N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماستر أكاديمي

الميدان :رياضيات و إعلام آلي

الشعبة :رياضيات

التخصص :تحليل دالي

من إعداد الطالبة : ابتسام طلحة

تحت إشراف الأستاذ : عسيلة مصطفى

تحت عنوان

الأساس المعمم في فراغ بناخ

نوقشت يوم 25 جوان 2019 من طرف أعضاء اللجنة :

- الدكتور : مبروك مفلاح — جامعة قاصدي مرباح ورقلة — رئيسا
- الأستاذ : السعيد محمد السعيد — جامعة قاصدي مرباح ورقلة — مناقشا
- الأستاذ : عسيلة مصطفى — جامعة قاصدي مرباح ورقلة — مشرفا

السنة الجامعية 2018-2019

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين، الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، الحمد لله والشكر لله والصلاة والسلام على رسول الله أما بعد:

يطيب لي أن أضع اللمسات الأخيرة لمذكرتي هاته، وأن أتقدم ببالغ الشكر والتقدير للأستاذ: " الدكتور عسيلة مصطفى " على اقتراحه موضوع المذكرة وما بذله من جهد ومتابعة طيلة مدة الإشراف.

وأستهل بتوجيه أعمق عبارات الشكر و العرفان الى جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة مشواري الجامعي، وعلى رأسهم الأستاذ: " علي مش "رحمه الله .الذي وافته المنية نهاية هذا الموسم.

كما لا يفوتني توجيه عبارات الشكر والتقدير لأعضاء اللجنة المناقشة كل واحد بإسمه على قبولهم مناقشة هاته المذكرة.

إهداء

إلى بؤرة النور التي عبرت بي نحو الأمل والآمال الجميلة، واتسع قلبه ليحتوي حلمي حين ضاقت الدنيا، فروض الصعاب من أجلي وسار في حنكة الدرب ليغرس معاني النور والصفاء في قلبي.
وعلمني معنى أن نعيش من أجل الحق والعلم لنظل أحياءا حتى لو فارقت أرواحنا أجسادنا، ولطالما تقطر قلبه شوقا وحنت عيناه الوضائتان إلى رأيتي متقلدة شهادة الماستر، وهاهي قد أينعت لأقدمها الآن بين يديه.

"والدي الحبيب"

قبل سنين عديدة جلس والدي على منضدة العلم ليتقلد رتبة علمية، ربما تستغربون من طول الحقبة الزمنية التي ما أكمل فيها دراسته وهي حلمه المنشود، لكنه آثر من يحب على ما يحب وعاش من أجلنا، من أجل أن نحيا حياة كريمة في بيت كريم وفي أحضان علم نافع كريم، ومن أجل أن أمثل أمامه اليوم بشهادتي التي تعترف كل قصاصة منها بأنه سبب وجودها وسبب خلودها في مدارك العلم بإذن الله.
لقد كان إرضاءك جزءا من طموحي وجزءا من سيري في طريق الماستر، حتى ترى ثمرة جهدك وطيب غرسك. فكنت معنى الحياة لي. فأنت قدوتي في الحياة، مكمن فخري وعزتي، ومعيني وسندي في الوجود.

"وقد أرضاني الله فيك يا أبتي فهلا رضيت عني".

وإلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها، إلى التي تمتهن الحب وتغزل الأمل في قلب عصفورة ترفرف فوق ناصية الأحلام، فتبقى روحي متلألئة ومشرقة طالما كانت دعواتها عنوان دربي، وتبقى أمنياتي على ورشة التحقق طالما يدها في يدي وصنارة جهدها وسهرها تصطاد لي الراحة وتخطف التعب والألم من قلبي، وعندما تكسوني الهموم أسبح في بحر حبها وحنانها ليخفف بل ويزيل من آلامي.
"إلى أمي" التي مهما كبرت فسأبقى طفلتها التي تكتب اسمها على دفتر قلبها ساعة حزنها، وتهتف بفضلها حينما نتقدم في علمها وعلمها درجات.

لكي يا والدتي الحبيبة يا سيدة القلب والحياة أهديك رسالتي لتهديني الرضا والدعاء.

إلى زينة الحياة أخواتي العزيزات: *دنيا*هدى*هاجر*

إلى البراعم الصغيرة ورمز البراءة: *يحي وسارة*.

ابتسام طلحة

الفهرس

دليـــــل الرّمـــــوز		
الرّمــز	رقم الصفحة	مدلوله
X	1	فراغ شعاعي
$\mathbb{K}$	1	الحقل $\mathbb{K}$ ، (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)
$\mathbb{R}$	1	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	1	مجموعة الأعداد المركبة
$\|.\|$	1	تطبيق النظيم
$(X, \|.\|)$	1	الفراغ الشعاعي النظيمي
$(X_0, \|.\|_0)$	4	فراغ شعاعي جزئي من الفراغ $(X, \|.\|)$
$l(X, Y)$	7	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y
X'	11	الفراغ الثنوي التبولوجي
P_M	13	تطبيق الإسقاط على الفراغ الجزئي المغلق M
$\langle , \rangle$	18	تطبيق الجداء السلمي
$(X, \langle , \rangle)$	18	فراغ شبه هيلبرتي
H	18	فراغ هيلبار
$x \perp y$	19	العنصران x و y متعامدان.
$x \perp A$	19	x يعامد المجموعة A
$\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$	27	أساس معمم في فراغ هيلبار H
$\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$	29	متتالية معاملات
$\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$	33	أساس ريس للفراغ H

دليـــــل الرّمـــــوز		
الرّمــز	رقم الصفحة	مدلوله
ℓ^2	36	فراغ المتتاليات العددية التي تحقق $\sum_{i\in I} \lvert x_i\rvert^2 < +\infty$
X_d	39	فراغ المتتاليات العددية ذات الدلائل الطبيعية المرفق بـ X.
X_Φ	42	فراغ المعاملات بالنسبة للجملة Φ
Y	42	الفراغ النموذجي
N	48	فراغ المعامل للسلاسل المعدومة

مقدمــــــة عامة

نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين، ورغم حداثة سنه نسبيا إلا أنه حاليا يشغل مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة.

والدراسات في التحليل الدالي ساحاتها هي فراغات مجردة، ونخص بالذكر فراغات بناخ وفراغات هيلبار، ولمعرفة هذه الفراغات معرفة جيدة لا بد من معرفة الأساس لهذه الفراغات. وعليه جاءت المذكرة تحت عنوان:

"الأساس المعمم في فراغ بناخ"

ظهر مفهوم الأساس المعمم في الفراغات القابلة للفصل في البداية بالنسبة لفراغ هيلبار H سنة 1952م في أعمال دافين وشاشفيرم $(Duffin{-}Schaeffer)$، حيث يتمثل فيما يلي :

إذا كان H فراغا لهيلبار قابل للفصل.

فإن الجملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المكونة من العناصر الغير صفرية من H تسمى أساسا معمما، إذا وجد ثابتين α و β حيث $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$، ومن أجل كل شعاع h من H عندنا :

$$\alpha \|h\|_H{}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \beta \|h\|_H{}^2$$

تسمى الثوابت α و β على التوالي بـ : الحدود السفلى، العليا على التوالي للأساس المعمم.

استمر مفهوم الأساس المعمم مقتصرا على الفراغات الهيلبرتية القابلة للفصل حتى عام 1991م، أين توصل كروشينكوم $(Grochenig)$ إلى توضيح هذا المفهوم في فراغ بناخ.

وقد توسع مفهوم الأساس المعمم في فراغ بناخ، وظهر بشكل أوسع في أعمال كروشينكوم $(Grochenig)$.

في هاته المذكرة طرحت إشكالية حول إمكانية التعامل مع الأساس المعمم كأساس عادي، وعلى وجه الخصوص في تحليل عناصر الفراغ، في تحديد معاملات فوري، وفي دراسة الإسقاط، ...إلخ.

من أجل ذلك حاولت في مذكرتي هذه توضيح النظريات المهمة حول مفهوم الأساس المعمم في فراغ بناخ، ولهذا الغرض وفرنا جملة من المراجع من أهمها بعض المقالات التي درست وسلطت الضوء على الموضوع.

الفصل

1

مفاهيم أساسية

1.0 مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي. هاته المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لإستعمالها في الفصل الثاني.

1.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1.1.1

يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. و $\mathbb{K}$ أحد الحقلين إما $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ على النحو:

$$X \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x\|$$

ويحقق الشروط التالية:

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x

ملاحظة

الفراغ الشعاعي النظيمي إختصارا يكتب ف. ش. ن.

نتيجة

إذا كان $(X, \|.\|)$، ف. ش .ن.، فإن:

1. $\|x\| \geqslant 0$
2. $\|x-y\| = \|y-x\|$.
3. $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$.

