 3.4.1

النهاية المنتظمة لمتتالية المؤثرات من $l_0(X,Y)$ إذا وجدت تكون مؤثرا متراصا .

قضية 1.4.1

المؤثر F يكون من $l_\infty(X,Y)$ (Y هيلبار) إذا وفقط إذا كان نهاية منتظمة لمتتالية مؤثرات من $l_\infty(X,Y)$.

1.5 النظيم المطلق ومؤثر هيلبرت شميد :

ليكن $F \in L(H_1,H_2)$ حيث H_1 ، H_2 هيلبار قابل للفصل و $(x_n)_{n\geqslant 1}$ و $(y_n)_{n\geqslant 1}$ أساسان متعامدان ومتجانسان ل H_1 ، H_2 على التوالي .

قضية 1.5.1 [4]

من أجل كل F من $L(H_1,H_2)$ العبارة $\sum_{i,j=1}^{\infty} |<Fx_i,y_j>|^2$ (منتهية أو غير منتهية) غير متعلقة بإختيار $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ، $(y_n)_{n\geqslant 1}$.

نتيجة 1.5.1

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| F^* y_j \|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |<Fx_i,y_j>|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \| Fx_i \|^2$$

تعريف 1.5.1

يقال أن F من صنف شميد أو مؤثر هيلبرت شميد إذا كان : $\sum_{i,j=1}^{\infty} |<Fx_i,y_j>|^2 < \infty$ أو $\sum_{i=1}^{\infty} \| Fx_i \|^2 < \infty$

قضية 2.5.1 [4]
كل مؤثر من صنف شميد يكون محدودا .

- يرمز لمؤثرات صنف شميد من H_1 في H_2 بالرمز $l_2(H_1,H_2)$

تعريف 2.5.1
يعرف النظيم المطلق ل F بأنه القيمة $\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |<Fx_i,y_j>|^2}$ ويرمز له ب $\| F \|_2$ أو $\| F \|_{H.S}$ ونكتب

$$\| F \|_2^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \| Fx_i \|^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty} |<Fx_i,y_j>|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \| F^* y_j \|^2}$$

إذا كان $\| F \|_2 < \infty$ يقال أن F من صنف شميد ، عندها يسمى F بمؤثر هيلبرت شميد و $\| . \|_2$ نظيم شميد يسمى أيضا النظيم الطيفي .

قضية 3.5.1 [4]
الفراغ $(l_2(H_1,H_2), \| . \|_2)$ فراغ بناخ .

١.٥.١ المؤثر النووي ذو الأثر :

صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة

تعريف 3.5.1
من أجل كل p $(0 < p \leqslant \infty)$ يسمى صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة في H بأنه المجموعة $l_p(H)$

$$l_p = \{F \in l_\infty / \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p < \infty\}$$

نعرف على $l_p(H)$ تطبيقا $\| . \|$ كالتالي

$$\| F \|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p)^{\frac{1}{p}} \qquad , \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

وهو يحقق شروط النظيم أي أن $(l_p(H), \| . \|_p)$ ف . ش . ن $1 \leqslant p < \infty$

نتيجة 2.5.1

- في حالة $p = \infty$ $l_p(H)$ هو $l_\infty(H)$ وفي حالة $p = 2$ $l_p(H)$ هو الصنف $l_2(H)$ أي صنف هيلبرت شميد.

- $(l_p, \| . \|_p)$ لبناخ ، $p \geqslant 1$.

تعريف 4.5.1

يعرف صنف المؤثرات النووية في H ، بأنه صنف كارلمان من أجل $p = 1$ عندها الفراغ الشعاعي النظيمي $(l_1(H), \| . \|_1)$ يسمى فراغ المؤثرات النووية ، $\| . \|_1$ يسمى النظيم النووي .

$$l_1(H) = \{F \in l_\infty(H) / \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty, \| F \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n\}$$

نظرية 1.5.1 (التعلق المستمر) [7]

إذا كان $F \in l_2(H)$ و M مجموعة مغلقة ومحدبة من $\mathbb{C}$ فإن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ (\forall T \in l_2(H) / \ \|F - T\| < \delta) \Rightarrow \max_{\lambda \in M} |det(I - \lambda F) - det(I - \lambda T)| < \varepsilon$$

الصيغة الاخيرة تسمى صيغة التعلق المستمر لـ $det(I - \lambda F)$ بالمؤثر F.

1.5.2 المؤثر المتناضر:

ليكن F مؤثر من $L(H)$ حيث $\overline{D(F)} = H$.

تعريف 5.5.1

يقال أن المؤثر F متناضر إذا تحقق :

$$< Ff, g > = < f, Fg > \qquad f, g \in D(F)$$

1.5.3 المؤثر أساسيا قرينا لنفسه :

تعريف 6.5.1

ليكن $(F, D(F))$ مؤثر متناظر غير محدود في الفضاء الهيلبرتي H مع $\overline{D(F)} = H$ ، نقول عن F أنه أساسيا قرينا لنفسه إذا كان $\overline{F}$ قرينا لنفسه أو $(\overline{F})^* = \overline{F} = F^*$

1.5.4 المؤثر المغلق وقابلية الإغلاق:

ليكن F مؤثر من $L(H)$ $(D(F) \neq H)$ و F غير محدود على مجموعة تعريفه.

تعريف 7.5.1

المؤثر F يقال أنه مغلق إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. بيانه Γ_F مغلق في $H \oplus H$.

2. من أجل كل متتالية $(f_n)_{n\geqslant 1}$ من $D(F)$ حيث

$$f_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \quad , \qquad Ff_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} g$$

يكون

$$g = Ff, \quad f \in D(F)$$

يرمز لمجموعة المؤثرات المغلقة بالرمز $\Im(X,Y)$.

نظرية 2.5.1 [10]

إذا كان $F,T \in \Im(X,Y)$ و $A \in l(X,Y)$ فإن :

$$\hat{\delta}(T+A, F+A) \leqslant 2(1+\parallel A \parallel^2)\hat{\delta}(T,F) \qquad (1.3)$$

نتيجة 3.5.1

كل مؤثر محدود يكون مغلقا .

تعريف 8.5.1

ليكن $T \in L(X,Y)$ ، يقال أن المتتالية $(U_n)_{n\geqslant 1} \subset D(T)$ متقاربة بالنسبة لـ T نحو u من X، إذا كانت المتتالية $(U_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو u و المتتالية $(TU_n)_{n\geqslant 1}$ لكوشي في Y .

تعريف 9.5.1

يقال أن المؤثر F قابل للإغلاق إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1. إذا كانت $(f_n)_{n\geqslant 1}$ من $D(F)$ حيث $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} Ff_n = h$ فإن $h = 0$.

2. إذا كانت غلاقة (لصاقة) بيانه Γ_F تمثل بيان لمؤثر خطي .
نرمز لهذا المؤثر إن وجد بالرمز $\overline{F}$ ويسمى غلاقة F (و أحيانا نرمز لها بالرمز $\tilde{F}$) .

1.5.5 الإنفراج بين المؤثرات المغلقة:

تعريف 10.5.1

يعرف الإنفراج بين الفراغين الجزئيين X_1 ، X_2 من الفراغ الشعاعي النظيمي X ، ويرمز له بالرمز $\widehat{\delta}(X_1,X_2)$ بالعلاقة التالية :

$$\widehat{\delta}(X_1,X_2) = \max[\delta(X_1,X_2), \delta(X_2,X_1)]$$

حيث

$$\delta(X_1,X_2)=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X_1}} d(x,X_2)$$

تعريف 11.5.1 [10]

إذا كان F، T مؤثرين مغلقين أي $T,F\in\Im(X,Y)$ فإن الإنفراج بين المؤثرين F، T يعرف على أنه الإنفراج بين بيانهما Γ_F Γ_T، بإعتبار أنهما فراغين جزئين مغلقيين من الفراغ $X\text{x}Y$، ونكتب

$$\delta(F,T)=\delta(\Gamma_F,\Gamma_T)$$

$$\widehat{\delta}(F,T)=\widehat{\delta}(\Gamma_F,\Gamma_T)=max[\delta(F,T),\delta(T,F)]$$

قضية 4.5.1 [10]

إذا كان $F\in l(X,Y)$ و $T\in\Im(X,Y)$ حيث

$$\delta(T,F)<(1+\parallel F\parallel)^{\frac{-1}{2}}$$

فإن T يكون من $l(X,Y)$ عندها يكون الفراغ $D(T)$ مغلق.

1.6 المؤثرات نصف محدودة :

تعريف 1.6.1

نقول أن المؤثر F محدود نسبيا (أو T-محدود) حيث T مؤثر متناضر و مغلق ، إذا كان :

- $D(T)\subset D(F)$
- $$\parallel Fu\parallel\leqslant a\parallel u\parallel+b\parallel Tu\parallel, u\in D(T) \tag{1.4}$$

شرط مكافئ هو

- $$\parallel Fu\parallel^2\leqslant a^{\backprime 2}\parallel u\parallel^2+b^{\backprime 2}\parallel Tu\parallel^2, u\in D(T) \tag{1.5}$$

حيث الثوابت $a^\backprime$ ، $b^\backprime$ تختلف بشكل عام عن a و b.

نظرية 1.6.1 [10]

ليكن $F \in l(X,Y)$ ، إذا كان $T \in \Im(X,Y)$ وقريب من T حيث $\hat{\delta}(T,F) < (1+ \| F \|^2)^{\frac{-1}{2}}$ ، فإن $T \in l(X,Y)$ و

$$\| T - F \| \leqslant \frac{(1+ \| F \|^2)\delta(T,F)}{1-(1+ \| F \|^2)^{\frac{1}{2}}\delta(T,F)} \tag{1.6}$$

1.7 نظرية الأطياف

1.7.1 الفراغات الذاتي ، الجذري، الثابت

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ حيث X ف.ش. على الحقل K.

تعريف 1.7.1

العدد λ من K يقال إنه قيمة ذاتية للمؤثر F إذا كان للمعادلة $y = Fx$ حلا غير معدوم. عندها الحل غير المعدوم يسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F.

تعريف 2.7.1

يعرف الفراغ الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز V_λ، أي:

$$V_\lambda = \ker(F - \lambda I)$$

بعد الفراغ V_λ يسمى التضعيف الذاتي أو الهندسي للقيمة الذاتية λ.

تعريف 3.7.1

العنصر x من X يسمى شعاعا جذريا للمؤثر F مرفقا بالقيمة الذاتية λ إذا وجد عدد طبيعي m، من أجله يكون:

$$(F - \lambda I)^m x = 0 \tag{1.7}$$

أصغر الأعداد m التي تحقق الصيغة (1.7) يسمى علو الشعاع الجذري x.

تعريف 4.7.1

يعرف الفراغ الجذري المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الجذرية المرفقة بالقيمة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز M_λ، أي:

$$M_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(F - \lambda I)^m$$

بعد الفراغ M_λ يسمى التضعيف الجبري للقيمة الذاتية λ.

نتيجة 1.7.1

1. الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية مثنى مثنى مختلفة تكون مستقلة خطيا.
2. الأشعة الذاتية التي علوها مثنى مثنى مختلف ومرفقة بنفس القيم الذاتية تكون مستقلة خطيا.
3. كل شعاع ذاتي للمؤثر F يكون شعاعا جذريا علوه واحد.
4. $V_\lambda \subset M_\lambda, \;\; dimV_\lambda \leqslant dimM_\lambda$

تعريف 5.7.1

الفراغ الجزئي M من X يقال أنه ثابت بالنسبة للمؤثر F إذا كان:

$$M \subset D(F), \;\; FM \subset M$$

نتيجة 2.7.1

الفراغ الذاتي و الفراغ الجذري للمؤثر F ثابتين بالنسبة للمؤثر $F-\mu I$ من أجل كل μ من K.
في الحالة الخاصة يكونا ثابتين بالنسبة للمؤثر F، أي:

$$FV_\lambda \subset V_\lambda, \;\; FM_\lambda \subset M_\lambda$$

قضية 1.7.1

إذا كان F,T مؤثرين من $L(X)$، حيث $FT = TF$، فإن كل فراغ ذاتي لأحدهما يكون ثابتا بالنسبة للآخر.

1.7.2 مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي:

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ ، حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx - \lambda I x = y \tag{1.8}$$

أو إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x = y / \; F_\lambda \equiv F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب.
في حالة $y = 0$ المعادلة (1.8) تسمى متجانسة .

تعريف 6.7.1

العدد المركب λ يقال إنه نقطة نظامية للمؤثر F إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار، أي $\exists (F_\lambda)^{-1} \in l(X)$ يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$ ، ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ (F_\lambda)^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 7.7.1

يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي :

$$\sigma(F) = \mathbb{C} \backslash \rho(F)$$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا، (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F) تسمى بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:

$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ \ker F_\lambda \neq 0\}$$

2. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود . تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب $(F_\lambda)^{-1}$ غير محدود.