تعريف 2.1.1

ليكن $\|.\|_1, \|.\|_2$ نظيمين معرفين على X.
يقال أن النظيمين $\|.\|_1, \|.\|_2$ متكافئان، إذا وجد β, α من $\mathbb{R}$ موجبين، من أجلهما يتحقق ما يلي:

$$\forall x \in X \rightarrow \alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$$

قضية 1.1.1

إذا كان $(X, \|.\|)$ ف. ش. ن. $(x_n)_{n\geqslant 1}, (y_n)_{n\geqslant 1}$ متتاليتين من X، و $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من الحقل $\mathbb{K}$، فإن:

1. $\left(\|x_n - a\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0, \mid \lambda_n - \lambda \mid_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0\right) \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda a\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0$
2. $\|x_n - a\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow \|a\|$
3. $\left(\|x_n - a\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0, \|y_n - b\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0\right) \Rightarrow \|x_n - y_n - (a+b)\|_{n\longrightarrow +\infty} \rightarrow 0$

1.1.1 الفراغ الجزئي

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن. X_0 فراغا شعاعيا جزئيا من الفراغ الشعاعي X.

تعريف 3.1.1

يعرف ف.ش.ن. الجزئي من الفراغ $(X, \|.\|)$، بأنه الزوج $(X_0, \|.\|_0)$ حيث $\|.\|_0$ هو إقتصار النظيم $\|.\|$ على المجموعة X_0

الأساس الجبري أو أساس هامل:

تعريف 4.1.1

نقول أن B من الفراغ الشعاعي X أساس جبري (أو أساس هامل) له. إذا وفقط إذا كانت:

- B جملة مستقلة خطيا.
- كل عنصر من X يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لعدد منته من عناصر B.

نظرية 1.1

نظرية هامل (Hamel)

كل فراغ شعاعي يملك أساسا جبريا.

1.1.2 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف. ش. ن.

تعريف 5.1.1

يقال إن X فراغ بناخ، إذا كانت كل متتالية أساسية (لكوشي) منه متقاربة فيه.

نتيجة لتكن $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ سلسلة من فراغ بناخ.

1. تكون السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ متقاربة، إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geqslant 1 \Rightarrow \|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k}\| < \varepsilon, \quad \forall k = 1, 2, ..., n.$$

2. إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ متقاربة مطلقاً، أي السلسلة $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|u_i\|$ متقاربة، فإن السلسلة $\sum\limits_{i} u_i$ متقاربة. عندها يكون:

$$\|\sum_{i=1}^{+\infty} u_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \|u_i\|.$$

نتيجة

في ف. ش. ن. إذا كانت كل سلسلة متقاربة مطلقاً متقاربة، فإن هذاالفراغ يكون فراغاً لبناخ.

أساس شاودار:

تعريف 6.1.1

نقول عن المتتالية $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها أساس شاودار متجانس لفراغ بناخ $(E,\|.\|)$، إذا كانت $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أشعة ناظمية في E (حيث $\|e_n\|=1,\quad n\geqslant 1$). وإذا كان كل عنصر $x \in E$ يكتب بطريقة وحيدة من الشكل:

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n; \quad / \quad x_n\in\mathbb{K},\quad n\geqslant 1$$

حيث $x_k \in \mathbb{R}$.

1.1.3 فراغ الجداء

لتكن

$i=1,2,...,n \quad (X_i,\|.\|_i)$ فراغات شعاعية نظيمية على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

معلوم أن الجداء $X=\Pi_{i=1}^n X_i$ يمثل فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

واضح أن التطبيقات المعرفة من X في $\mathbb{R}$. كالتالي:

$$\|x\|_\infty=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\|x_i\|_i\right),\quad \|x\|_1=\sum_{i=1}^n\|x_i\|_i,\quad \|x\|_P=\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

حيث $x=(x_1,x_2,...,x_n)$، و $x_i\in X_i$ هي نظم على X.

نتيجة

إذا كانت

$(X_i,\|.\|_i),\quad i=1,2,...,n$ فراغات لبناخ، فإن فراغ الجداء يكون فراغا بناخ أيضا.

نتيجة

إذا كان $(X,\|.\|)$ ف. ش. ن. على الحقل $\mathbb{K}$، فإن:

1. التطبيقان φ, p المعرفان من $X\times X$ في X كالتالي:

$$\varphi(x+y)=x+y,\quad (x,y)\in X\times X.$$

$$P(x,y)=x,\quad x\in X$$

مستمران بانتظام.

4.1.1 الفراغات ذات البعد المنته

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن. على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 7.1.1

نقول أن بعد الفراغ X منته (يساوي n مثلا)، إذا وجدت فيه عناصر (أشعة) $x_1, x_2, ..., x_n$ مستقلة خطيا وتولده.

هذه العناصر تسمى أساسا، أي :

$$\forall x \in X, \exists \lambda = \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} / \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \tag{1.1}$$

قضية 2.1.1

كل فراغ نظيمي بعده n، يكون هوميومرفيزميا بانتظام مع الفراغ $\mathbb{K}^n$.

نتيجة

1. كل النظم على فراغ ذي بعد منته متكافئة.
2. كل ف. ش. ن. جزئي منته من ف. ش. ن. يكون مغلقا.
3. كل ف. ش. ن. جزئي بعده منته من ف. ش. ن. يكون فراغاً لبناخ.
4. المجموعة المتراصة في فراغ شعاعي نظيمي بعده منته، تكافئ محدودة ومغلقة.
5. كل ف. ش. ن. بعده منته يكون قابلا للفصل.

تعريف 8.1.1

ليكن $(X_0, \|.\|_0)$ ف. ش. ن. جزئي بعده منته من الفراغ $(X, \|.\|)$، و x عنصر من X حيث: $x \notin X_0$.

1. من أجل كل عنصر y من X_0، القيمة $\|y - x\|$ تسمى انحراف العنصر y عن العنصر x.
2. نقول إن العنصر y_0 من X_0 هو أحسن تقريب للعنصر x من X، إذا أخذ الانحراف $\|y - x\|$ أقل قيمة له في النقطة y_0 أي:

$$\|y_0 - x\| = \inf\{\|y - x\| \quad / \quad y \in X_0\}. \tag{1.2}$$

نتيجة

لكل x من X يوجد أحسن تقريب له y_0 من X_0.

نظرية 2.1

نظرية بناخ شتاينهاوس

لتكن $(f_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من $l(X,Y)$، حيث X لبناخ.

قضية 3.1.1

إذا وجد ثابت $c>0$ و $F(x_0,r)$، (كرة مغلقة)، بحيث

$$\forall x\in F(x_0,r)\rightarrow \|f_n(x)\|\leqslant c$$

فإن المتتالية $(\|f_n\|)_{n\geqslant 1}$ محدودة، أي يوجد ثابت M، يحقق: $n\geqslant 1,\quad \|f_n\|\leqslant M$.

قضية 4.1.1

يكون الفراغ الشعاعي النظيمي ذا بعد منته، إذا وفقط إذا كانت كرة الوحدة المغلقة فيه متراصة فيه.

1.2 المؤثرات الخطية

ليكن $(X,\|.\|_X)$، $(Y,\|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن D مجموعة غير خالية من X، (D قد تساوي X).

تعريف 1.2.1

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y، يرمز له بالرمز S ونكتب: $y=S(x)$ أو $y=Sx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر S، ويرمز لها بالرمز $D(S)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y=Sx$ و $x\in D(S)$، تسمى مجموعة قيم المؤثر S، ويرمز لها بالرمز $E(S)$. عندها نكتب:

$$E(S)=\{y\in Y/\ y=Sx,\ x\in D(S)\}$$

- صيغة المؤثر S تكتب كالتالي:

$$X\supset D(S)\xrightarrow{S}E(S)\subset Y$$

إختصارا نكتب:

$$S:X\longrightarrow Y$$

• مجموعة الأزواج (x, Sx) من فراغ الجداء $X\times Y$ حيث $x \in D(S)$، تسمى بيان المؤثر S، ويرمز لها بالرمز Γ_S، ونكتب:

$$\Gamma_S = \{(x, Sx)/\ x \in D(S)\} \subset X\times Y$$

• مجموعة أصفار المؤثر S، تسمى نواة المؤثر S، ويرمز لها بالرمز $\ker S$ عندها نكتب:

$$\ker S = \{x \in D(S)/\quad Sx = 0\}$$

تعريف 2.2.1

إذا كان T, S مؤثرين من X في Y. يقال إن:

1. المؤثرين T, S منطبقان، إذا تحقق مايلي:

(ا) $D(S) = D(T) = D$

(ب) $\forall x \in D \to T(x) = S(x)$

2. المؤثر T تمديد (توسيع) للمؤثر S، أو المؤثر S اقتصار للمؤثر T، إذا تحقق مايلي:

(ا) $D(S) \subset D(T)$.

(ب) $\forall x \in D(S) \to T(x) = S(x)$.

عندها يقال إن S اقتصار للمؤثر T على $D(S)$. ونكتب: $S = T\mid_{D(S)}$.

1.2.1 فراغ المؤثرات الخطية

تعريف 3.2.1

من أجل كل مؤثرين كيفيين S_2, S_1 من $L(X,Y)$، يعرف:

1. جمع المؤثرين S_2, S_1 كالتالي:

$$(S_1 + S_2)(x) = S_1(x) + S_2(x), \quad x \in D(S_1) \cap D(S_2)$$

2. ضرب المؤثر S_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha S_1 x) = \alpha S_1 x, \quad x \in D(S_1), \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة

المؤثران T,S حيث $S=S_1+S_2 \quad T=\alpha S_1,$ يكونا من $L(X,Y)$.

المجموعتان $L(X,Y), X^*$ تكونا فراغين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$.

نتبه هنا أنه في الحالة عندما يكون بعد احد الفراغين X أو X^* منته، يكون بعد الآخر منتهيا أيضا، عندها يكون:

$$dimX^* = dimX$$

لكن في الحالة العامة

$$dimX^* \geqslant dimX$$

تعريف 4.2.1

إذا كان T,S مؤثرين من $L(X,Y), L(Y,Z)$ على التوالي، (Z ف. ش. ن. على نفس الحقل $\mathbb{K}$)، فإن جداء تركيب المؤثرين T,S يعرف كالتالي: $ST=S\circ T$ أي أن:

$$TS(x)=T(Sx)/ \quad x\in D(S), S(x)\in D(T)$$

تنبيه

1. ا لجداء TS في الحالة العامة غير معرف.
2. إ ذا كان $X\equiv Y\equiv Z$، والمؤثران T,S معرفين على كل الفراغ، فإن الجداء يكون معرفا.
3. حتى في حالة الجداء معرف لا يكون دوما تبديليا، أي في الحالة العامة $TS\neq ST$

تعريف 5.2.1

يعرف نظيم المؤثر S من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ الأربعة التالية:

1. $\|S\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Sx\|}{\|x\|}$.
2. $\|S\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Sx\|$.
3. $\|S\|=\sup_{\|x\|=1}\|Sx\|$.
4. $\|S\|=\min\{c/\|Sx\|\leqslant c\|x\|\}$.

1.2.2 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 6.2.1

من أجل كل مؤثرين كيفيين S_1, S_2 من $L(X,Y)$ يعرف:

1. جمع المؤثرين S_1, S_2 كالتالي:

$$(S_1 + S_2)x = S_1x + S_2x, \quad x \in D(S_1) \cap D(S_2)$$

2. جداء المؤثر S_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha S_1)x = \alpha S_1 x; \quad x \in D(S_1), \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة

$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

1.3 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن S مؤثرا خطيا من X في Y.

تعريف 1.3.1

يقال إن S محدود على مجموعة تعريفه، إذا تحقق:

$$\exists c > 0, \ \forall x \in D(S), \ \|S(x)\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x، من X يقال إن S محدود على كل X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(S) \equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$، وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.
الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي، ويرمز له بالرمز X' أي:

$$X' = l(X,X) = l(X)$$

تعريف 2.3.1

1. يقال إن المؤثر S مستمر في النقطة x_0 من $D(S)$، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \quad (\forall x \in D(S) \cap X / \quad \|x - x_0\| < \delta) \longrightarrow \|Sx - Sx_0\| < \varepsilon$$

2. يقال إن المؤثر S مستمر، إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه.

نتيجة

إذا كان المؤثر S من $L(X,Y)$، فإن S مستمر يكافئ S محدود.

نتيجة

إذا كان المؤثر S من $l(X,Y)$ فإن:

1. $\forall x \in X,\ \|Sx\| \leqslant \|S\|\|x\|$

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X/\ \ \|Sx_\varepsilon\| > (\|S\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

نتيجة $l(X,Y)$ فراغ بناخ إذا كان Y لبناخ.

1.3.1 المؤثر القرين

ليكن H_1، H_2 فراغين لهيلبار، و S من $l(H_1,H_2)$.

تعريف 3.3.1

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر S، المؤثر S^* المعرف من H_2' في H_1'، بحيث $H_1 \times H_2$ يكون:

$$\forall (x,y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle$$

نظرية 3.1

إذا كان

$S \in l(H_1,H_2)$، فإن S^* موجود ووحيد من $l(H_2',H_1')$، ويحقق:

$$\|S\| = \|S^*\|$$

1.3.2 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 4.3.1

يقال إن المؤثر $S \in l(H)$ قرين لنفسه، إذا انطبق مع قرينه، أي: $S = S^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x,y \in H,\ \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

قضية 1.3.1

ليكن $S \in l(X_1, X_2)$، حيث X_1, X_2 لبناخ.
يكون المؤثر S غامر ومتباين، إذا وفقط إذا كان المؤثر المرافق له S^* كذلك من ${X_2}'$ في ${X_1}'$. عندها نكتب:

$$\|S^*x\|_{{X_1}'} \geqslant \delta\|x\|_{{X_2}'};\ \ _{\delta>0}$$

1.3.3 المؤثرالعكسي

ليكن S مؤثرا من X في Y. $D(S)$ مجموعة تعريفه و $E(S)$ مجموعة قيمه.

تعريف 5.3.1

يقال إن المؤثر S قابل للقلب إذا كانت المعادلة :

$$y = Sx$$

تقبل حلا وحيدا x من $D(S)$، وذلك من أجل كل y من $E(S)$.
يسمى المؤثر من $E(S)$ في $D(S)$ الذي يلحق بـ y العنصر x (مقلوب S)، ونرمز له بالرمز S^{-1}.

نظرية 4.1

(نظرية بناخ للمؤثر العكسي):

إذا كان المؤثر S تقابلا خطيا ومستمرا من X في Y، حيث X, Y لبناخ، و $D(S) = X, E(S) = Y$.
فإن المؤثر العكسي S^{-1} أيضا خطي ومستمر.

1.3.4 المؤثرالمتقايس

تعريف 6.3.1

يسمى المؤثر S في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس، إذا كان: $\|Sx\| = \|x\|$. وذلك من أجل كل $x \in H$.

1.3.5 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H. يعرف مؤثرالإسقاط العمودي على M بأنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M. إختصارا يقال: "مؤثر إسقاط".

خواص

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $P_M = {P_M}^2$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geqslant 0$.
4. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leqslant \|x\|^2$.

قضية 2.3.1

إذا كان المؤثر S قرينا لنفسه في H، و $S = S^2$، فإن S يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H .

1.3.6 المؤثرغير السالب

تعريف 7.3.1

يسمى المؤثر S من $l(H)$ مؤثرا غير سالبا إذا كان قرينا لنفسه، و يحقق $\langle Sx, x\rangle \geqslant 0$ من أجل كل $x \in H$.

1.3.7 المؤثر العكسي والايزومورفيزم المتقايس:

ليكن المؤثر S من $L(X,Y)$، حيث Y, X ف. ش. ن. على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 8.3.1

المؤثر S من $L(X,Y)$ يقال إنه قابل للقلب، إذا وجد من أجل كل y من $E(S)$، حل وحيد للمعادلة:

$$y = Sx$$

نتيجة

المؤثر S من $L(X,Y)$ يكون قابلا للقلب من $D(S)$ على $E(S)$، إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. $\forall y \in E(S), \exists! \ \ x_y \in D(S): \ \ y = Sx_y$.

2. $Ker S = 0$.

يرمز للمؤثر العكسي للمؤثر S بالرمز S^{-1}. ونكتب: $S^{-1}y = x_y$.

نتيجة

المؤثر العكسي للمؤثر الخطي يكون خطيا أيضا.

تعريف 9.3.1

يسمى إزومورفيزم جبري بين الفراغين الشعاعيين Y, X، كل تقابل خطي بينهما، عندها يقال إن الفراغين Y, X إزومورفيزميان جبريا. ويرمز لهما بالرمز $Y \approx X$.

تعريف 10.3.1

يقال إن المؤثر S إزومورفيزم تبولوجي بين الفراغين الشعاعيين النظيميين Y, X، إذا كان:
S إزومورفيزما جبريا بينهما. و المؤثران S^{-1}, S مستمرين، عندها يقال إن الفراغين Y, X إزمورفيزميان تبولوجيا. ويرمز لهما بالرمز: $Y \cong X$.

نتيجة

الإزومورفيزم التبولوجي هو هوميومرفيزم خطي.

تعريف 11.3.1

المؤثر S من $L(X, Y)$ يسمى تقايسا، إذا حقق الصيغة التالية:

$$\|Sx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

عندها يقال إن الفراغين Y, X متقايسان.

تعريف 12.3.1

يسمى إزومورفيزميا متقايسا بين الفراغيين الشعاعيين Y, X، كل إزومورفيزم تبولوجي متقايس بينهما، أو نقول هناك تقايس غامر بينهما، عندها يقال إن الفراغين Y, X إزمورفيزميان متقايسان.

1.4 الجمع المباشر التوبولوجي

ليكن X فراغا شعاعيا نظيميا على الحقل $\mathbb{K}$، و X_2, X_1 فراغين جزئيين من X.