$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}P_\sigma(F)/ \ E(F_\lambda) \neq \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$

3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X. تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$، ونكتب:

$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in CP_\sigma(F)/ \ \overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

نتائج:

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| > \|F\|\} \subset \rho(F)$
3. $\{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leqslant \|F\|\} \supset \sigma(F)$

ملاحظة 1.7.1

أحيانا الطيف $\sigma(F)$ يحتوي على جزئين σ' ، σ'' منفضلين أو أكثر ، الإنفصال يكون على النحو التالي :

نظرية 1.7.1 [10]

ليكن $F \in \Im(X)$ وليكن Γ مجموعة جزئية متراصة من الحالة $\rho(F)$ ، إذا وجد $\delta > 0$ يحقق : $T \in \Im(X)$ و $\hat{\delta}(T, F) < \delta$ فإن $\Gamma \subset \rho(T)$.

نظرية 2.7.1 [10]

ليكن $F \in \Im(X)$ ، إذا كان $\sigma(F)$ مقسم بمنحنى Γ إلى قسمين σ' ، σ'' كما في السابق ، و $X = M'(F) \oplus M''(F)$ تحليل X ، المرفق بهذا التقسيم فإنه يوجد $\delta > 0$ متعلق ب F و Γ تحقق :
إذا كان $T \in \Im(X)$ ، $\hat{\delta}(T, F) < \delta$ فإن الطيف $\sigma(T)$ يقسم داخل Γ إلى قسمين $\sigma'(T)$ ، $\sigma''(T)$ وفي التحليل $X = M'(T) \oplus M''(T)$ المرفق بالتقسيم يكون $M'(T)$ ، $M''(T)$ إزومورفي مع $M'(F)$ ، $M''(F)$ على التوالي .
في الحالة الخاصة

$$\dim M'(T) = \dim M'(F)$$

$$\dim M''(T) = \dim M''(F)$$

عندها يكون $\sigma'(T)$ و $\sigma''(T)$ غير خالية إذا كان $\sigma'(F)$ و $\sigma''(F)$ كذلك ، التحليل :
$X = M'(T) \oplus M''(T)$ متعلق بإستمرار ب T على النحو التالي :
إذا كان $\hat{\delta}(T, F) \longrightarrow 0$ فإن المسقط $P[T]$ (إسقاط M على $M'(T)$ الموازي لـ $M''(T)$) يؤول حسب النظيم نحو $\rho(F)$.

1.8 طيف المؤثر القرين

قضية 1.8.1 [3]

ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار فإن المؤثر F^* أيضا يكون قابلا للقلب باستمرار. عندها يكون

$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$

2. $\sigma(F^*) = \{\overline{\lambda} / \ \lambda \in \sigma(F)\}$

1.9 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.

2. $\sigma(F) \subset [m_F, M_F]$ ، حيث

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين .

4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F، فإن متممه العمودي $M^{\perp}$ يكون كذلك .

قضية 1.9.1 [3]

العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$.

نظرية 1.9.1 [3]

ليكن المؤثرين F, T من $l(X)$

1. إذا كانت λ, ξ من $\rho(F)$ فإن:

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi) R_\lambda(F) R_\xi(F) \tag{1.9}$$

الصيغة (1.9) تسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

نظرية 2.9.1 [3]

العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان : $E(F_\lambda) = H$

نظرية 3.9.1 [3]

العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا تحققت الصيغة التالية:

$$\exists K > 0 \ / \ \forall x \in H \longrightarrow \| F_\lambda x \| \geqslant K \| x \|$$

قضية 2.9.1

إذا كان F من $l(H)$ فإن

$$F = F^* \Longrightarrow \sigma \subset \mathbb{R}$$

1.10 تحليلية الحالة

تعريف 1.10.1

ليكن المؤثر F من $l(X)$.

من أجل كل λ من $\rho(F)$ يرمز للمؤثر $(F_\lambda)^{-1}$ بالرمز $R_\lambda(F)$.

المؤثرات $\{R_\lambda(F)/\ \lambda \in \rho(F)\}$ تسمى حالة المؤثر F.

نظرية 1.10.1 [5]

حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهاية.

عندها يكون:

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0 = \infty$ يكون:

$$R_\lambda(F) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} F^n$$

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$

$$R_{xi}(X) = R(\xi_0)[1 - (\xi - \xi_0) - A(x)R(\xi_0)]^{-1}$$

حيث

$$A(x) = T(x) - T = \sum_{n=1}^{\infty} x^n T^{(n)}$$

$$R_\xi(T(x)) = (T(x) - \xi)^{-1}$$

- في حالة المؤثر F قرين لنفسه، نعرف نظيم الحالة كمايلي :

$$\| R_\xi(F) \| = \frac{1}{dist(\xi, \sigma(F))} = \frac{1}{|Im\xi|}$$

- من أجل $F \in l(X)$ ومنه

$$R_{(\lambda-\lambda_0)^{-1}}(R_{\lambda_0}(F)) = -(\lambda - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)^2 R_\lambda(F)$$

تعريف 2.10.1

يقال أن $R_\lambda(T)$ تحليلية بالأجزاء $\rho(T)$ مجموعة غير مترابطة و $R_\lambda(F)$ تحليلية على كل جزء من $\rho(F)$.

1.11 دالة المؤثر

ليكن F مؤثرا من X بناخ .
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود، أي $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F)=\sum_{k=0}^{n}a_kF^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (التحليلية على $\mathbb{C}$)، أي إذا كانت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F)\in l(B)$.
يمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف، هذا الصنف يرمز له بـ $A(F)$.
-تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$ بأحد الصيغ التالية:

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}f(\lambda)R_\lambda(F)d\lambda$$

أو

$$f(F)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}F^n\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ واقع في نطاق تحليلية f.
Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نتيجة 1.11.1 (نظرية تحويل الطيف)

إذا كانت الدالة f من الصنف $A(F)$ فإن: $f(\sigma(F))=\sigma(f(F))$

نظرية 1.11.1 [4]

إذا كانت الدالتان f ، g من $A(F)$ فإن المعادلة التالية : $f(F)=g(F)$ محققة إذا وفقط إذا تحققت المعادلة : $f(\lambda)=g(\lambda)$ في مجموعة ما مفتوحة حاوية لكل الطيف $\sigma(F)$ بإستثناء عدد منته $\{\lambda_1,......,\lambda_k\}$ من أقطاب المؤثر F ومن أجل كل j $(1\leqslant j\leqslant k)$ ، الدالة $f-g$ تملك في النقطة λ_i صفرا درجته أكبر أو تساوي درجة القطب λ_i.

1.12 التحليل الطيفي

نظرية 1.12.1 [3]

كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_μ متعلقة بوسيط حقيقي μ وتحقق.

1. $E_\mu \leqslant E_\nu, \quad \mu \leqslant \nu$.
2. $E_{\mu+0} = E_\mu$.
3. $\mu < m_F \longrightarrow E_\mu = 0, \quad \mu \geqslant M_F \longrightarrow E_\mu = I$.

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F = \int_{m_F-0}^{M_F} \mu dE_\mu$$

نتائج:

1. $F^n = \int_{m_F-0}^{M_F} \lambda^n dE_\lambda, \quad n \geqslant 1$
2. $\|Fx\|^2 = \langle Fx, Fx\rangle = \langle F^2x, x\rangle = \int_{m_F-0}^{M_F} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle$
3. $\mu \in \rho(F) \longrightarrow R_\mu = \int_{m_F-0}^{M_F} \frac{\lambda}{\lambda-\mu} dE_\lambda$

1.13 المسقط الطيفي (مسقط ريس)

ليكن F من $l(H)$ طيفه $\sigma(F)$ مكون من مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومغلقتين σ_1, σ_2.
تسمى كل من σ_1, σ_2 مجموعة معزولة من الطيف.
ليكن V_1, V_2 جوارين منفصلين مفتوحين لـ σ_1, σ_2 على التوالي حدودهما معرفة كما في السابق.
نعرف دالة h_1 كالتالي:

$$h_1(\lambda) = \begin{cases} 1\ ; & \lambda \in V_1 \\ 0\ ; & \lambda \in V_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

لاحظ أن h_1 من الصنف $A(F)$ ومنه نكتب

$$h_1(F) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\partial V_1} R_\lambda(A) d\lambda \tag{1.11}$$

تعريف 1.13.1

يعرف المسقط الطيفي أو مسقط ريس للمؤثر F بالنسبة للجزء المعزول σ_1 من الطيف $\sigma(F)$ بأنه المؤثر $h_1(F)$ المعرف في الصيغة (1.11) ويرمز له بالرمز P_{σ_1} ونكتب:

$$P_{\sigma_1} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\partial V_1} R_\lambda(A) d\lambda$$

الفصل

2

حالة الطيف بعد التشويش المنضبط تام

2.1 مقدمة:

يتناول هذا الفصل تشويش المؤثرات الخطية ، حيث تطرقنا في البداية إلى مفهوم التشويش بصفة عامة وبالأخص الناتجة عن التشويش على مؤثر المتغير المستقل على كل المحور وهذا مايسمى بالتشويشات الصغيرة بالنظيم ، ثم تطرقنا إلى التغيرات التي تحدث على الطيف بعد التشويش عليه تشويشا منضبطا تاماً .

2.2 التشويشات الصغيرة بالنظيم :

نظرية 1.2.2

ليكن T , F من $L(X,Y)$ وحيث F محدود بالنسبة ل T(T -محدود) حيث ، حده بالنسبة لT أقل من الواحد .

يكون المؤثر $S = T + F$ قابل للإغلاق إذا وفقط إذا كان T قابلا للإغلاق ، عندها يكون غلاقة T و S لهما نفس مجموعة التعريف ، في الحالة الخاصة S يكون مغلق إذا وفقط إذا كان Tمغلق.

البرهان :

بما أن F ، T -محدود فإن $u \in D(T)$ $\quad \| Fu \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|,$ ، يمكن إعتبار $b < 1$
لاحظ:

$$-a \| u \| + (1-b) \| Tu \| \leqslant \| Su \| \leqslant a \| u \| + (1+b) \| Tu \|, \quad u \in D(T) \qquad (2.1)$$

لتكن $\{U_n\}$ متتالية معينة متقاربة بالنسبة لـ T(أنظر التعريف (8.5.1)) .
نطبق المتراجحة الثانية من (2.1) على الشعاع $U_n - U_m$ نستنتج أن $\{U_n\}$ تكون S-متقاربة ، من المتراجحة الأولى في (2.1) ، نستنتج أن كل متتالية S -متقاربة تكون T-متقاربة.
ومنه إذا كانت $\{U_n\}$،S- متقاربة نحو الصفر فإنها تكون T-متقاربة نحو الصفر ، وعليه يكون $TU_n \longrightarrow 0$ إذا كان T قابلا للإغلاق .
المتراجحة الثانية من (2.1) نستنتج أن $SU_n \longrightarrow 0$ أي المؤثر S قابل للإغلاق.
نفس الشئ نجد إذا كان S قابل للإغلاق فإن T يكون كذلك . ليكن $\tilde{T}$ ، $\tilde{S}$ غلاقة T ، S على التوالي من أجل كل $u \in D(\tilde{S})$ توجد متتالية $\{U_n\}$ ، S - متقاربة نحو u.
كما عرفنا سابقا $\{U_n\}$ تكون T-متقاربة نحو u ومنه $u \in D(\tilde{T})$ عندها يكون $D(\tilde{S}) \subset D(\tilde{T})$ والإحتواء العكسي يبرهن بنفس الطريقة.

نظرية 2.2.2

إذا كان T، S مؤثرات من $L(X,Y)$ حيث :

$$\| Su - Tu \| \leqslant a \| u \| + b' \| Tu \| + b'' \| Su \|, \quad u \in D(T) = D(S) \qquad (2.2)$$

حيث b'' ، a, b' ثوابت غير سالبة و $b' < 1$ و $b'' < 1$ فإن مطلوب النظرية (1.2.2) محقق.