تعريف 1.4.1

يقال إن الفراغ X يكتب بشكل جمع مباشر جبري للفراغين X_2, X_1، ونكتب: $X = X_1 + X_2$.
إذا كتب كل عنصر x من X بشكل وحيد كالتالي:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$$

عندها يقال إن X_2, X_1 كلا منهما متمم جبري للآخر بالنسبة للفراغ X. (التعريف نفسه حتى إذا كان X فراغا شعاعيا فقط).

نتيجة

1. ا لمجموع $X = X_1 + X_2$ يكون جمعا مباشرا جبريا، إذا وفقط إذا كان $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.
2. كل فراغ جزئي من X يملك على الأقل متمما جبريا له بالنسبة للفراغ X.

نتيجة

الكتابة $X = X_1 + X_2$ تقتضي وجود تطبيقي إسقاط P_{X_2}, P_{X_1} معرفين كالتالي :

$$P_{X1} : X \to X_1 \quad / P_{X1}x = P_{X1}(x_1 + x_2) = x_1$$

$$P_{X2} : X \to X_2 \quad / P_{X2}x = P_{X2}(x_1 + x_2) = x_2$$

التطبيقان P_{X_2}, P_{X_1} واضح أنهما خطيان لكن في الحالة العامة قد يكونان غير مستمرين.

نتيجة

استمرار أحد التطبيقين P_{X_1} أو P_{X_2} يقتضي استمرار الآخر، (ذلك لأن $x = P_{X_1}x + P_{X_2}x$).

تعريف 2.4.1

الجمع المباشر الجبري $X = X_1 + X_2$ يسمى جمعا مباشرا تبولوجيا، إذا كان أحد التطبيقين P_{X_1} أو P_{X_2} مستمرا، ونكتب $X = X_1 \oplus X_2$. عندها يقال إن X_2, X_1 كلا منهما متمم تبولوجي للآخر بالنسبة للفراغ X.

نتيجة

إذا كان التطبيقين الأخيرين مستمرين، فإن الفراغين X_1, X_2 مغلقان.

تعريف 3.4.1

إذا كان الفراغين X_1, X_2 فراغين شعاعيين نظيميين، فإنه وحسب ما سبق فراغ الجداء $X_1 \times X_2$ هو ف. ش. ن. نظيمه يعرف كالتالي:

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\| \quad , \quad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

وإذا كان كل من الفراغين X_1, X_2 لبناخ، يكون فراغ الجداء $X_1 \times X_2$ أيضا لبناخ.

ليكن h تطبيقا معرفا كالتالي:

$$h : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1 + X_2$$

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x$$

واضح أن التطبيق h عبارة عن تقابل خطي.

نتيجة

التطبيق h مستمر، (ذلك لأن $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$).

قضية 1.4.1

إذا كان X_2, X_1 فراغين جزئيين نظيميين من الفراغ الشعاعي النظيمي X. فإن التطبيق h يكون مستمرا، إذا وفقط إذا كان أحد التطبيقين P_{X_1} أو P_{X_2} مستمرا.

نتيجة

المجموع $X = X_1 + X_2$ يكون جمعا مباشرا تبولوجيا، إذا وفقط إذا كان التطبيق h إزومورفيزما تبولوجيا من $X = X_1 \times X_2$ في $X = X_1 + X_2$.

نظرية 5.1

إذا كان X_2, X_1 فراغين جزئيين مغلقين من فراغ بناخ X، حيث $X = X_1 + X_2$. فإن الجمع المباشر الأخير يكون جمعا مباشرا تبولوجيا.

تنبيه

1. في الحالة العامة ليس كل فراغ جزئي مغلق من فراغ بناخ يملك متمما تبولوجيا فيه.
2. إذا كان في فراغ بناخ X كل فراغ جزئي مغلق منه يملك متمما تبولوجيا، فإن الفراغ X يكون إزومورفزميا مع فراغا لهيلبار.

نتيجة

إذا كان X_1 فراغا منتهيا من فراغ بناخ X، فإنه يوجد في الفراغ X فراغا X_2 مغلق يكون متمما تبولوجيا للفراغ X_1 بالنسبة لـ X.

1.5 الفراغ الهيلبرتي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$، (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$.)

1.5.1 الجداء السلمي

تعريف 1.5.1

يعرف الجداء السلمي على X، بأنه تطبيق من $X\times X$ في $\mathbb{K}$. يحقق من أجل كل x, y, z من X وكل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

1. $h(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, h(x,x) \geqslant 0.$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x,x).$
3. $h(x,y) = \overline{h(y,x)}.$
4. $h(x+y,z) = h(x,z) + h(y,z).$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle .,. \rangle$، عندها الزوج $(X, \langle .,. \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي.

نتيجة

1. $\forall x, y \in X \rightarrow \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$
2. التطبيق h المعرف من X في $\mathbb{R}$ كالتالي: $h(x) = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ يعرف نظيم على X.
يسمى هذا النظيم بالنظيم المشارك للجداء السلمي.
3. كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا.
عندها يكون:

$$\|x\| = \sqrt{h(x,x)}$$

نتيجة

في الفراغ الشبه هيلبرتي، من أجل كل y, x من X يكون:

1. (متراجحة كوشي-شوارتز- بونياكوفسكي)، $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$
2. (قاعدة متوازي الأضلاع)، $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$
3. $4\langle x, y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\left(\|x+iy\|^2\|x-iy\|^2\right)$

تعريف 2.5.1 يسمى الفراغ الشبه هيلبرتي بفراغ هيلبار، إذا كان تاما بالنسبة للنظيم المشارك لجدائه السلمي.

يرمز لفراغ هيلبار بالرمز H.

1.5.2 التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي، A و B مجموعتان من X حيث: $B \neq \varnothing \neq A$.

تعريف 3.5.1

1. يقال إن العنصرين (الشعاعيين) y, x من X متعامدان، إذا كان جداؤهما السلمي معدوما.
ويرمز لهما بالرمز: $x \perp y$. عندها نكتب :

$$x \perp y \Leftrightarrow\langle x, y\rangle=0$$

2. يقال إن العنصر x من X عمودي على المجموعة A، إذا كان عموديا على كل عنصر من A. ونكتب

$$x \perp A \Leftrightarrow\{\forall y \in A \rightarrow\langle x, y\rangle=0\}$$

يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.

3. يقال إن A و B متعامدان إذا تحقق :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B \rightarrow\langle x, y\rangle=0 .$$

ونكتب : $B \perp A$.

4. يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H، بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0 .
أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نظرية 6.1

(فيثاغورس):

العنصران y, x من X يكونا متعامدين، إذا وفقط إذا تحقق:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + iy\|^2, \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

في الحالة الخاصة $\mathbb{K} = \mathbb{R}$، y, x يكونا متعامدين، إذا وفقط إذا تحقق :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

تعميم النظرية:

إذا كانت $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$. حيث $\{x_n, \quad n \geqslant 1\}$ متعامدة مثنى مثنى، فإن: $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2$.

نتيجة

إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ حيث $\{x_n, \quad n \geqslant 1\}$ متعامدة مثنى مثنى متقاربة نحو العنصر x، فإن السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2$ متقاربة نحو $\|x\|^2$.

نظرية 7.1 [2]

إذا كانت M مجموعة مغلقة ومحدبة من H، و x من H حيث $x \notin M$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من M يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة M أي :

$$\forall x \in H, (x \notin M), \exists! y_0 \in M \quad : \quad d(x, y_0) = \|x - y_0\| = d_0(x, M).$$

نظرية 8.1

إذا كان X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً من H، و x عنصرا من H حيث $x \notin X_0$، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0، و يحقق $x - y_0 \perp X_0$. في هذه الحالة يسمى y_0 بالمسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0. ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

نتيجة

كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي : $x = y + z$ حيث y من X_0 و z عمودي على X_0 عندها يكون: $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

1.5.3 التحليل العمودي

ليكن H فراغاً لهيلبار، و X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً منه.

تعريف 4.5.1

يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H، بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0. أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة

1. ${X_0}^{\perp}$ هو المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H
2. ${X_0}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
3. كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z \quad /y \in X_0, \quad z \in {X_0}^{\perp}$$

4. $H = X_0 \oplus {X_0}^{\perp}$ ، عندها نقول إن ${X_0}^{\perp}$ و X_0 هما التحليل العمودي للفراغ H ونكتب:

$$z = P_{X_0^{\perp}} x \ , y = P_{X_0} x$$

حيث:
$P_{X_0}^{\perp}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$. و P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0.

قضية 1.5.1

تطبيق الإسقاط P_{X_0} ، هو تطبيق خطي، محدود ويحقق:

1. $P_{X_0} = P_{X_0}^2$
2. $\|P_{X_0}\| \leqslant 1$
3.

$$\forall x, y \in H \longrightarrow \langle P_{X_0} x, y \rangle = \langle x, P_{X_0} y \rangle. \tag{1.3}$$

نفس الشيء بالنسبة للإسقاط على $X_0^{\perp}$.

1.5.4 الجمل المتعامدة والمتجانسة، الأساس

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي و $A = \{x_i, \quad i \in I\}$ جملة عناصر من X، (I مجموعة دلائل كيفية).