البرهان :

نضع $F = S - T$ ، $T(\alpha) = T + \alpha F$ $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ المؤثرات $T(\alpha)$ تملك نفس مجموعة التعريف $D(T)$ وتحقق $T(0) = T$، $T(1) = S$.
وبما أن $Tu = T(\alpha)u - \alpha Fu$ و $Su = T(\alpha)u + (1-\alpha)Fu$ فإنه من (2.2) يكون

$$\| Fu \| \leqslant a \| u \| + (b' + b'') \| T(\alpha)u \| + b \| Fu \|$$

حيث $b = \max(b', b'')$ وعليه يكون

$$(1-b) \| Fu \| \leqslant a \| u \| + (b' + b'') \| T(\alpha)u \|$$

ومنه ينتج :

$$\| Fu \| \leqslant \frac{1}{1-b}(a \| u \| +(b' + b'') \| T(\alpha)u \|)$$

ومنه نستنتج أن المؤثر F يكون $T(\alpha)$-محدود مع حده بالنسبة ل $T(\alpha)$ أقل أو يساوي $\beta = (1-b)^{-1}(b' + b'')$ ، وبالتالي المؤثر $A(\alpha - \alpha')$ يكون $T(\alpha)$-محدود مع حده بالنسبة ل $T(\alpha)$ أقل من الواحد ، إذا كان $|\alpha' - \alpha| < \frac{1}{\beta}$ ومنه حسب النظرية (1.2.2) المؤثر $T(\alpha')$ قابل للإغلاق إذا وفقط إذا كان $T(\alpha)$ قابل للإغلاق .

نظرية 3.2.2

ليكن T و F مؤثرات من X في Y حيث $T \in \Im(X, Y)$ ، ويوجد T^{-1} من $l(Y, X)$ إذا كان F T - محدود أي

$$\| Fu \| \leqslant a \| u \| +b \| Tu \|, \quad u \in D(T) \tag{2.3}$$

حيث الثوابت a ، b تحقق المتراجحة :

$$a \| T^{-1} \| +b < 1 \tag{2.4}$$

فإن المؤثر $S = T + F$ يكون مغلق ، وقابل للقلب بالإستمرار($S^{-1} \in l(Y, X)$) عندها يكون :

$$\| S^{-1} \| \leqslant \frac{\| T^{-1} \|}{1 - a \| T^{-1} \| -b}, \quad \| S^{-1} - T^{-1} \| \leqslant \frac{\| T^{-1} \| (a \| T^{-1} \| +b)}{1 - a \| T^{-1} \| -b} \tag{2.5}$$

البرهان :

بإعتبار الشرط (2.4) يكون $b < 1$ ومنه حسب النظرية (1.2.2) يكون S مغلق.
برهان المتراجحات بنفس برهان النظريتين (5.3.1) و (6.3.1) في الفصل الأول ، فقط نشير إلى

$$S = T + F = (1 + FT^{-1})T, \quad FT^{-1} \in l(Y) \tag{2.6}$$

ذلك لأن FT^{-1} مؤثر من Y في Y ويحقق :

$$\| FT^{-1}v \| \leqslant a \| T^{-1}v \| +b \| v \| \leqslant (a \| T^{-1} \| +b) \| v \|$$

أي أن :

$$\| FT^{-1} \| \leqslant a \| T^{-1} \| +b < 1 \tag{2.7}$$

ومنه يكون : $1 + FT^{-1}$ تقابل من Y على Y ، كما نشير إلى أننا إستعملنا المتراجحة (2.7) بدلا من المتراجحة $\| FT^{-1} \| \leqq \| F \| \| T^{-1} \|$.

نظرية 4.2.2

ليكن T مؤثر مغلق في X ، وليكن F مؤثر T-محدود في X .
إذا وجد ξ من $\rho(T)$ حيث

$$a \parallel R_\xi(T) \parallel + b \parallel TR_\xi(T) \parallel < 1$$

فإن المؤثر $T = S + F$ يكون مغلق و $\xi \in \rho(S)$ عندها يكون

$$\parallel R_\xi(S) \parallel \leqslant \parallel R_\xi(T) \parallel (1 - a \parallel R_\xi(T) \parallel - b \parallel TR_\xi(T) \parallel)^{-1}$$

البرهان :

يستنتج من النظرية (3.2.2) .

نظرية 5.2.2

بإستخذام نفس رموز النظريات السابقة وبفرض الطيف $\sigma(T)$ مقسم إلى جزئين بمنحني مغلق Γ كما في النظرية (3.8.1) (الفصل الأول)، إذا كان:

$$\sup_{\xi \in \Gamma}(a \parallel R_\xi(T) \parallel + b \parallel TR_\xi(T) \parallel) < 1 \qquad (2.8)$$

فإن الطيف $\sigma(S)$ أيضا يقسمه المنحني Γ ويحقق متطلبات النظرية (2.7.1) .

البرهان:

تبرهن بنفس طريقة برهان النظرية (2.7.1) ، فقط نشير هنا إلى أن القيمة $\parallel P(S) - P(T) \parallel$ صغيرة إذا كان المؤثر $AR_\xi(T)$ صغير من أجل كل $\xi \in \Gamma$، في الحالة الخاصة إذا كان a و b صغير بالقدر الكافي.

نظرية 6.2.2

ليكن T قرين لنفسه ، إذا كان F متناظر و T -محدود مع حده بالنسبة ل T أقل من الواحد فإن $T + F$ يكون قرينا لنفسه.
في الحالة الخاصة $T + F$ يكون قرينا لنفسه إذا كان F محدوداً ومتناظراً و $D(T) \subset D(F)$.

البرهان:

واضح أن $T+F$ متناظر ، مجموعة تعريفه $D(T)$.
نفترض أن

$$\| Fu \|^2 \leqslant a'^2 \| u \|^2 + b'^2 \| Tu \|^2, \quad u \in D(T) \tag{2.9}$$

محققة مع الثوابت a' ، b' حيث : $a' > 0$ و $0 < b' < 1$ (وهذا لا يفقد عموم البرهان).
من المتطابقة

$$a \| R_\xi(T) \| + b \| TR_\xi(T) \| < 1$$

T مغلق ومتناظر

$$\| (T-\xi)u \|^2 = \| (T - Re\xi)u \|^2 + (Im\xi)^2 \| u \|^2, \quad u \in D(T)$$

الشرط (2.9) يكتب كالتالي :

$$\| Fu \| \leqslant \| (b'T \mp ia')u \|, \quad u \in D(T) \tag{2.10}$$

ومنه بوضع $(T \mp ic')u = v$ نجد:

$$\| FR(\mp ic')v \| \leqslant b' \| v \|, \quad c' = a' / b' \tag{2.11}$$

حيث $R(\xi) = R_\xi(T)$ ، بما أن T قرين لنفسه فإن v يمسح كل H عندما u يمسح كل $D(T)$ وعليه يكون

$$B_\mp = -FR(\mp ic') \in l(H), \quad \| B_\mp \| \leqslant b' \tag{2.12}$$

بما أن $b' < 1$ فإن $(1-B_\mp)^{-1}$ موجود وينتمي إلى $l(H)$ أي $1 - B_\mp$ تقابل من H في نفسه .
لكن

$$T + F \mp ic' = (1 - B_\mp)(T \mp ic')$$

و صورة $T \mp ic'$ هي كل H ومنه صورة $T + F \mp ic'$ تطابق H هذا يعني أن $T+F$ قرين لنفسه .

نظرية 7.2.2

ليكن T أساسيا قرينا لنفسه ، إذا كان F متناظر و T- محدود و حده بالنسبة لـ T أقل من الواحد ، فإن $T+F$ أساسيا قرينا لنفسه وغلاقته $\widetilde{T+F}$ متساوية مع $\tilde{T}+\tilde{F}$.
في الحالة الخاصة هذا يكون صحيح ،إذا كان F متناظر و محدود و $D(T) \subset D(F)$.

البرهان :

أولا نبرهن أن $\widetilde{F}$ يكون $\widetilde{T}$- محدود أي

$$\| \widetilde{F}u \|^2 \leqq a'^2 \| u \|^2 + b'^2 \| \widetilde{T}u \|^2, \quad u \in D(\widetilde{T}), \quad D(\widetilde{T}) \subset D(\widetilde{A}) \tag{2.13}$$

إذا تحققت (2.9) فأنه من أجل كل $u \in D(\widetilde{T})$ توجد متتالية $\{U_n\}$ ، T- متقاربة نحو u $(U_n \longrightarrow u, Tu_n \longrightarrow \widetilde{T}u)$.

المتراجحة (2.9) تبين أن $\{U_n\}$ هي أيضا F -متقاربة ، ذلك لأن $u \in D(\widetilde{F})$ و $Fu_n \longrightarrow \widetilde{F}u$.

المتراجحة (2.13) تستنتج من (2.9) بإستبدال u بـ u_n ثم إدخال النهاية.

عندها يكون :

$$(T+F)u_n \longrightarrow (\widetilde{T}+\widetilde{F})u$$

ذلك لأن $u \in D((\widetilde{T+F}))$ و $(\widetilde{T+F})u = (\widetilde{T}+\widetilde{F})u$ وهذا يؤدي إلى

$$\widetilde{T}+\widetilde{F} \subset (\widetilde{T+F}) \tag{2.14}$$

والتي يمكن إقتراضها كما في برهان النظرية $(6.2.2)$.

من ناحية ثانية إذا طبقنا النظرية $(6.2.2)$ على المؤثرات $\widetilde{F}$ ، $\widetilde{T}$ ، وبإعتبار $b' < 1$ يكون $\widetilde{T}+\widetilde{F}$ قرين لنفسه وعليه $\widetilde{T}+\widetilde{F}$ يكون هو التمديد المغلق لـ $T+F$ ، ولهذا السبب يكون $(\widetilde{F+T})$ تمديداً مغلقاً أيضا ،هذا وبإعتبار (2.14) يكون

$$\widetilde{T}+\widetilde{A} = (\widetilde{T+A})$$

نتيجة 1.2.2 [10]

ليكن T ، S مؤثرين متناظرين ، حيث $D(T) = D(S) = D$ و

$$\| (S-T)u \| \leqslant a \| u \| + b(\| Tu \| + \| Su \|), \quad u \in D$$

حيث a ، b ثوابت غير سالبة مع $b < 1$ ، المؤثر S يكون أساسيا قرين لنفسه إذا وفقط إذا كان T كذلك عندها يكون $\widetilde{S}$ و $\widetilde{T}$ لها نفس مجموعة التعريف .

في الحالة الخاصة S يكون قرينا لنفسه إذا وفقط إذا كان T كذلك .

نظرية 8.2.2 [10]

من أجل T_0 معين من $\Im(X)$ ، المؤثر $R_\lambda(T)$ كدالة في λ تكون تحليلية من أجل كل T من $T_0 + l(X)$ و $\lambda \in \rho(T)$ ، حيث :

$$T_0 + l(X) = \{T_0 + F / F \in l(X)\}$$

بمعنى آخر

1. تكون مجموعة الأزواج (λ, T) ، حيث $\lambda \in \rho(T)$ مجموعة مفتوحة في فراغ الجداء $\mathbb{C}\times[T_0 + l(X)]$ أي من أجل كل $T \in T_0 + l(X)$ ، و $\lambda_0 \in \rho(T)$ ، العدد λ يكون من $\rho(S)$ إذا كانت القيم $|\lambda - \lambda_0|$ و $\| S - T \|$ صغيرة بالقدر الكافي .

2. $R_\lambda(S)$ يمكن تمثيلها بسلسلة ثنائية القوى لـ $(\lambda - \lambda_0)$ و F ، ، حيث $F \in l(X)$ و $S = T + F$.
في الحالة الخاصة $T_0 = 0$ مؤثر الحالة $R_\lambda(T)$ تحليلية بالأجزاء بالنسبة لـ$T \in l(X)$ و $\lambda \in \rho(T)$.

نظرية 9.2.2 [10]

مؤثر الحالة $R_\lambda(T)$ حيث $T \in \Im(X)$ ، $\lambda \in \rho(T)$ تكون دالة تحليلية بالأجزاء بالنسبة لـ λ و $R_{\lambda_0}(T)$ حيث λ_0 عدد مركب ثابت ، نعني بهذا أنه توجد دالة $\Phi(\eta, F)$ معرفة على مجموعة مفتوحة في فراغ الجداء $C\times l(X)$ ، وتأخذ قيمها في $l(X)$ تحقق :

1. $\Phi(\eta, F)$ تحليلية بالأجزاء بالنسبة ل η و F (بنفس المعنى في النظرية (8.2.2)).