تعريف 5.5.1

1. نقول إن الجملة A متعامدة، اذا كانت متعامدة مثنى مثنى.
2. نقول ان الجملة A متعامدة ومتجانسة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى وتحقق :

$$\forall i \in I: \quad \|x_i\| = 1$$

نتيجة

1. الجملة المتعامدة تكون مستقلة خطيا.
2. نقول أن الجملة A متعامدة ومتجانسة، إذا تحقق الشرط التالي :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

3. من كل جملة متعامدة يمكن تشكيل جملة متعامدة ومتجانسة.

قضية 2.5.1

إذا كانت A جملة متعامدة ومتجانسة في X، و X_i الفراغ المتولد من العنصر x_i (حيث $i \in I$) من A، فإنه من أجل كل x من X يكون :

$$P_{X_i}(x) = \langle x, x_i \rangle x_i \quad , i \in I. \tag{1.4}$$

العدد $\langle x, x_i \rangle$ $(i \in I)$ يسمى معامل فوري للعنصر x بالنسبة للجملة A، ونرمز له بالرمز α_i $(i \in I)$.

نظرية 9.1

(متراجحة بيسال):

إذا كانت $A = \{x_i, i \in I\}$ جملة متعامدة ومتجانسة في X، و $(i \in I)\alpha_i = \langle x, x_i \rangle$ معامل فوري للعنصر x بالنسبة للجملة A، فإن:

$$\forall x \in X \rightarrow \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 \leqslant \|x\|^2$$

المتراجحة الاخيرة تسمى متراجحة بيسال.

نظرية 10.1

(غرام شميدت):

إذا كان X فراغا شبه هيلبرتي، و $(x_i)_{i\in I}$ (على الاكثر قابلة للعد)، جملة مستقلة خطيا في X، فإنه يمكن إنشاء جملة $(z_j)_{j\in J}$، (J على الاكثر قابلة للعد)، من الجملة $(x_i)_{i\in I}$ تكون متعامدة ومتجانسة، وتولد نفس الفراغ الذي تولده الجملة $(x_i)_{i\in I}$.

قضية 3.5.1

الجملة المتعامدة والمتجانسة في الفراغ الشبه هيلبرتي القابل للفصل تكون على الأكثر قابلة للعد.

تعريف 6.5.1

ليكن X فراغاً شبه هيلبرتي و $(x_i)_{i\in I}$ جملة متعامدة ومتجانسة فيه.

1. ا لجملة $(x_i)_{i\in I}$ يقال إنها كلية في الفراغ X، إذا كان الفراغ المتولد منها كثيفا في X.
2. ا لجملة $(x_i)_{i\in I}$ يقال إنها أعظمية في الفراغ X، إذا لم يوجد عنصر من X يختلف عن الصفر وعمودي على كل عناصر $(x_i)_{i\in I}$، أي لاتوجد جملة متعامدة ومتجانسة في X تحويها.

قضية 4.5.1

في فراغ هيلبار $1 \Leftrightarrow 2$.

تعريف 7.5.1

يعرف الأساس في الفراغ الشبه هيلبرتي بأنه كل جملة متعامدة ومتجانسة وكلية.

نظرية 11.1

إذا كان X فراغاً شبه هيلبرتي و $(x_i)_{i\in I}$ جملة متعامدة ومتجانسة، فإن الإثباتات التالية متكافئة:

1. من أجل كل x, y من X تكون الجملة $(\alpha_i\overline{\gamma_i})_i$ قابلة للجمع، و مجموعها يحقق $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i\overline{\gamma_i} = \langle x, y\rangle$.
2. من أجل كل x من X يتحقق $\sum\limits_{i\in I}|\alpha_i|^2 = \|x\|^2$ (مساواة بارسفال).
3. من أجل كل x من X، الجملة $(\alpha_i x_i)_i$ تكون قابلة للجمع، و مجموعها يحقق $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i x_i = x$.
4. ا لجملة $(x_i)_{i\in I}$ كلية.

في حالة X هيلبار، أي $X = H$ يضاف الإثبات الآتي :

5. الجملة $(x_i)_{i\in I}$ أعظمية.

(α_i, γ_i معاملات فوري لـ x و y على التوالي بالنسبة للجملة $(x_i)_{i\in I}$).

نتيجة

الجملة $(x_i)_{i\in I}$ المتعامدة والمتجانسة في الفراغ الشبه هيلبرتي X، تكون أساساً له، إذا وفقط إذا حققت أحد الإثباتات $1, 2, 3, 4$. وفي فراغ هيلبار H إذا وفقط إذا تحقق أحد الإثباتات $1, 2, 3, 4, 5$.
الأساس $(x_i)_{i\in I}$ يسمى الأساس المتعامد و المتجانس.

قضية 5.5.1

إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ متتالية من الأشعة X. فإن $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ تكون أساس شاودار لـ X إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $x_n \neq 0$ من أجل كل n.

2. يوجد ثابت k بحيث من أجل كل إختيار لمتتالية القيم $\{a_i\}_{i=1}^{n}$، ومن أجل كل m, n من $\mathbb{N}$ $(n < m)$ يتحقق:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leqslant k\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$$

3. الغلاف الخطي للجملة $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ كثيف في X.

1.6 سلاسل فوري

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي، والجملة $A = \{x_n, n \geqslant 1\}$ جملة متعامدة فيه.

تعريف 1.6.1

ليكن x عنصرا من X.

1. يعرف معامل فوري للعنصر x بالنسبة للجملة A بأنه العدد:

$$\alpha_n = \frac{< x, x_n >}{\|x_n\|^2}, n \geqslant 1$$

2. تسمى سلسلة بالنسبة للجملة A، كل سلسلة من الشكل:

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n x_n$$

3. في حالة $\lambda_n = \alpha_n, n \geqslant 1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$ تسمى سلسلة فوري للعنصر x بالنسبة للجملة A.

4. كثير الحدود $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ يسمى كثير حدود فوري للعنصر x بالنسبة للجملة A.

نظرية 12.1

إذا كان X_n فراغ كل التركيبات الخطية لـ n حد الأولى من الجملة A، أي الجملة $A' = x_1, ..., x_n$.
فإنه لكل x من X يوجد أحسن تقريب له في X_n يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$y_x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

نتيجة

من أجل كل x من X تحقق متراجحة بيسال أي:

$$\sum_{n \geqslant 1} |\alpha_n|^2 \|x_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

نتيجة

إذا تحقق:

$$\forall n \geqslant 1 \rightarrow \|x_n\| \geqslant c > 0$$

فإن معامل فوري α_n لأي عنصر x من X يحقق: $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$

نظرية 13.1

إذا كان X فراغا لهيلبار أي $X = H$، فإن سلسلة فوري لأي عنصر x من H بالنسبة لأي جملة متعامدة A في H تكون متقاربة، ويكون عندها $\left(x - \sum_{n=1 n \geqslant 1}^{+\infty} \alpha_n x_n\right) \perp A$ حيث: $A = \{x_n, \quad n \geqslant 1\}$

نظرية 14.1

تكون سلسلة فوري لعنصر x من الفراغ الشبه هيلبرتي X متقاربة نحو العنصر x نفسه، إذا وفقط إذا تحققت المساواة التالية:

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geqslant 1} |\alpha_n|^2 \|x_n\|^2$$

التي تسمى مساواة بارسفيل.

الفصل

2

الأساس المعمم

2.0 مقدمة

في هذا الفصل نوضح إمكانية تعميم النتائج المحققة من أجل الأساس العادي في فراغ بناخ، في حالة الأساس المعمم. ونخص هنا تحليل عناصر الفراغ، تحديد معاملات فوري، دراسة الإسقاط، ... أيضا سنتطرق هنا إلى مفهوم التحليل الذري، هذا الأخير تمت دراسته ضمن نظريات فراغ بناخ، في سنوات الستينات من القرن الماضي.

2.1 الأساس المعمم في الحالة العامة

ليكن H فراغا لهيلبار قابلا للفصل.

تعريف 1.1.2

مجموعة العناصر $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ غير الصفرية من H، أي:

$$\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\} \subset H, \quad \varphi_n \neq 0, \quad n \geqslant 1$$

يقال أنها أساس معمم للفراغ H، إذا وجدت من أجل كل عنصر h من H، ثوابت موجبة β, α (حيث $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$) تحقق المتراجحة الإطارية التالية:

$$\alpha \|h\|_H^{\,2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \beta \|h\|_H^{\,2} \tag{2.1}$$

حيث $\langle .,. \rangle$ الجداء السلمي في H، و $\|.\|$ هو النظيم المرفق به، أي : $\|h\| = \sqrt{\langle h, h\rangle}, \quad h \in H$

الأعداد α, β تسمى: الحد الأدنى، الأعلى على التوالي للأساس المعمم $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$.

1. العدد k حيث $k = \frac{\beta}{\alpha}$ يسمى معامل الشرطية، ونرمز له بالرمز: $k(\Phi)$. في حالة $k(\Phi) = 1$، الأساس المعمم يسمى أساس معمم خشن.