2. إذا كان $T \in \Im(X)$ ، و $\lambda_0 \in \rho(T)$ فإن $\lambda \in \rho(T)$ إذا وفقط إذا عرف مؤثر $\Phi_{(\lambda-\lambda_0)}(R_{\lambda_0}(T))$ بحيث يكون :

$$R_\lambda(T) = \Phi_{(\lambda-\lambda_0)}(R_{\lambda_0}(T)) \qquad (2.15)$$

البرهان :

من الصيغة

$$R_{(\lambda-\lambda_0)^{-1}}(R_{\lambda_0}(T)) = -(\lambda - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)^2 R_\lambda(T) \qquad (2.16)$$

ينتج أن :

$$R_\lambda(T) = -(\lambda - \lambda_0)^{-1} - (\lambda - \lambda_0)^2 R_{(\lambda-\lambda_0)^{-1}}(R_{\lambda_0}(T)) \qquad (2.17)$$

حيث $\lambda, \lambda_0 \in \rho(T)$, $\lambda \neq \lambda_0$
نعرف دالة $\Phi(\eta, F)$ كالتالي :

$$\Phi(0, F) = F, \qquad \Phi(\eta, F) = -\eta^{-1} - \eta^{-2} R_{\eta^{-1}}(F)$$

إذا كان $\eta \neq 0$ و $\eta^{-1} \in \rho(F)$.
بهذا التعريف تكون (2.17) صحيحة عندما يكون $\lambda, \lambda_0 \in \rho(T)$.
مجموعة تعريف $\Phi(\eta, F)$ تكون هي مجموعة الأزواج (η, F) من فراغ الجداء $\mathbb{C}\times l(X)$ حيث $\eta = 0$ أو

$\eta^{-1} \in \rho(F)$.
من النظرية $(8.2.2)$ نستنتج أن الدالة $\Phi(\eta, F)$ تحليلية بالنسبة لـ η و F ، إذا كان $\eta \neq 0$ عندها يكون

$$\Phi(\eta, F) = -\eta^{-1} - \eta^{-2}(F - \eta^{-1})^{-1} = -\eta^{-1} + \eta^{-1}(1 - \eta F)^{-1}$$
$$= F(1 - \eta F)^{-1} \qquad (2.18)$$

المعادلة $\Phi(0, F) = F$ تبين أن $\Phi(\eta, F)$ تحليلية عندما $\eta = 0$.
في حالة $\lambda = \lambda_0$ واضح أن $\lambda_0 \in \rho(T)$ و $\lambda \in \rho(T)$ ، إذا وفقط إذا كان المؤثر $\Phi_{(\lambda-\lambda_0)^{-1}}(R_{\lambda_0}(T))$ معرف جيداً.
في حالة $\lambda \neq \lambda_0$ تستنتج من كون الصيغة (2.17) محققة في حالة وجود مؤثر من اليمين أو عن الشمال في الصيغة (2.17).

2.3 حالة الطيف بعد التشويش المنضبط تام :

ليكن فراغ هيلبار $L_2(-\infty, +\infty)$ نرمز له بالرمز H.

$$\Omega \overset{def}{=} \Omega_\varepsilon \overset{def}{=} \{Z : |ImZ| < \varepsilon\} \qquad (2.19)$$

تعريف 1.3.2

العنصر $\varphi \in H$ يقال أنه منضبط ،إذا وجد لدالة حقيقية $\varphi(x)$ تمديد $\varphi(z)$ على المستوي المركب وتكون تحليلية في Ω.
العنصر المنضبط $\varphi \in H$ ، يقال أنه منضبط تام إذا كان من أجل كل $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon[$:

$$\sup_{y\in[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+iy)|^2 dx < \infty \qquad (2.20)$$

الفراغ الشعاعي للعناصر المنضبطة (العناصر المنضبطة التامة) نرمز له ب Φ_0 (Φ) ، واضح $\Phi \subset \Phi_0$.
بالإضافة لفراغ هيلبار H نورد فراغ هيلبار H_1.

تعريف 2.3.2

ليكن A مؤثرا من $L(H, H_1)$ ، و α دالة حيث $E(\alpha) \subset H_1$ تحليلية في Ω و $A \sim \alpha(z)$ ، A يقال أنه :

1. منضبط حسب الصيغة الأولى إذا تحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \alpha(x) \|_{H_1}^2 dx < \infty \qquad (2.7.I)$$

2. منضبط حسب الصيغة الثانية إذا تحقق :

$$\| \alpha(x) \|_{H_1} = 0(1), \quad x \longrightarrow \mp\infty \qquad (2.7.\text{II})$$

3. منضبط تام حسب الصيغة الأولى ، إذا تحقق من أجل كل $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon[$

$$\sup_{y\in[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]} \int_{-\infty}^{+\infty} \| \alpha(x+iy) \|_{H_1}^2 \, dx < \infty \qquad (2.8.\text{I})$$

4. منضبط تام حسب الصيغة الثانية إذا تحقق :

$$\| \alpha(z) \| = 0(1), \qquad |z| \longrightarrow \infty \qquad (2.8.\text{II})$$

بإنتظام في الشريحة $|Imz| \leqslant \varepsilon_1$ ، فإن A يقال أنه منضبط تام من H في H_1 $(H \longrightarrow H_1)$.

تعريف 3.3.2

المؤثر V من $L(H,H_1)$ يقال أنه تشويش منضبط (تشويش منضبط تام)، إذا كتب من الشكل :

$$V = A^*B$$

حيث A ، B منضبط (منضبط تام) كمؤثر من $L(H,H_1)$.

نتيجة 1.3.2

حسب الصيغة الأولى من التعريف (2.3.2) ،التشويش المنضبط وأيضا التشويش المنضبط التام V يعتبر مؤثر نووي ذلك لأن المؤثر المنضبط التام هو مؤثر هيلبار شميد.
نعرف الآن مؤثر $T \in L(H)$ كالتالي :

$$T \overset{def}{=} S + V, \quad D(T) \overset{def}{=} D(S) \qquad (2.21)$$

حيث V تشويش منضط تام ، و S مؤثر الجداء في المتغير المستقل في H: أي :

$$D(S) \overset{def}{=} \{f \in H : Sf(x) = xf(x), \int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|^2 dx < \infty\}, \quad f \in D(S) \qquad (2.22)$$

نعتبر الآن أن فراغ العناصر المنضبطة التامة هو فراغ هيلبار قابل للفصل ، ونضيمه المشارك لجدائه السلمي يعرف كالتالي :

$$\| \varphi \|_y \overset{def}{=} \{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [|\varphi(x+iy)|^2 + |\varphi(x-iy)|^2] dx\}^{\frac{1}{2}}, \qquad y \in [0, \varepsilon[\qquad (2.23)$$

نرمز بالرمز Φ^* لفراغ الأشكال متعددة الخطية والمستمرة المعرفة على Φ ، والرمز $<\varphi^*,\varphi>$ ، يرمز لقيمة الشكل φ^* في النقطة φ من Φ ،عندها يكون من أجل كل $\varphi^* \in \Phi^*$ يوجد $y \in [0,\varepsilon[$ حيث :

$$\| \varphi^* \|_{-y} \overset{def}{=} \sup_{0\neq\varphi\in\Phi} \frac{\|<\varphi^*,\varphi>\|}{\| \varphi \|_y} < \infty \tag{2.24}$$

لاحظ أن :

$$\Phi \subset H \subset \Phi^* \tag{2.25}$$

الثنائية $<,>$ الفراغات Φ و Φ^* تعتبر تمديد من Φ للجداء السلمي $<.,.>_H$ بالإظافة إلى هذا نعتبر التعريف

$$\overline{<\varphi^*,\varphi>} = <\varphi,\varphi^*>, \quad \varphi \in \Phi, \quad \varphi^* \in \Phi^*$$

إختصارا نضع $T_\xi = (T-\xi I)^{-1}$

$$\Pi_+ \overset{def}{=} \{\xi : Im\xi > 0\}, \quad \Pi_- \overset{def}{=} \{\xi : Im\xi < 0\} \tag{2.26}$$

نتيجة 2.3.2

ليكن $T = S + V$ ، حيث V تشويش منضبط تام .

1. مجموعة القيم الذاتية والقيم الشادة الطيفية للمؤثر T تكون منتهية .
2. إذا كان العدد غير الحقيقي ζ لا يعتبر قيمة ذاتية للمؤثر T فإن ζ ينتمي إلى مجموعة الحالة لهذا المؤثر.
3. إذا كان العدد الحقيقي ξ لا يعتبر قيمة شادة طيفية للمؤثر T ، فإن ξ تنتمي إلى الطيف المستمر لهذا المؤثر.
4. من أجل أن يكون العدد الحقيقي μ قيمة ذاتية للمؤثر T يلزم (لكن غير كاف) ، أن يكون μ قيمة شادة طيفية لهذا المؤثر .

نتيجة 3.3.2

من تعريف مسقط ريس نستنتج أنه : من أجل كل قيمة ذاتية غير حقيقية λ للمؤثر T نضع :

$$P_\lambda \overset{def}{=} \frac{-1}{2\pi i} \oint T_\zeta d\zeta = -Res\zeta = \lambda T_\zeta \tag{2.27}$$

حيث منحني التكامل(منحني مغلق) ، لا يحوي نقط شادة لمؤثر الحالة $R_\zeta(T)$ تختلف عن λ ، وهو مؤثر إسقاط على الفراغ الجذري

$$M_\lambda \overset{def}{=} \bigcup_{k\geqslant 1} \ker((T-\lambda I)^k)$$

نتيجة 4.3.2

من أجل كل نقطة شادة طيفية μ للمؤثر T ، بوضع :

$$P_{\mu^{\mp}} \overset{def}{=} \frac{-1}{2\pi i}\oint T_{\zeta}^{\mp} d\zeta = -Res\zeta = \mu T_{\zeta}^{\mp} \tag{2.28}$$

يكون $P_{\mu}^{\mp} \in l(\Phi, \Phi^{*})$ ، في الحالة العامة $P_{\mu}^{\mp}$ ليس إسقاط .

قضية 1.3.2 [12]

إذا كانت $\tilde{\Phi}$ مجموعة جزئية من H معرفة كالتالي :

$$\tilde{\Phi} = \{\varphi \in H / \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\, \mathrm{e}^{-yt}\,|^{2} dt < \infty, y \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$$

فإن مؤثر فوري -بلانشيرل $\mathscr{F}$ أي :

$$\mathscr{F} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx, \quad f \in H \tag{2.29}$$

يكون تقابلا من Φ على $\tilde{\Phi}$ عندها يكون :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+iy)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, dx = \mathrm{e}^{-y\xi}\, \mathscr{F}\varphi(\xi), \quad \varphi \in \Phi, \quad y \in [-\varepsilon, \varepsilon] \tag{2.30}$$

و من أجل كل $\varphi \in \Phi$ و $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon)$ يكون

$$\varphi(x+iy) \underset{x \to \mp\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.31}$$

بإنتظام بالنسبة $y \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$

في الحالة الخاصة يكون :

$$\sup_{|Imz| < \varepsilon_1} |\varphi(z)| < \infty, \quad \varphi \in \Phi, \quad \varepsilon_1 \in [0, \varepsilon[\tag{2.32}$$

تعريف 4.3.2

نرمز بالرمز $(\Phi_{-\eta}^{*})$ إلى صنف الدوال المركبة $z \longrightarrow \varphi^{*}(z)$ ، هولومورفية عندما $|Imz| > \eta$ وتحقق الشرط :

$$\sup_{|y| > \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{*}(x+iy)|^{2} dx < \infty$$

من أجل كل دالة $\varphi^{*} \in (\Phi_{-\eta}^{*})$ تقريبا في كل مكان ، و من أجل $x \in]-\infty, +\infty[$ توجد القيم $\varphi^{*}(x \mp i\eta)$ عندها العلاقة (2.30) تكون محققة من أجل $y = \mp\eta$، عندها يكون :

$$|\varphi^{*}(z)| \longrightarrow 0, \quad |z| \longrightarrow 0$$

بإنتظام في النطاق $|Imz| > \eta$.

تعريف 5.3.2

من أجل $\varphi \in \Phi$ كيفي و $\varphi^* \in (\Phi^*_{-\eta})$ ، نضع :

$$< \varphi^*, \varphi > \stackrel{def}{=} \oint\limits^{\gamma} \varphi^*(z)\overline{\varphi(\overline{z})}dz$$

حيث

$$\oint\limits^{\gamma} \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty-i\gamma}^{+\infty-i\gamma} - \int\limits_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma}$$

γ- كيفي من $]\eta, \varepsilon[$.

العبارة الأخيرة تعرف عنصر $\varphi^* \in \Phi^*$ إختصارا نكتب

$$\varphi^* \sim \varphi^*(z)$$

يسمى عنصر معمم.

حيث أنه من أجل كل عنصر معمم توجد دالة وحيدة ممثلة معدومة .

2.3.1 تمديد المؤثر S على كل Φ^* :

تعريف 6.3.2

نضع :

$$D(S|\Phi) \stackrel{def}{=} \{\varphi : \varphi \in D(S) \cap \Phi, S\varphi \in \Phi\} \tag{2.33}$$

نرمز بالرمز $D(S|\Phi^*)$ لمجموعة العناصر $\varphi^* \in \Phi^*$ التي من أجلها يوجد $\psi^* \in \Phi^*$ وتحقق :

$$(\psi^*, \varphi) = (\varphi^*, S\varphi), \quad \varphi \in D(S|\Phi) \tag{2.34}$$

من أجل كل φ معطى من Φ^* ، العلاقة (2.34) تعرف بشكل وحيد ψ^* كالتالي $S\varphi^* = \psi^*$، عندها يكون

$$(S\varphi^*, \varphi) = (\varphi^*, S\varphi), \quad \varphi \in D(S|\Phi), \quad \varphi^* \in D(S|\Phi^*) \tag{2.35}$$

قضية 2.3.2 [12]

ليكن $\varphi^* \in \Phi^*$ و $\varphi^* \sim \varphi^*(z)$ يكون $\varphi^* \in D(S|\Phi^*)$ ، إذا وفقط إذا وجدت النهاية :

$$l(\varphi^*) \stackrel{def}{=} \lim_{z \longrightarrow +\infty} z\varphi^*(z) \tag{2.36}$$

والدالة

$$z \longrightarrow k\varphi^*(z) \stackrel{def}{=} z\varphi^*()z - l(\varphi^*) \quad (2.37)$$

تنتمي إلى صنف من الأصناف $(\Phi^*_{-\eta})$ ، $\eta \in [0, \varepsilon[$
عندها يكون

$$S\varphi^* \sim k\varphi^*(z) \quad (2.38)$$

2.3.2 العناصر الذاتية المعممة للمؤثر S :

قضية 3.3.2 [12]
نضع $u^* \in D(S|\Phi)$ و المعادلة

$$(S-\zeta)u^* = 0, \quad u^* \in D(S|\Phi) \quad (2.39)$$

في حالة $|Im\zeta| \geqslant \varepsilon$ ، تقبل الحل الواضح $u^* = 0$.
في حالة $|Im\zeta| < \varepsilon$ (أي $\zeta \in \Omega$) ، يكون $u^* = C\delta^*_\zeta$ والعكس

$$\zeta \in \Omega \Longrightarrow S\delta^*_\zeta = \zeta\delta^*_\zeta, \quad \delta^*_\zeta \in D(S|\Phi)$$

قضية 4.3.2 [12]
من أجل j عدد طبيعي كيفي ، ومن أجل كل $\varphi, \psi \in \Phi_0$ (أنظر التعريف (1.3.2)) الدالة $\zeta \longrightarrow (S^i_\zeta\varphi, \psi)$ تملك تمديد تحليلي :

$$(\zeta \longrightarrow (S^i_\zeta\varphi, \psi)_+, \quad \zeta \longrightarrow (S^i_\zeta\varphi, \psi)_-), \quad \zeta \in \Pi_+(\zeta \in \Pi_-)$$

على $\Pi \cup \Pi_+(\Pi_- \cup \Omega)$ عندها يكون :

$$(S_\zeta\varphi, \psi)_+ - (S_\zeta\varphi, \psi)_- = 2\pi i\varphi(\zeta)\overline{\psi(\overline{\zeta})}, \quad \zeta \in \Omega \quad (2.40)$$

البرهان :

نضع :

$$(S^i_\zeta\varphi, \psi)_\mp \stackrel{def}{=} \int\limits_{\Gamma^\mp_\xi} \frac{\varphi(z)\overline{\psi(\overline{\zeta})}}{(z-\zeta)^i}dz; \quad (2.41)$$

حيث منحني التكامل $\Gamma_\zeta^-(\Gamma_\zeta^+)$ يمر على طول المحور x بإستثناء النقط $x = Re\zeta$ ويحيط على النقط $z = \zeta$ من أسفل (أعلى) ولا يخرج من النطاق Ω .
واضح أن (2.41) تعرف متطلبات التمديد التحليلي ، من (2.41) والصيغة التكاملية لكوشي نستنتج الصيغة (2.40) .

قضية 5.3.2

ليكن A مؤثراً خطياً مستمراً من $L(H, H_1)$ (H_1 هيلبار أيضا) .

1. إذا كان $E(A^*) \subset \Phi_0$ ، فإنه توجد دالة مركبة $\alpha(\alpha(z))$ من H_1 تحليلية في Ω ، وتحقق :

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\alpha(x)dx, \quad f \in H \tag{2.42}$$

أو نكتب إختصارا

$$A \sim \alpha(z) \tag{2.43}$$

حيث التكامل متقارب وفق التبولوجيا الضعيفة في الفراغ H_1 .

2. إذا كان :

$$E(A^*) \subset \Phi \tag{2.3a}$$

فإنه من أجل كل $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon[$ ، يتحقق :

$$\sup_{|Imz| \leqslant \varepsilon_1} \parallel \alpha(z) \parallel_{H_1} < \infty \tag{2.44}$$

عندها يوجد عدد نرمز له ب $|A|_{\varepsilon_1}$ بحيث من أجل كل $d \in H_1$ يكون :

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |A^* d(x+iy)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant |A|_{\varepsilon_1} \parallel d \parallel_{H_1}, \quad y \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \tag{2.5a}$$

البرهان :

من أجل $\varphi \in \Phi_0$ ، ومن (2.40) و (2.41) يكون :

$$(AS_\zeta\varphi_+ - AS_\zeta\varphi_-, d) = 2\pi i\varphi(\zeta)\overline{A^*d(\overline{\zeta})}, \quad d \in H_1, \quad \zeta \in \Omega$$

ومنه بوضع

$$\alpha(\zeta) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi i\varphi(\zeta)}\{AS_\zeta\varphi_+ - AS_\zeta\varphi_-\}, \quad \zeta \in \Omega \tag{2.45}$$

نجد أن $\alpha(\zeta)$ غير متعلق بـ φ و

$$A^*d(\zeta) \stackrel{def}{=} (d, \alpha(\overline{\zeta}))_{H_1}, \quad d \in H_1, \quad \zeta \in \Omega \tag{2.46}$$

ومنه نستنتج (2.42) .

العلاقة (2.44) تستنتج من $(a3.2)$ و (2.32) وذلك بإعتبار نظرية بناخ شتاينهوس .

أيضا بإعتبار نظرية بناخ شتاينهوس من $(2.a3)$ و (2.20) نستنتج وجود العدد $|A|_{\varepsilon_1}$ الذي من أجله تكون الصيغة $(a5.2)$ محققة .

قضية 6.3.2

من أجل كل مؤثر منضبط تام $A \in L(H, H_1)$ ، توجد متتالية مؤثرات منضبطة تامة ومنتهية البعد $A_n : L(H.H_1)$ ، $A_n \sim \alpha_n(z)$ ($n \geqslant 1$) ، بحيث من أجل $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon[$ في حالة الصيغة الأولى من التعريف $(2.3.2)$ يكون :

$$\sup_{y\in[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]} \int_{-\infty}^{+\infty} \| \alpha(x+iy) - \alpha_n(x+iy) \|_{H_1}^2 \, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.47}$$

وفي حالة الصيغة الثانية من التعريف $(2.3.2)$:

$$\sup_{|Imz|\leqslant\varepsilon_1} \| \alpha(z) - \alpha_n(z) \|_{H_1}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.48}$$

البرهان :

لتكن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ جملة متعامدة ومتجانسة تامة في H_1 ، و $\alpha_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(z) e_k$ حيث :

$\alpha_k(z) = (\alpha(z), e_k)_{H_1}$ بما أن $\alpha_k \in \Phi$ فإن المؤثر $A_n \sim \alpha_n(z)$ يعتبر مؤثر منضبط تام .

عندها يكون $\| \alpha(z) \|_{H_1}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k(z)|^2$ ومنه في حالة الصيغة الثانية من التعريف $(2.3.2)$ ، مطلوب القضية يستنتج من $(II.7.2)$ ونظرية ديني .

في حالة الصيغة الأولى من التعريف $(2.3.2)$ ، وبإعتبار (2.23) يكون :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \alpha(x+iy) - \alpha_n(x+iy) \|_{H_1}^2 \, dx \leqslant 2 \sum_{v>n} \| \alpha_v \|_{|y|}^2, \tag{2.49}$$

ومنه مطلوب القضية يستنتج من كون النظيم $\| \cdot \|_{|y|}$ يبقى معرف في حالة تزايد $|y|$.

ملاحظة 1.3.2

إذا كان $\varphi, \psi \in \Phi$ فإن حسب (2.31)

$$(S_\zeta^i \varphi, \psi)_\mp \stackrel{def}{=} \int_{-\infty\mp i\gamma}^{+\infty\mp i\gamma} \frac{\varphi(z)\overline{\psi(\overline{z})}}{(z-\zeta)^i} dz, \tag{2.50}$$

حيث $-\gamma < Im\zeta$ من أجل $(S_\zeta^i\varphi,\psi)_+$ ، و $+\gamma > Im\zeta$ من أجل $(S_\zeta^i\varphi,\psi)_-$.
من (2.50) و بإعتبار متراجحة بونياكوسكي من أجل كل $\varphi \in \Phi$ المتطابقة :

$$((S_\zeta^{\mp})^j\varphi,\psi) \overset{def}{=} (S_\zeta^j\varphi,\psi)_{\mp}, \quad \psi \in \Phi \tag{2.51}$$

عندنا $\zeta \in \Pi_+ \cup \Omega$ تعرف بشكل خطي $(S_\zeta^+)^j\varphi \in \Phi^*$ ، وعندما $\zeta \in \Pi_- \cup \Omega$ شكل خطي $(S_\zeta^-)^j\varphi \in \Phi^*$
عندها يكون :

$$\| (S_\zeta^{\mp}\varphi,\psi) \| \leqslant \frac{2}{|Im\zeta - \gamma|} \| \varphi \|_\gamma \| \psi \|_\gamma \tag{2.52}$$

حيث $\gamma \in [0,\varepsilon[$ و $Im\zeta > -\gamma$ من أجل S_ζ^+ ، و $Im\zeta < +\gamma$ من أجل S_ζ^- .
من الصيغة

$$f \sim \frac{-1}{2\pi i}\mathcal{S}f(z), \quad f \in H/ \quad \mathcal{S}f(z) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{2.53}$$

نستنتج ان :

$$S_\zeta^{\mp}\varphi \sim \frac{-1}{2\pi i}(z-\zeta)^{-1}[\mathcal{S}\varphi(z) - \mathcal{S}\varphi(\zeta)]; \tag{2.54}$$

و $S_\zeta^{\mp}\varphi \in D(S|\Phi^*)$ و

$$(S-\zeta)S_\zeta^{\mp}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in \Phi \tag{2.55}$$

والعكس

$$\varphi \in D(S|\Phi) \Longrightarrow S_\zeta^{\mp}(S-\zeta) = \varphi \tag{2.56}$$

قضية 7.3.2

إذا كانت $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ فإن الدالة $\zeta \longrightarrow \mathcal{S}f(\zeta)$ (حيث $\mathcal{S}f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$) ، تكون هولومورفية عندما $Im\zeta \neq 0$ ومن أجل كل $\eta > 0$ يكون :

$$\mathcal{S}f(\zeta) = 0(1), \quad |\zeta| \longrightarrow +\infty \tag{2.57}$$

بإنتظام على النطاق $|Im\zeta| \geqslant \eta$.

البرهان :

عندما $|Im\zeta| \geqslant \eta$ و$Imx = 0$ يكون $|x-\zeta|^{-1} \leqslant \eta^{-1}$ وعليه نجد :

$$|\mathcal{S}f(\zeta)| \leqslant \zeta^{-1} \int_{|x|>|\frac{\xi}{2}|} f(x)dx + \frac{2}{|\zeta|} \int_{|x|<|\frac{\xi}{2}|} f(x)dx \tag{2.58}$$

قضية 8.3.2

نضع :

$$\int_{\mp} \frac{f(x)}{(x-\xi)^v}dx \overset{def}{=} \lim_{\mu\longrightarrow\mp 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{[x-(\xi+i\eta)]^v}dx \tag{2.59}$$

من أجل كل f ، v و ξ التي من أجلها النهاية في الطرف الأيمن موجودة

• إذا كانت الدالة $x\longrightarrow (x-\xi)^{-v}f(x)$ قابلة للقياس على $(-\infty,+\infty)$ فإن النهاية (2.59) موجودة و عندها يكون :

$$\int_{\mp} \frac{f(x)}{(x-\xi)^v}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-\xi)^v}dx \tag{2.60}$$

البرهان :

يستنتج من كون الكسر $[\frac{x-\xi}{x-(\xi+i\eta)}]^j$ محدود ويؤول إلى الواحد عندما $\eta\longrightarrow 0$.

2.4 طيف المؤثر :

ليكن T المعرف بالصيغة $T=S+V$ ، حيث S مؤثر المتغير المستقل و $V=A^*B$.

لدراسة الوضعية الطيفية للمؤثر T ندرس المعادلة :

$$(T-\zeta)u=f, \quad Im\zeta\neq 0 \tag{2.61}$$

حيث $A,B\in l(H,H_1)$.