2. الأعداد $\alpha_n = \langle h, \varphi_n \rangle$ حيث $n \geqslant 1$ تسمى متتالية معاملات العنصر h بالنسبة للأساس المعمم $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$.

نتيجة

ليكن الفراغ $L_2(]0,1[)$ مزود بالجداء السلمي:

$$\langle f, g \rangle =$$

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

و $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$ أساسا معمما في $L_2(]0,1[)$.

1. إذا كانت $(c_n)_{n \geqslant 1}$ متتالية أعداد تحقق : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$. فإن السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n$ متقاربة، عندها تكون :

$$\|\sum_{n\geqslant 1} c_n\varphi_n\|^2 \leqslant \beta \sum_{n\geqslant 1} |c_n|^2 \qquad (2.2)$$

2. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت f_k حيث $k \geqslant 1$، عناصر من H معرفة كالتالي:

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} c_n\varphi_n$$

فإنه من أجل كل $k \geqslant j$ حسب متراجحة شوارتز، وشروط الأساس المعمم يكون :

$$\|f_k - f_j\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} c_n\langle \varphi_n, f_k - f_j \rangle \leqslant \{\sum_{n=j+1}^{k} |c_n|^2\}^{1/2}\{\beta\|f_k - f_j\|^2\}^{1/2}$$

وهكذا وبإعتبار 2.2 يكون :

$$\|f_k - f_j\|^2 \leqslant \beta \sum_{n=j+1}^{k} |c_n|^2$$

نتيجة

إذا كان F مؤثرا من $L(H)$ معرفا كالتالي :

$$Fh = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \tag{2.3}$$

و $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$ أساس معمم في H فإن:

1. F يكون غير سالب، أي قرين لنفسه و $m_f \geqslant 0$ ويحقق:

$$\alpha \|h\|_H^{\,2} \leqslant \langle Fh, h \rangle \leqslant \beta \|h\|_H^{\,2}. \tag{2.4}$$

2. F^{-1} موجود وقرين لنفسه ويحقق :

$$\beta^{-1} \|h\|_H^{\,2} \leqslant \langle F^{-1}h, h \rangle \leqslant \alpha^{-1} \|h\|_H^{\,2} \tag{2.5}$$

قضية 1.1.2 [13]

ليكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم للفراغ H، من أجل كل شعاع كيفي h من H، توجد متتالية معاملات $\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ تحقق:

$$h = \sum_{n \geqslant 1} \beta_n \varphi_n \tag{2.6}$$

عندها يكون :

$$\beta^{-1} \|h\|_H^{\,2} \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |\beta_n|^2 \leqslant \alpha^{-1} \|h\|_H^{\,2} \tag{2.7}$$

إذا كانت $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ متتالية أخرى تحقق :

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \varphi_n$$

فإن $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ليست متتالية معاملات لأي شعاع من H. عندها نكتب :

$$\sum_{n \geqslant 1} |b_n|^2 = \sum_{n \geqslant 1} |\beta_n|^2 + \sum_{n \geqslant 1} |b_n - \beta_n|^2 \tag{2.8}$$

البرهان

بفرض القضية والنتيجة السابقة يمكن كتابة العنصر h كالتالي:

$$h = Fu \quad /\beta_n = \langle u, \varphi_n \rangle; \quad n \geqslant 1, \quad u \in H$$

ومنه وحسب النتيجة 2 تكون الصيغ 2.6 ، 2.7 صحيحة.

لبرهان 2.8 نفرض أن:

$\sum_{n\geqslant 1} |b_n|^2 < +\infty$ (لا يفقد عموم البرهان)، لاحظ أن:

$$0 = h - h = \sum_{n\geqslant 1} (b_n - \beta_n)\varphi_n$$

ومنه وبإعتبار $h = Fu$ و $\beta_n = \langle u, \varphi_n \rangle$، يكون $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} (b_n - \beta_n){\beta_n}^* = 0$ ، وعليه تكون 2.8 صحيحة.

من وحدانية المؤثر F^{-1} ينتج أن $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ليست متتالية معاملات.

نتيجة

1. إذا كانت $\Phi_* = \{{\varphi_n}', \quad n \geqslant 1\}$ مجموعة عناصر من H تحقق :

$$\varphi_n{}' = F^{-1}\varphi_n, \quad n \geqslant 1$$

فإن $\{{\varphi_n}', \quad n \geqslant 1\}$ يسمى الأساس المعمم المرافق لـ $\{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$.

2. إذا كان h شعاع كيفي و $u = F^{-1}h$. فإن

$$\sum_{n\geqslant 1} |\langle h, {\varphi_n}' \rangle|^2 = \sum_{n\geqslant 1} |\langle Fu, {\varphi_n}' \rangle|^2 = \sum_{n\geqslant 1} |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 = \langle Fu, u \rangle = \langle F^{-1}h, h \rangle$$

3. إذا كان h شعاع كيفي، فإنه يمكن تحليله بواسطة الأساس المعمم والأساس المعمم المرافق، على النحو التالي :

$$h = \sum_{n\geqslant 1} \langle h, {\varphi_n}' \rangle \varphi_n = \sum_{n\geqslant 1} \langle h, \varphi_n \rangle {\varphi_n}'. \tag{2.9}$$

نظرية 1.2[13]

ليكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم لـ H، و $\rho = \frac{2}{(\alpha+\beta)}$. من أجل كل شعاع كيفي h نعرف ما يلي :

$$h^{(1)} = h - \rho \sum_{n\geqslant 1} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - \rho \sum_{n\geqslant 1} \langle h^{(k)}, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad k \geqslant 1$$

إذا كان $h_k = \sum_{n\geqslant 1} \beta_n^{(k)} \varphi_n$ حيث: ${\beta_n}^{(k)} = \rho(h + h^{(1)} + h^{(2)} + ... + h^{(k-1)}, \varphi_n)$. فإن:

$$\|h - h_k\|_H \leqslant \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}\right)^k \|h\|_H \tag{2.10}$$

البرهان

المؤثر $T = I - \rho F$ يحقق :

$$|\langle Th, h\rangle| \leqslant \eta \|h\|_H{}^2$$

حيث $\eta = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$، وبالتالي T يكون قرينا لنفسه ويحقق :

$$\|Th\|_H \leqslant \eta \|h\|_H$$

ومنه يكون

$$\|h^{(1)}\|_H \leqslant \eta \|h\|_H$$

بشكل عام نحصل على :

$$\|h^{(k)}\|_H \leqslant \eta^k \|h\|_H \quad / \quad k = 0, 1, \ldots$$

ومنه وبإعتبار العلاقة

$$h^{(k+1)} - h^{(k)} = -\rho F h^{(k)}, \quad /k = 0, 1, \ldots$$

يكون

$$h^{(m)} - h = -h_m$$

وهكذا نحصل على :

$$\|h_m - h\|_H = \|h^{(m)}\|_H \leqslant \eta^m \|h\|_H$$

قضية 2.1.2 [13]

بحذف عنصر من عناصر الأساس المعمم ينتج أساس معمم، أو جملة غير تامة.

البرهان

نفرض أن φ_m العنصر المحذوف من الأساس المعمم $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$. من الصيغة 2.6 يمكن كتابة:

$$\varphi_m = \sum_{n \geqslant 1} \beta_n \varphi_n. \tag{2.11}$$

حيث :

$$\varphi_m{}' = F^{-1}\varphi_m, \quad \beta_n = \langle \varphi_m{}', \varphi_n \rangle$$

إذا كان $\beta_m \neq 1$ فإن:

$$\varphi_m = (1-\beta_m)^{-1} \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} \beta_n \varphi_n.$$

وبالتالي إذا كان h شعاع كيفي، فإن :

$$|\langle h, \varphi_m\rangle|^2 \leqslant |1-\beta_m|^{-2}\{\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\beta_n|^2\}\{\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\langle \varphi_n, h\rangle|^2\}$$

ومنه

$$\sum_{n\geqslant 1} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \{1+|1-\beta_m|^{-2}\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\beta_n|^2\} \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\langle h, \varphi_n\rangle| \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2$$

ومنه المجموعة الجزئية $\{\varphi_n, \quad n\geqslant 1; \quad n\neq m\}$ هي أساس معمم.

عندها في مكان المتراجحة الإطارية 2.1 تكون المتراجحة :

$$\alpha' \|h\|_H{}^2 \leqslant \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \beta \|h\|_H^2.$$

حيث :

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1+|1-\beta_m|^{-2}\sum\limits_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} |\beta_n|^2}$$

الآن نفرض في 2.11 أن : $\beta_m = 1$، فنتحصل على :

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} \beta_n \varphi_n = 0$$

ومنه

$$\sum_{n\geqslant 1} \beta_n{}' \varphi_n = 0$$

حيث $\beta_n{}' = \beta_n$. إذا كان $n\neq m$ $\beta_m{}' = 0,$

لكن $\sum\limits_{n\geqslant 1} 0\varphi_n = 0$. إذن من العلاقة 2.8 وبإعتبار $b_n = 0$ يكون:

$$2\sum_{n\geqslant 1} |\beta_n{}'|^2 = 0$$

بما أن $\beta_n = 0 \quad n\neq m,$

فإن $\beta_n = \langle \varphi_m{}', \varphi_n\rangle$ حيث: $\varphi_m{}' = F^{-1}\varphi_m$. عندها يكون الشعاع $\varphi_m{}'$ عمودي على كل

$$\{\varphi_n, \quad n\geqslant 1; \quad n\neq m\}$$

هذا يعني أن الجملة $\{\varphi_n, \quad n\geqslant 1; \quad n\neq m\}$ غير تامة.