إذا كان $u\in D(S)$ حل للمعادلة (2.61) فإنه بوضع $d\overset{def}{=}Bu$ يكون

$$K(\zeta)d=BS_\zeta f \tag{2.62}$$

حيث $S_\zeta \overset{def}{=} (S-\zeta I)^{-1}$ ، $K(\zeta)\overset{def}{=}1+BS_\zeta A^*$ عندها يكون :

$$u=S_\zeta(f-A^*d) \tag{2.63}$$

والعكس إذا كان $d\in H$ يحقق المعادلة (2.62) ، و $u=S_\zeta(f-A^*d)$ فإن $u\in D(S)$ ، حيث $Bu=d$ يكون حلاً للمعادلة (2.61) .

قضية 1.4.2

من أجل بعض النقط ξ غير حقيقية ، $K(\xi)^{-1} \in l(H, H_1)$ فإن $\xi \in \rho(T)$ عندها يكون :

$$T_\zeta \stackrel{def}{=} (T-\zeta)^{-1} = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \quad (2.64)$$

$$\sigma(T) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} / |Im\zeta| \leqslant \| V \|\}$$

البرهان :

بحساب d من (2.62) ونعوضه في الصيغة (2.63) نستنتج الصيغة (2.64) .
بوضع $H_1 = H$ ، $A^* = 1$ ، $B = V$ يكون $K(\xi) = 1 + S_\xi V$ وبماأن :

$$\| S_\zeta \| = \frac{1}{dist(\zeta, \sigma(T))} = \frac{1}{|Im\zeta|} = |Im\zeta|^{-1}$$

فإن $\| K(\zeta) - 1 \| \leqslant \| V \| \, |Im\zeta|^{-1}$ ، وعليه إذا كان $|Im\zeta| > \| V \|$ فإن $\| K(\zeta) - 1 \| < 1$ ومنه يكون $K(\zeta)$ قابل للقلب بإستمرار ، وبالتالي حسب الصيغة (2.64) أيضا T قابل للقلب بإستمرار أي أن $\lambda \in \rho(T)$.
حالة $|Im\zeta| > \| V \|$ وبالتالي يكون :

$$\sigma(T) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} / |Im\zeta| \leqslant \| V \|\}$$

قضية 2.4.2

1. إذا كان A ، B من $l_\infty(H, H_1)$ فإنه من أجل كل $\delta > 0$ يكون :

$$\| K(\zeta) - 1 \| = 0(1), \quad |\zeta| \longrightarrow \infty \quad (2.65)$$

بإنتظام في النطاق $|Im\zeta| \geqslant \delta$.

2. إذا كان A ، B مؤثرات من $L(H, H_1)$ منضبطة (أنظر التعريف (2.3.2)) ، فإن الدالة $\zeta \longrightarrow K(\zeta)$ تملك تمديد $\zeta \longrightarrow K_+(\zeta) (\zeta \longrightarrow K_-(\zeta))$ من نصف المستوي $\Pi_+ (\Pi_-)$ هولومورفية في نصف المستوي $\Pi_+ \cup \Omega (\Pi_- \cup \Omega)$ ، عندها في حالة الصيغةالأولى من التعريف (2.3.2) المؤثر $-1 - K_\mp(\zeta)$ يكون مؤثراً نووياً.
و في حالة الصيغة الثانية من التعريف (2.3.2) هذا المؤثر يكون هيلبرت شميدت .

3. إذا كان A ، B مؤثرات من $L(H, H_1)$ منضبطة تامة ، فإن من أجل كل $\varepsilon > \delta$ يكون :

$$\| K_+(\zeta) - 1 \| = 0(1) \ \ (\| K_-(\zeta) - 1 \| = 0(1)), \quad |\zeta| \longrightarrow +\infty \quad (2.66)$$

بإنتظام في النطاق $Im\zeta \geqslant -\delta (Im\zeta \leqslant +\delta)$.

البرهان:

1. بما أن $K(\zeta)-1=BS_{\zeta}A^{*}$ فإن من أجل $d,k\in H_1$ يكون $([K(\zeta)-1]d,k)=\mathcal{S}f(\zeta)$ حيث $f(x)\overset{def}{=}A^{*}d(x)B^{*}k(x)$ ، ومنه من القضية (7.3.2) نستنتج أن $([K(\zeta)-1]d,k)=0(1)$ عندما $|\zeta|\longrightarrow+\infty$ بإنتظام في النطاق $|Im\zeta|\geqslant\delta$ ، $\delta>0$ ومنه ينتج $\parallel K(\zeta)-1\parallel=0(1),\quad|\zeta|\longrightarrow+\infty$ بإنتظام في النطاق $|Im\zeta|\geqslant\delta$.
الحالة العامة تؤول إلى حالة $\dim H_1<\infty$ تقرب (بالنظيم) المؤثرات المستمرة تامة ، ذلك لأن المؤثرات المتراصة A ، B هي عبارة عن نهاية منتظمة لمتتالية مؤثرات منتهية (أنظر القضية (1.4.1) في الفصل الأول) .

2. إذا كانت المؤثرات A ، B منضبطة فإن $E(A^{*})\subset\Phi_0$ ، $E(B^{*})\subset\Phi_0$ والصيغة

$$(K_{\mp}d,k)\overset{def}{=}(d,k)+(S_{\zeta}A^{*}d,B^{*}k)_{\mp},\quad d,k\in H_1\qquad(2.67)$$

تعرف التمديد التحليلي المرفق بهما .
المؤثر $K_{\mp}(\zeta)-1$ يعتبر المؤثر النووي الملائم أو هيلبرت-شميد عندما $\zeta\in\Pi_{\mp}\cup\Omega$ ، ذلك لأن هذه الخصائص يحققها المؤثر $K(\zeta)-1$ ، $Im\zeta\neq0$ ذلك لأن الصيغة الأولى من التعريف (2.3.2) من (2.7.I) نستنتج أن A ، B مؤثرات هيلبرت -شميدت وعليه $BS_{\zeta}A^{*}$ يعتبر مؤثر نووي .
في حالة الصيغة الثانية من التعريف (2.3.2) ، و من الصيغة

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\frac{\alpha(x)}{x-\zeta}\right\|_{H_1}^{2}dx\leqslant\sup_{x}\parallel\alpha(x)\parallel_{H_1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-\zeta|^{2}}<+\infty$$

نستنتج أن AS_{ζ}- مؤثر هيلبرت شميدت وعليه $BS_{\zeta}A^{*}$ يكون أيضا مؤثر هيلبرت شميدت .

3. ليكن A ، B مؤثرات مستمرة تامة .
من أجل $d,k\in H_1$ و بإعتبار (2.50) و (2.67) يكون :

$$([K_{+}(\zeta)-1]d,k)=\int_{-\infty-i\gamma}^{+\infty-i\gamma}\frac{(d,\widetilde{\alpha}(z))\overline{(k,\beta(z))}}{z-\zeta}dz,$$

حيث $Im\zeta>-\gamma>-\varepsilon$ ومنه من أجل $Im\zeta+\gamma\geqslant\eta>0$ يكون

$$|([K_{+}(\zeta)-1]d,k)|\leqslant\parallel d\parallel.\parallel k\parallel\{\eta^{-1}\int_{|x|>|\frac{\zeta+i\gamma}{2}|}\parallel\alpha(x+i\gamma)\parallel.\parallel\beta(x-i\gamma)\parallel dx$$

$$+\frac{2}{|\zeta+i\gamma|}\int_{-\infty}^{+\infty}\parallel\alpha(x+i\gamma)\parallel.\parallel\beta(x-i\gamma)\parallel dx\}$$

قضية 3.4.2

1. إذا كان التشويش V متراص ، فإنه من أجل كل $\delta > 0$ طيف المؤثر $T = S + V$ في النطاق $|Im\zeta| \geqslant \delta$ يتكون من عدد منته من القيم الذاتية كل منهما تنتج فراغاً جذرياً منتهياً .

2. إذا كان التشويش V منضبط فإن الطيف $(\lambda \in \sigma(T), \lambda \notin \mathbb{R})$ للمؤثر T لا يملك نقط نهاية منتهية .

3. إذا كان التشويش V منضبط تام فإن الطيف $(\lambda \in \sigma(T), \lambda \notin \mathbb{R})$ للمؤثر T يعتبر مجموعة منتهية

البرهان:

ليكن V متراصاً ، بوضع $H = H_1$ ، $A^* = V_0(V^*V)^{\frac{1}{4}}$ و $B = (V^*V)^{\frac{1}{4}}$ ، حيث V_0 تقايس جزئي يحقق $V = V_0(V^*V)^{\frac{1}{2}}$ يكون $V = A^*B$ والمؤثرات A ، B مؤثرات متراصة .
بإستخدام الإثبات 1 من القضية (2.4.2) من أجل كل ξ كبير ، يكون المؤثر $K(\zeta)$ قابل للقلب بإستمرار وعليه حسب نظرية دالة المؤثر الهولومورفية (النظرية (1.11.1)) تكون النقط الشادة للدالة $\zeta \longrightarrow K(\zeta)^{-1}$ في النطاق $Im\zeta \neq 0$ نقط معزولة .
من (2.66) ينتج أن القيم الشادة للدوال $\zeta \longrightarrow K(\zeta)^{-1}$ و $\zeta \longrightarrow T_\zeta$ متطابقة في النطاق $Im\zeta \neq 0$.
ليكن P_λ إسقاط ريس المرفق بالقيمة الشادة λ(أنظر (2.27)) حسب (2.64) يكون

$$P_\lambda = \frac{-1}{2\pi i}\oint T_\zeta d\zeta = -Res\zeta = \lambda T_\zeta$$

أي

$$P_\lambda = -Res\zeta = -\lambda S_\zeta + S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta$$

وبما أن حسب نظرية كوشي

$$-ResS_\zeta = \frac{-1}{2\pi i}\oint S_\zeta d\zeta = 0$$

فإن

$$P_\lambda = Res\zeta = \lambda S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \tag{2.68}$$

ومنه يكون P_λ متراص ،أي الفراغ الجذري المرفق بـ λ بعده منته .

الإثبات 2 و 3 يستنتج من مبدأ الأقطاب المعزولة والإثبات 2 و 3 من القضية (2.4.2) .

2.4.1 الطيف الحقيقي للمؤثر T :

نعتبر في كل مايلي التشويش V منضبط تام إلا إذا أشير عكس ذلك .

تعريف 1.4.2

ليكن A من $L(H, H_1)$ منضبط تام ، من أجل كل $\varphi^* \in \Phi^*$ و $d \in H_1$ نضع

$$(A\varphi^*, d) \stackrel{def}{=} (\varphi^*, A^*d) \tag{2.69}$$

ملاحظة 1.4.2

الصيغة (2.69) تعرف تمديد المؤثر A المنضبط تام إلى مؤثر خطي مستمر على Φ^* مستمر ، بالمعنى أن (أنظر (2.24)). نعني بالإستمرار وجود ثابت C_η يحقق :

$$\| A^*\varphi^* \|_{H_1} \leqslant C_\eta \| \varphi^* \|_{-\eta}, \quad \eta \in [0, \varepsilon[\tag{2.70}$$

حيث C_η عدد موجب .

ذلك لأن حسب $(5a.2)$ يكون :

$$\| A^*C \|_\eta \leqslant |A|_\eta \| d \|_{H_1}, \quad d \in H_1, \quad \eta \in [0, \varepsilon[\tag{2.71}$$

ملاحظة 2.4.2

بواسطة التعريف (2.3.2) التشويش المنضبط تام V ، يمدد إلى رمز خطي مستمر على Φ^* أي يوجد $C_\eta > 0$ يحقق:

$$\| V\varphi^* \|_H \leqslant C_\eta \| \varphi^* \|_{-\eta}, \quad \eta \in [0, \varepsilon[\tag{2.72}$$

هذا التمديد يعرف كترتيب A^*B حيث $B : \Phi^* \longrightarrow H_1$ و $A^* : H_1 \longrightarrow H$.

تعريف 2.4.2

المؤثر T الممدد على الفراغ Φ^* ، حيث $D(T) = (D(S|\Phi^*))$ نعرفه بشكل مجموع مؤثرين S و V ممدين على هذا الفراغ (أنظر التعريف (6.3.2) و و (1.4.2)).

نتيجة 1.4.2

الشكل الدالي $\varphi^* \in \Phi^*$ يكون من $D(S|\Phi^*)$ إذا وفقط إذا وجد $\psi^* \in \Phi^*$ ، يحقق : $(\varphi^*, T^*\varphi) = (\psi^*, \varphi)$ من أجل كل $\varphi \in D(S|\Phi)$ (حسب التعريف (6.3.2) و (2.67)) و

$$(T\varphi^*, \varphi) = (\varphi^*, T^*\varphi), \quad \varphi^* \in D(S|\varPhi^*), \quad \varphi \in D(S|\Phi) \tag{2.73}$$

2.4.2 العناصر الذاتية لتمديد المؤثر T:

قضية 4.4.2

لتكن $\zeta \in \Omega$ ، نفرض وجود المؤثرات $K_+(\zeta)^{-1}$ ، $(K_-(\zeta)^{-1})$.
إذا كان

$$(T-\zeta)u^* = 0, \quad u^* \in D(S|\Phi^*) \tag{2.74}$$

فإن : $(u^* = C^- a_{\zeta^-})$ $\quad u^* = C^+ a_{\zeta^+}$ حيث :

$$a_\zeta^\mp \overset{def}{=} \delta_\zeta^* - S_\zeta^\mp A^* K_\mp(\zeta)^{-1}\beta(\zeta) \tag{2.75}$$

والعكس $a_\zeta^\mp$ المعرف بالصيغة (2.75) يحقق (2.74) .

البرهان :

بما أن المعادلة (2.74) تكافئ المعادلة : $(S-\zeta)u^* + A^*d = 0$ (أنظر القضية $(3.3.2)$ من نفس الفصل) حيث $d \overset{def}{=} Bu^*$ حسب القضية $(3.3.2)$ و الصيغة (2.55) الحل العام لهذه المعادلة يكتب من الشكل :

$$u^* = C^\mp \delta_\zeta^* - S_\zeta^\mp A^* d. \tag{2.76}$$

نركب لطرفي (2.76) المؤثر B وبإعتبار $1 + BS_\zeta^\mp A^* = K_\mp(\zeta)$ يكون $K_\mp(\zeta)d = C^\mp B\delta_\zeta^*$.
نحسب d ونعوضه في (2.76) نحصل على $u^* = C^\mp a_\zeta^\mp$ حيث :

$$a_\zeta^\mp = (1 - S_\zeta^\mp A^* K_\mp(\zeta)^{-1} B)\delta_\zeta^* \tag{2.77}$$

بوضع :

$$\delta_\zeta^*(z) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta}$$

وبما أن $\delta_\zeta^*(z) \sim \delta_\zeta^*$ و $\delta_\zeta^* \in (\Phi_{-\eta}^*)$ ، فإن :

$$(\delta_\zeta^*, \varphi) \overset{def}{=} \oint^\gamma \delta_\zeta^*(z)\overline{\varphi(\overline{z})}dz$$

أي :

$$(\delta_\zeta^*, \varphi) = \overline{\varphi(\overline{z})}$$

من جهة ثانية عندنا :

$$(A\varphi^*, d) \overset{def}{=} (\varphi^*, A^*d)$$

وبما أن : $A^*d(\zeta)=(d,\alpha(\bar{\zeta}))$, $B^*d(\zeta)=(d,\beta(\bar{\zeta}))$ (أنظر (2.46)) ، وحسب (2.46) و (2.69) فإن :

$$A\delta_\zeta^*=\alpha(\zeta),\quad B\delta_\zeta^*=\beta(\zeta) \tag{2.78}$$

وعليه من أجل $a_\zeta^\mp$ وبإعتبار (2.77) تكون الصيغة (2.75) محققة .
بحساب مباشر نتأكد أن العكس صحيح (مباشرة من القضية (3.3.2)) .

نتيجة 2.4.2

من أجل $|Im\zeta|\geqslant\varepsilon$ يكون $E(S_\zeta A^*)\subset\Phi$ ، ومنه نستنتج $S_\zeta^\mp A^*K_\mp(\zeta)^{-1}B\neq 1$ من أجل $\zeta\in\Omega$ و عليه بإعتبار (2.77) ، نستنتج من أجل كل $\zeta\in\Omega$ الذي من أجله يوجد $K_+(\zeta)^{-1}(K_-(\zeta)^{-1})$ يكون :

$$a_\zeta^+\neq 0\quad (a_\zeta^-\neq 0) \tag{2.79}$$

وعليه يكون $\zeta\in\Omega$ الذي من أجله يوجد $K_+(\zeta)^{-1}$ أو $K_-(\zeta)^{-1}$ يكون قيمة ذاتية لتمديد T اعلى Φ^* ، و في النطاق $|Im\zeta|\geqslant\varepsilon$ القيم الذاتية والفراغات الجذرية لتمديديهم نفسهم للمؤثر T.

نتيجة 3.4.2

إذا كان $\zeta\in\Omega$ حيث $K_+(\zeta)^{-1}$ و $K_-(\zeta)^{-1}$ موجودان ، فإنه يوجد a_ζ^+ و a_ζ^- ، حسب القضية (4.4.2) هذه الداليات حتما تكون مرتبطة خطيا لإيجاد نسبة الترابط بينهما نضع:

$$q_\mp(\zeta)\overset{def}{=}(K_\mp(\zeta)^{-1}\beta(\zeta),a(\bar{\zeta}))_{H_1} \tag{2.80}$$

ونبرهن أن :

$$q_-(\zeta)-q_+(\zeta)=2\pi iq_+(\zeta)q_-(\zeta) \tag{2.81}$$

$$a_\zeta^+=[1-2\pi iq_+(\zeta)]a_\zeta^-,\quad a_\zeta^-=[1+2\pi iq_-(\zeta)]a_\zeta^+ \tag{2.82}$$

$$q_-(\zeta)a_\zeta^+=q_+(\zeta)a_\zeta^- \tag{2.83}$$

بإعتبار (2.40) و (2.67) يكون :

$$([K_+(\zeta)-K_-(\zeta)]d,k)=2\pi iA^*d(\zeta)\overline{B^*k(\bar{\zeta})} \tag{2.84}$$

أو الشئ نفسه

$$K_+(\zeta) - K_-(\zeta) = 2\pi i(., a(\overline{\zeta}))_{H_1}\beta(\zeta), \quad \zeta \in \Omega \tag{2.85}$$

حسب (2.80) و (2.85) يكون

$$[K_+(\zeta) - K_-(\zeta)]K_{\mp}(\zeta)^{-1}\beta(\zeta) = 2\pi i q_{\mp}(\zeta)\beta(\zeta)$$

نركب لطرفي هذه المعادلة $K_{\mp}(\zeta)^{-1}$ فنجدأن

$$[K_-(\zeta)^{-1} - K_+(\zeta)^{-1}]\beta(\zeta) = 2\pi i q_{\mp}(\zeta)K_{\mp}(\zeta)^{-1}\beta(\zeta) \tag{2.86}$$

نضرب طرفي (2.86) من اليمين بـ $\alpha(\overline{\zeta})$ نحصل إلى (2.81) .
نحسب $K_+(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)$ من (2.86) ونعوضها في (2.75) نحصل على

$$a_\zeta^+ = \delta_\zeta^* - [1 - 2\pi i q_+(\zeta)]S_\zeta^+ A^* K_-(\zeta)^{-1}\beta(\zeta) \tag{2.87}$$

بما أن حسب (2.40) يكون :

$$(S_\zeta^+ - S_\zeta^-)\varphi = 2\pi i\varphi(\zeta)\delta_\zeta^*, \quad \varphi \in \Phi, \quad \zeta \in \Omega \tag{2.88}$$

و

$$[A^* K_-(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)](\zeta) = (K_(\zeta)^{-1}\beta(\zeta), \alpha(\overline{\xi})) = q_-(\xi)$$

فإن :

$$a_\zeta^+ = \delta_\zeta^* - [1 - 2\pi i q_+(\zeta)]2\pi i q_-(\zeta)\delta_\zeta^* - [1 - 2\pi i q_+(\zeta)]S_\zeta^- A^* K_(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)$$

من هنا و بإستخدام (2.81) نحصل على (2.82) و (2.83) .

نتيجة 4.4.2

الشكل الدالي :

$$b_\zeta^{\mp} \overset{def}{=} \delta_\zeta^* - S_\zeta^{\mp} B^* K_{\mp}(\overline{\zeta})^{*^{-1}} a(\zeta) \tag{2.89}$$

يعتبر عنصر ذاتي للمؤثر T^* الممدد في Φ^* ، ويحقق المتطابقة :

$$b_\zeta^- = [1 - 2\pi i \overline{q_-(\overline{\zeta})}]b_\zeta^+, \quad b_\zeta^+ = [1 + 2\pi i \overline{q_+(\overline{\zeta})}]b_\zeta^- \tag{2.90}$$

$$\overline{q_+(\overline{\zeta})}b_\zeta^- = \overline{q_-(\overline{\zeta})}b_\zeta^+ \tag{2.91}$$

نتيجة 5.4.2

مباشرة من (2.75) ،(2.78) و (2.89) نستنتج أن :

$$Ba_{\zeta}^{\mp} = K_{\mp}(\zeta)^{-1}\beta(\zeta), \quad Ab_{\zeta}^{\mp} = K_{\mp}(\overline{\zeta})^{*^{-1}}a(\zeta) \tag{2.92}$$

قضية 5.4.2

من أجل كل $\varphi, \psi \in \Phi$ الدالة $(T_{\zeta}\varphi, \psi) \longrightarrow \zeta$ تملك تمديد

$$(\zeta \longrightarrow (T_{\zeta}\varphi, \psi)_{+} \qquad \zeta \longrightarrow (T_{\zeta}\varphi, \psi)_{-})$$

على نصف المستوي (Π_{-}) Π_{+} ، هولومورفية في نصف المستوي

$$\Pi_{+} \cup \Omega \quad (\Pi_{-} \cup \Omega)$$

عندها نضع

$$(T_{\zeta}^{\mp}\varphi, \psi) \stackrel{def}{=} (T_{\zeta}\varphi, \psi)_{\mp}, \qquad \varphi, \psi \in \Phi \tag{2.93}$$

يكون $T_{\zeta}^{\mp}\varphi \in \Phi^{*}$ من أجل كل $\varphi \in \Phi$ ، أي :

$$T_{\zeta}^{\mp} : \Phi \longrightarrow \Phi^{*} \tag{2.94}$$

أقطاب الدالة $T_{\zeta}^{\mp}$ تسمى نقاط شادة طيفية للمؤثر T.

البرهان :

نضع :

$$(T_{\zeta}\varphi, \psi)_{\mp} \stackrel{def}{=} (S_{\zeta}^{\mp}\varphi, \psi) - (K_{\mp}(\zeta)^{-1}BS_{\zeta}^{\mp}\varphi, AS_{\zeta}^{\mp}\psi) \tag{2.95}$$

بإعتبار (2.64) ووجود $(K_{\mp}(\zeta)^{-1})$ نلاحظ أن الدالة $(T_{\zeta}\varphi, \psi)_{\mp} \longrightarrow \zeta$ تعتبر التمديد التحليلي الذي وجوده يضمن إثبات هذه الأخيرة ، وأن

$$T_{\zeta}^{\mp} = S_{\zeta}^{\mp} - S_{\zeta}^{\mp}A^{*}K_{\mp}(\zeta)^{-1}BS_{\zeta}^{\mp} \tag{2.96}$$

حيث $T_{\zeta}^{\mp}$ تعرفه المتطابقة (2.93) .

حسب الملاحظة (1.3.2) و (2.76) تحقق الصيغة (2.94) عندها يكون حسب (2.52)

$$\| (T_{\zeta}^{\mp}\varphi, \psi) \| \leqslant C_{Im\zeta,\gamma} \| \varphi \|_{\gamma} \| \psi \|_{\gamma} \tag{2.97}$$

حيث $\gamma \in [0, \varepsilon[$ و $Im\varepsilon > -\gamma$ من أجل T_{ζ}^{+} ، و $Im\zeta > \gamma$ من أجل T_{ζ}^{-}.

حيث $C_{Im\zeta,\gamma}$- عدد موجب .

نتيجة 6.4.2

القيم الشادة الطيفية تتطبق مع الأقطاب الحقيقية للدوال $\zeta \longrightarrow K_+(\zeta)^{-1}$ و $\zeta \longrightarrow K_-(\zeta)^{-1}$.
تضعيف القيم الشادة الطيفية μ كقطب للدوال $\zeta \longrightarrow T_\zeta^\mp$ ، يساوي تضعيف العدد μ كقطب للدوال $\zeta \longrightarrow K_\mp(\zeta)^{-1}$.