عندها نكتب:

$$\langle \varphi_m{}', \varphi_n \rangle = \delta_{mn}. \tag{2.12}$$

2.2 أساس ريس

تعريف 1.2.2

مجموعة العناصر أو الجملة $\Psi = \{\psi_n, \quad n \geqslant 1\}$ من فراغ هيلبار H، يقال أنها أساس ريس للفراغ H، إذا كانت Ψ جملة تامة في H، ومن أجل كل جملة $c = \{c_n, \quad n \geqslant 1\}$ من ℓ^2 يكون:

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} |c_n|^2} \leqslant \|\sum_{n\geqslant 1} c_n\psi_n\|_H \leqslant \sqrt{\beta}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} |c_n|^2} \tag{2.13}$$

حيث α، β ثوابت تحقق: $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$

تعريف 2.2.2

الجملة $\Psi^* = \{\psi_n{}^*, \quad n \geqslant 1\}$ من H' يقال أنها مرافقة للجملة Ψ من H، إذا تحققت:

$$\langle \psi_n{}^*, \psi_m \rangle = \psi_n{}^*(\psi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

قضية 1.2.2 [3]

إذا كانت $\Psi = \{\psi_n, \quad n \geqslant 1\}$ أساس ريس للفراغ H. فإن الجملة $\Psi^* = \{\psi_n{}^*, \quad n \geqslant 1\}$ المرافقة لها، تكون تامة في H' وتحقق:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} \beta_n{}^2} \leqslant \|\sum_{n\geqslant 1} \beta_n\psi_n{}^*\|_{H'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} \beta_n{}^2}$$

أي أن Ψ^* أساس ريس للفراغ H'.

البرهان

بما أن Ψ تامة. فإنه من الصيـغة

$$\langle \psi_n{}^*, \psi_m \rangle = \psi_n{}^*(\psi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

نستنتج أن: Ψ^* أيضا تامة.

لاحظ:

$$\|\sum_{n\geqslant 1}\beta_n{\psi_n}^*\|_{H'} = \sup_{\{c_m\}:\|\sum_{m\geqslant 1}c_m\psi_m\|_H\leqslant 1}\langle\sum_{n\geqslant 1}\beta_n\psi_n^*,\sum_{n\geqslant 1}c_m\psi_m\rangle$$

$$= \sup_{\{c_m\}:\|\sum_{m\geqslant 1}c_m\psi_m\|_H\leqslant 1}\sum_{m\geqslant 1}\beta_m c_m \geqslant \frac{1}{\beta^{1/2}}\big(\sum_{m\geqslant 1}{\beta_m}^2\big)^{1/2}.$$

ذلك لأنه حسب 2.13 يكون:

$$\{\{c_m\}:\|\sum_{m\geqslant 1}c_m\psi_m\|_H\leqslant 1\}\supset\{\{c_m\}:\big(\sum_{m\geqslant 1}{c_m}^2\big)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\beta^{1/2}}\}$$

بنفس الطريقة نجد

$$\|\sum_{n\geqslant 1}\beta_n{\psi_n}^*\|_{H'} = \sup_{\{c_m\}:\|\sum_{m\geqslant 1}c_m\psi_m\|_H\leqslant 1}\sum_{m\geqslant 1}\beta_m c_m$$

ومنه وحسب الإحتواء

$$\{\{c_m\}:\|\sum_{m\geqslant 1}c_m\psi_m\|_H\leqslant 1\}\subset\{\{c_m\}:\big(\sum_{m\geqslant 1}{c_m}^2\big)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\alpha^{1/2}}\}$$

يكون

$$\|\sum_{n\geqslant 1}\beta_n{\psi_n}^*\|_{H'}\leqslant\frac{1}{\alpha^{1/2}}\big(\sum_{n\geqslant 1}{\beta_n}^2\big)^{1/2}$$

قضية 2.2.2 [3]

إذا كان $\Phi=\{\varphi_m,\ \ m\geqslant 1\}$ أساس ريس للفراغ H. فإنه من أجل كل f من H' يكون:

$$\alpha\|f\|_{H'}{}^2\leqslant\sum_{m\geqslant 1}\big(f(\varphi_m)\big)^2\leqslant\beta\|f\|_{H'}{}^2 \tag{2.14}$$

البرهان

نطبق القضية 1.2.2 لتحليل الشكل الدالي f وفق الأساس $\Psi^*=\{{\psi_m}^*,\ \ m\geqslant 1\}$:

$$f=\sum_{m\geqslant 1}f(\psi_m){\psi_m}^*$$

فنحصل على الصيغة 2.14.

نتيجة

بإستعمال التقايس بين H و H'، من الصيغة 2.14 وبإعتبار شروط القضية 1.2.2، من أجل كل $g \in H$ يكون:

$$\alpha\|g\|_H^{\ 2} \leqslant \sum_{m\geqslant 1} \langle g, \varphi_m \rangle^2 \leqslant \beta \|g\|_H^{\ 2} \tag{2.15}$$

نظرية 2.2[3]

الجملة $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$ من الفراغ H، تكون أساسا معمما له حدوده α، β حيث $(\alpha \leqslant \beta)$ إذا وفقط إذا وجد فراغ لهيلبار H_0 $(H_0 \supset H)$، وأساس ريس $\psi = \{\psi_n, \quad n \geqslant 1\}$ للفراغ H_0 بحيث يكون:

$$P : H_0 \to H$$

$$\psi_n \mapsto P(\psi_n) = \varphi_n, \quad n \geqslant 1$$

حيث P الإسقاط من H_0 على H.

البرهان

$[\Rightarrow]$

عندنا $\psi = \{\psi_n, \quad n \geqslant 1\}$ أساس ريس لـ H_0، أي:

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} |c_n|^2} \leqslant \|\sum_{n\geqslant 1} c_n\psi_n\|_{H'} \leqslant \sqrt{\beta}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} |c_n|^2}$$

حيث $\{c_n, \quad n \geqslant 1\} \in \ell^2$

$$P : H_0 \to H$$

$$P(\psi_n) = \varphi_n, \quad n \geqslant 1$$

لاحظ أنه من أجل كل g من H يكون

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \langle g, \psi_n \rangle; \quad n \geqslant 1$$

هذا يعني أنه من أجل كل g من H يكون

$$\alpha\|g\|_H^{\ 2} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \langle g, \varphi_n \rangle^2 \leqslant \beta \|g\|_H^{\ 2}$$

ومنه الجملة $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$ هي أساس معمم للفراغ H.

[$\Leftarrow$]

نفرض $(H=\ell^2)$ (هذا لا يخل بعموم البرهان).

لتكن $\hat{R}$ مصفوفة لانهائية عمودها j هو العناصر $j=1,2,\dots$؛ φ_j وسطرها i هو العناصر $i=1,2,\dots$؛ v_i، ومنه من أجل كل $\gamma=\{\gamma_n,\quad n\geqslant 1\}\in\ell^2$ يكون:

$$\alpha\|\gamma\|_{\ell^2}{}^2\leqslant\|\alpha_n v_n\|_{\ell^2}\leqslant\beta\|\gamma\|_{\ell^2}{}^2 \tag{2.16}$$

لتكن L لصاقة الغلاف الخطي للجملة $V=\{v_j,\quad j\in J\}$ في ℓ^2، (J مجموعة قابلة للعد). ومنه حسب الصيغة 2.16 يكون $\dim L=+\infty$ و V أساس ريس لـ L.