2.4.3 سلوك الحالة للمؤثر T على طول المحور الحقيقي:

قضية 6.4.2

من أجل كل $\zeta \in \Omega$ التي من أجلها توجد $K_+(\zeta)^{-1}$ و $K_-(\zeta)^{-1}$ يكون

$$(T_\zeta^+ - T_\zeta^-)\varphi = 2\pi i(\varphi, b_{\bar\zeta}^-)a_\zeta^+ = 2\pi i(\varphi, b_{\bar\zeta}^+)a_\zeta^-, \quad \varphi \in \Phi \tag{2.98}$$

البرهان :

من أجل كل φ من أجلها يوجد $T_\zeta^\mp$ (أنظر الملاحظة (1.3.2)) واضح أن $T_\zeta^\mp\varphi \in D(S|\Phi^*)$ و $\varphi \in \Phi, \quad (T-\zeta)T_\zeta^\mp\varphi = \varphi$ من أجل كل φ التي من أجلها يوجد $T_\zeta^\mp$ ، وعليه حسب القضية (4.4.2) وبإعتبار (2.97) و (2.79) نجد $C_\varphi^+ = (\varphi, \kappa_\zeta^*)$ حيث $\kappa_\zeta^* \in \Phi^*$ ، ومنه

$$(T_\zeta^+ - T_\zeta^-)\varphi = (\varphi, \kappa_\zeta^*)a_\zeta^+$$

بوضع $(T-\zeta)\varphi$ في مكان φ مع الأخد بعين الإعتبار أن $T_\zeta^\mp(T-\zeta)\varphi = \varphi$ و $\varphi \in D(S|\Phi)$ ، نحصل على :

$$((T-\zeta)\varphi, \kappa_\zeta^*) = 0, \varphi \in D(S|\Phi)$$

وعليه يكون $\kappa_\zeta^* = \kappa b^{-1}$ ، حيث κ عدد ما و b_ζ^- العنصر الذاتي للمؤثر T^* ومنه يكون :

$$(T_\zeta^+ - T_\zeta^-)\varphi = \kappa(\varphi, b_{\zeta-})a_\zeta^+ \tag{2.99}$$

لحساب κ نضع في (2.99)

$$\varphi = A^*K_-(\xi)d \tag{2.100}$$

حيث d شعاع كيفي من H_1 .
من المتطابقة

$$T_\zeta^\mp A^* K_\mp(\zeta) = S_\zeta^\mp A^* \tag{2.101}$$

نستنتج أن :

$$T_{\zeta}^{-}\varphi = S_{\zeta}^{-}A^{*}d \tag{2.102}$$

من ناحية ثانية وبإعتبار (2.85) يكون :

$$K_{-}(\zeta)d = K_{+}(\zeta)d - 2\pi i(d, a(\overline{\zeta}))\beta(\zeta) \tag{2.103}$$

وعليه يكون :

$$T_{\zeta}^{+}\varphi = S_{\zeta}^{+}A^{*}d - 2\pi i(d, a(\overline{\zeta}))T_{\zeta}^{+}\beta(\zeta)$$

غير أن :

$$S_{\zeta}^{+}A^{*}d = S_{\zeta}^{-}A^{*}d + 2\pi i(d, a(\overline{\zeta}))\delta_{\zeta}^{*}$$

ومنه بإعتبار (2.86) يكون :

$$T_{\zeta}^{\mp}A^{*}\beta(\zeta) = S_{\zeta}^{\mp}A^{*}K_{\mp}(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)$$

ومنه نستنتج أن :

$$(T_{\zeta}^{+} - T_{\zeta}^{-})\varphi = 2\pi i(d, a(\overline{\zeta}))[\delta_{\zeta}^{*} - S_{\zeta}^{+}A^{*}K_{+}(\zeta)^{-1}\beta(\zeta)] = 2\pi i(d, a(\overline{\zeta}))a_{\zeta}^{+}$$

من ناحية ثانية حسب (2.92) و (2.100) يكون :

$$(\varphi, b_{\zeta}^{-}) = (A^{*}K_{-}(\zeta)d, b_{\overline{\zeta}}^{-}) = (K_{-}(\zeta)d, K_{-}(\zeta)^{*^{-1}}a(\overline{\zeta})) = (d, a(\overline{\zeta}))$$

وعلى هذا الأساس يكون $\kappa = 2\pi i$ عندها تحقق المعادلة الأولى من الصيغة (2.98) ، المعادلة الثانية من نفس الصيغة تستنتج من الأولى وذلك بإعتبار (2.81) و (2.83) و (2.91).

نتيجة 7.4.2

الصيغة (2.98) تعتبر تعميم للصيغة (2.40) التي يمكن كتابتها كمايلي:

$$(S_{\zeta}^{+} - S_{\zeta}^{-})\varphi = 2\pi i\varphi(\zeta)\delta_{\zeta}^{*} \tag{2.104}$$

ملاحظة 3.4.2

إذا كان $Im\xi = 0$, $u \in D(S)$ و

$$(T - \xi)u = f \tag{2.105}$$

فإنه بوضع

$$d \overset{def}{=} Bu \tag{2.106}$$

يكون

$$f - A^*d \in R(S-\xi) = D(S_\xi) \tag{2.107}$$

$$BS_\xi(f - A^*d) = d \tag{2.108}$$

$$u = S_\xi(f - A^*d) \tag{2.109}$$

والعكس إذا وجد شعاع $d \in H_1$ بحيث تكون كل من الصيغ (2.107) و (2.108) محققة ، و u تعرفه الصيغة (2.109) فإن $u \in D(S)$ ، وتحقق الصيغ (2.105) و (2.106) .

قضية 7.4.2

ليكن التشويش V منضبط .
يكون العدد الحقيقي μ قيمة ذاتية للمؤثر T إذا وفقط إذا كان μ قيمة شادة طيفية للمؤثر T.

2.4.4 البرهان :

إذا كان μ قيمة شادة طيفية للمؤثر T و d شعاع من H_1 يحقق:

$$K_+(\mu)d = 0 \tag{2.110}$$

$$A^*d(\mu) = 0 \tag{2.111}$$

فإن μ تكون قيمة ذاتية للمؤثر T .
نبرهن الأن أنه إذا تحققت (2.111) فإن المعادلة (2.110) تكافئ المعادلة :

$$K_-(\mu)d = 0 \tag{2.112}$$

نفرض u يحقق المعادلة (2.105) من أجل $\xi = \mu$, $f = 0$ يكون

$$\{\varphi \in \Phi_0 \Longrightarrow \varphi \in D(S_\mu)\} \Longleftrightarrow \{\varphi(\mu) = 0\}$$

وعليه حسب (2.107) الشعاع $d = Bu$ يحقق الصيغة (2.111) .
ومنه وبإعتبار (2.108) يكون :

$$(1 + BS_\mu A^*)d = 0 \tag{2.113}$$

لكن بما أن :

$$S_\mu^+\varphi = S_\mu^-\varphi = S_\mu\varphi, \quad \varphi \in \Phi_0, \quad \varphi(\mu) = 0 \tag{2.114}$$

فإن (2.113) تكافئ كل من (2.110) أو (2.112) ، والعكس إذا تحققت (2.110) أو (2.112) و (2.111) فإنه حسب (2.84) تحقق أيضا (2.110) و (2.112) ويكون واضح أن μ تعتبر قيمة ذاتية دالتها الذاتية $u = -S_\mu A^* d$.

قضية 8.4.2

القيم الشادة الطيفية للمؤثر T تطابق القيم الشادة الطيفية لـ T^*

البرهان :

لدينا : $1 + AS_\zeta B^* = (1 + BS_{\overline{\zeta}}A^*)^* = K(\overline{\zeta})^*$ وعليه $K(\overline{\zeta})^*$ بالنسبة ل T^*، تلعب نفس الدور الذي تلعبه $K(\zeta)$ بالنسبة للمؤثر T .

وعليه مطلوب القضية يستنتج من كون عندما $Im\xi = 0$ ، المؤثرات $K_\mp(\xi)$ و $K_\mp(\xi)^*$ تكون في نفس الوقت قابلة للقلب بإستمرار (أولا)

والآن المطلوب (3) من التيجة (2.3.2) أصبح واضحا ، لأنه إذا كان العدد الحقيقي ξ ليس قيمة شادة طيفية للمؤثر T، فإنه حسب القضية (8.4.2) والقضية (7.4.2) فإن ξ لا يمكن أن يكون قيمة ذاتية لا للمؤثر T ولا للمؤثر T^* ومنه يكون من الطيف المستمر.

نتيجة 8.4.2

العدد الحقيقي ξ لا يعتبر قيمة شادة طيفية للمؤثر T ، فإنه ينتمي إلى الطيف المستمر لهذا المؤثر .

خـــــاتمة

يندرج محتوى المذكرة ،في العمل على توضيح التغيرات الطيفية التي تحدث لمؤثر الجداء في المتغير المستقل S في فراغ هيلبار ،بعد التشويش عليه بمؤثر من الصنف المتراص وهو المؤثر المنضبط تام .

لهذا الغرض تم التشويش على المؤثر S في البداية بمؤثر V متراص ،وبعدها بمؤثر V منضبط وفي النهاية بمؤثر V منضبط تام ، فكانت التغيرات الطيفية للمؤثر المشوش $T = S + V$ كالتالي :

- إذا كانت λ من الطيف النقطي وليست حقيقية فإنها تكون نقطة نظامية .
- إذا كانت λ غير حقيقية وقيمة شادة طيفية ، فإنها تكون من الطيف المستمر.
- إذا كانت λ من الطيف النقطي و حقيقية فإنها تكون نقطة شادة طيفية .

قائمة المراجع

[1] : د.أ.كولموغورف ، س.فومين ، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي ،-تعريب أبو بكر خالد سعد الله-د.م.ج1987.

[2] : إيروين كريزيك ، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته -ترجمة د.خضر حامد الأحمد -، الطبعة الرابعة -دمشق -2004- 2005م.

[3] : مصطفى .عسيلة ، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي ،د.م.ج-الجزائر-2009.

[4] : مصطفى. عسيلة ، دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف ، الجزء الأول ، المؤثرات المحدودة , UKMO, 2013.

[5] : I.TS.Gokhberg and M. G. Krein , Introduction to the theory of linear Nonself-adjoint operators in a Hibert Space 1965.

[6] : I.C.Gokhberg and M. G.Krein ;Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert space, Amer.Math.Soc.(1970).

[7] : J.Von .Neumann; Characterisierung des Spectrum eines Integrolaoperators, Paris, 1935.

[8] : K.Yosida Functional Analysis, Springer-Verlag, 1965.

[9] : K.O.Friedrichs , Perturbation of spectra in Hibert space , Providence, Rhode Island, 1965.

[10] : T.KATO ,Perturbation theory for linear operators, Berlin-Heidelberg, New -York, Springer Verlag 1966.

[11] : T.KATO , Wave operators and similarity for some non self-adjoint operators , Math.Ann 162(1966),258-279.

[12] : V.*É*.Lystanse , Completely regular perturbation of a continuous spectrum journals, MATHS USSR SB, 1970,11(1) , 115-143.

ملخص

هذا العمل يهدف إلى توضيح مجمل النتائج المحصل عليها خلال التشويش على مؤثر الجداء في المتغير المستقل $(Sf(x) = xf(x))$ في فراغ هيلبار بمؤثر V منضبط تام ، وهو صنف من أصناف المؤثرات المتراصة .

تم توضيح النتائج للمؤثر المشوش $T = S + V$ التالية :

1. الطيف النقطي $P_\sigma(T)$ ومجموعة النقط الشادة الطيفية $A(T)$ مجموعات منتهية .
2. إذا كانت λ من الطيف النقطي وليست حقيقية فإنها تكون نقطة نظامية .
3. إذا كانت λ غير حقيقية وقيمة شادة طيفية ، فإنها تكون من الطيف المستمر.
4. إذا كانت λ من الطيف النقطي و حقيقية فإنها تكون نقطة شادة طيفية .

وتبقى الدراسة مفتوحة في إمكانية كتابة المؤثر T في الشكل القطري مع المؤثر S.

الكلمات المفتاحية: مؤثر الجداء في المتغير المستقل،المؤثر غير قرين لنفسه ، التشويش ، المؤثر المنضبط التام .

Abstract

Our aim is to clarify the obtained results from the perturbation on the multiplication operator in the independt variable $(Sf(x) = xf(x))$, in hilbert space with a complet regular operator, and it is a Kind of compact operators.

The perturbation operator $T = S + V$ results has been clarified as the following :

1. The punctual spectrum $P_\sigma(T)$ and the spectrum singularities $A(T)$ are finite sets.
2. If λ is not real and an element of the punctual spectrum , then λ is an element of the resolvent set $(\rho(T))$.
3. If λ is real and an element of the spectrum singularities $A(T)$, then λ is an element of the continuous spectrum $(C_\sigma(T))$.
4. If λ is real and an element of the punctual spectrum then λ is an element of the spectrum singularities $A(T)$.

The study is still opened to write the operator T diagonally with the operator S .

Key words: the multiplication operator in the independt variable , non-self adjoint operator , perturbation , the complet regular operator.