ليكن $w=\{w_i,\quad i\in I\}$ أساس متعامد كيفي في $L^{\perp}$ ويحقق:

$$\forall i\in I:\quad \alpha\leqslant\|w_i\|_{\ell^2}{}^2\leqslant\beta$$

حيث I مجموعة على الأكثر قابلة للعد، و $I\bigcap J=\varnothing$، نضع $\Lambda=I\bigcup J$، ونعرف جملة $\Gamma=\{\gamma_k,\quad k\in\Lambda\}$ من ℓ^2 حيث :

$$\gamma_k=\begin{cases} v_j & k=j\in J;\\ w_i & k=i\in I.\end{cases} \tag{2.17}$$

و γ أساس ريس لـ ℓ^2 عندها:

$$\sqrt{\alpha\sum_{k\in\Lambda}c_k{}^2}\leqslant\|\sum_{k\in\Lambda}c_k\gamma_k\|_{l^2}\leqslant\sqrt{\beta\sum_{k\in\Lambda}c_k{}^2} \tag{2.18}$$

فعلا ذلك لأن

$$\forall g\in\ell^2\to g=g_1+g_2\quad /g_1\in L,\quad g_2\in L^{\perp}$$

حيث $g_1=P_L(g),\quad g_2=P_{L^{\perp}}(g)$، أي:

$g_1=\sum_{j\in J}\alpha_j v_j,\quad g_2=\sum_{i\in I}\beta_i w_i$ ومنه و بإعتبار $g_1\perp g_2$ من 2.16 و 2.17 يكون:

$$\|g\|^2=\|g_L\|_{\ell^2}{}^2+\|g_{L^{\perp}}\|_{\ell^2}{}^2\leqslant\beta\sum_{i\in I}\alpha_i{}^2+\sum_{j\in J}\beta_j{}^2\|w_j\|_{\ell^2}{}^2\leqslant\beta(\sum_{i\in I}\alpha_i{}^2+\sum_{j\in J}\beta_j{}^2)$$

$$\|g\|^2=\|g_L\|_{\ell^2}{}^2+\|g_{L^{\perp}}\|_{\ell^2}{}^2\geqslant\alpha\sum_{i\in I}\alpha_i{}^2+\sum_{j\in J}\beta_j{}^2\|w_j\|_{\ell^2}{}^2\geqslant\alpha(\sum_{i\in I}\alpha_i{}^2+\sum_{j\in J}\beta_j{}^2)$$

هذا يعني أن 2.18 محققة.

نعرف المصفوفة $\hat{R}$ كالتالي :

$$\hat{R}=\{r_{kj},\quad k\in\Lambda,j\in\mathbb{N}\}$$

حيث من أجل كل $k \in \Lambda$ و $j \in \mathbb{N}$

$$r_{kj} = \begin{cases} (v_k)_j & k \in \mathbb{N}; \\ (w_k)_j & k \in M. \end{cases}$$

ليكن $\psi_j \; j = 1, 2, \ldots$ العمود j في المصفوفة $\hat{R}$، أي الجملة $\{r_{kj}, \quad k \in \Lambda\} \subset \ell^2(\Lambda)$، وليكن $P_0 = P : \ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\mathbb{N})$

لاحظ أن:

$$P_0(\psi_j) = \varphi_j; \quad j = 1, 2, \ldots$$

نبرهن أن $\{\psi_j\}$ هي أساس ريس في $\ell^2(\Lambda)$:

من الصيغة 2.18، من أجل كل $c = \{c_k\}_{n=1}^{+\infty} \in \ell^2(\Lambda)$ يكون:

$$\alpha \|c\|_{\ell^2}{}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \langle c, \psi_j \rangle^2 \leqslant \beta \|c\|_{\ell_2}{}^2 \tag{2.19}$$

من 2.18 تكون الجملة $\{\psi_j\}_{n=1}^{+\infty}$ تامة في $\ell^2(\Lambda)$.

من أجل كل متتالية $\rho = \{\rho_j\}_{n=1}^{+\infty}$ من $\ell^2(\Lambda)$. وبإعتبار الصيغة 2.18 يكون:

$$\left\|\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j \psi_j \right\|_{l_2}^2 = \sum_{k \in \Lambda} \langle \rho, \gamma_k \rangle^2 \tag{2.20}$$

بما أن Γ أساس ريس لـ ℓ^2، من 2.15، 2.19 و 2.20 يكون:

$$\alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j{}^2 \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j \psi_j \right\|_{l^2}^2 \leqslant \beta \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j{}^2$$

نتيجة

كل أساس معمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ في فراغ هيلبار H، هو الإسقاط العمودي لأساس ريس $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ للفراغ H_0 على الفراغ H.

مفهوم دافين وشاشفيرم $(Duffin - Schaeffer[13])$ للأساس المعمم وجد من خلاله العديد من العمليات والحلول لمشاكل تمثيل الداليات في جمل محددة من مختلف داليات الفراغ، وهذا بفضل الخصائص الآتية:

أولا:

من أجل الأساس المعمم تحقق النظرية التالية:

نظرية $[3]3.2$

إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم في فراغ هيلبار H، فإنه ومن أجل كل شعاع $h \in H \ni$ توجد سلسلة عددية $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty} \ni l^2$ حيث:

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n \tag{2.21}$$

ثانيا:

النشر حسب الأساس المعمم 2.21 يملك خوارزمية خطية لحساب الثوابت بالضبط وهي:

توجد جملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \ni H$ بحيث: من أجل كل شعاع h من H، تكون السلسلة العددية $\{\langle h, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ من الفراغ l^2 وتحقق:

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle h, \varphi_n{}^*\rangle \varphi_n \tag{2.22}$$

ثالثا:

من أجل كل أساس معمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$، يعرف الأساس المعمم الثنوي القانوني بشكل وحيد كالتالي: $\{\varphi_n{}^*\}_{n=1}^{+\infty}$ ويحقق خصائص الأعظمية الآتية:

من بين كل السلاسل العددية $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ التي تحقق 2.21، سلسلة المعاملات $\{\langle h, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ الموجودة في 2.22 تملك أقل نظيم في l^2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle h, \varphi_n{}^*\rangle|^2 \tag{2.23}$$

قضية 3.2.2 [3]

إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم بالنسبة لفراغ هيلبار H، P يمثل المسقط العمودي على H، فإن $\{P\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم بالنسبة لـ PH. وعليه:

إذا كان $(\varphi_n, \varphi_n{}^*)$ أساس ريس للفراغ H حدوده β, α، فإن $\{P\varphi_n{}^*\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم ثنوي لـ $\{P\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

البرهان

من أجل كل شعاع h من PH تحقق المساواة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle h, P\varphi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle Ph, \varphi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle h, \varphi_n\rangle|^2$$

وهو الجزء الأول من البرهان. من أجل أن نبرهن الجزء الثاني، ليكن من h من PH حيث:

$\sum_{n=1}^{+\infty}\langle h, P\varphi_n{}^*\rangle P\varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle h, \varphi_n{}^*\rangle P\varphi_n = P(\sum_{n=1}^{+\infty}\langle h, \varphi_n{}^*\rangle\varphi_n) = Ph = h$ ، أي أن:

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle h, \varphi_n{}^*\rangle\varphi_n$$

2.3 التحليل الذري

تعريف 1.3.2

يعرف فراغ بناخ للمتتاليات العددية المرفق بفراغ بناخ X بأنه فراغ المتتاليات العددية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ التي من أجله تكون الأشكال الخطية f_n من X^* المعرفة كالتالي:

$$f_n(x) = x_n; \quad n \geqslant 1$$

مستمرة، ونرمز له بـ X_d.

الأساس في X_d هي الجملة $(e_n)_{n\geqslant 1}$ المعرفة كالتالي: $n \geqslant 1, \quad e_n = (0, 0, ..., 0, 1_n, 0, ...)$

تعريف 2.3.2

ليكن X فراغ بناخ، وليكن X_d فراغ المتتاليات العددية ذات الدلائل الطبيعية المرفق بالفراغ X ولتكن $(y_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من عناصر الفراغ X^*، و $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصرها من الفراغ X.

إذا كان:

1. $(\langle x, y_n\rangle) \in X_d$ من أجل كل x من X. (إصطلاحا نكتب: $y_n(x) = \langle x, y_n\rangle$)
2. النظيمين $\|x\|_X$ و $\|\langle x, y_n\rangle\|_{X_d}$ متكافئين.
3. $x = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x, y_n\rangle x_n$ من أجل كل x من X.

فإنه يقال أن:

$((x_n), (y_n))$ تحليل ذري للفراغ X بالنسبة للفراغ X_d.

إذا كان التكافؤ معطى بالعلاقة:

$$\alpha\|x\|_X \leqslant \|(\langle x, y_n\rangle)\|_{X_d} \leqslant \beta\|x\|_X.$$

فإن α و β تسمى: الحدود الذرية لـ $((x_n), (y_n))$.

تعريف 3.3.2

ليكن X فراغ بناخ، وليكن X_d فراغ المتتاليات العددية ذات الدلائل الطبيعية المرفق بالفراغ X
لتكن (y_n) متتالية من الفراغ X^*، S مؤثر معطى من X_d في X
إذا كان:

1. $(\langle x, y_n \rangle) \in X_d$، من أجل كل x من X
2. النظيمين $\|x\|_X$، و $\|(\langle x, y_n \rangle)\|_{X_d}$ متكافئين.
3. S مؤثر خطي محدود، و $S(\langle x, y_n \rangle) = x$ من أجل كل x من X

فإنه يقال أن: $((y_n), S)$ أساس بناخ المعمم على X بالنسبة لـ X_d
إذا كان التكافؤ معطى بالعلاقة:

$$\alpha\|x\|_X \leqslant \|(\langle x, y_n \rangle)\|_{X_d} \leqslant \beta\|x\|_X$$

فإن α، β هي حدود الأساس المعمم $((y_n), S)$.

قضية 1.3.2 [12]

ليكن X فراغ بناخ، و X_d فراغ المتتاليات العددية ذات الدلائل الطبيعية المرفق بالفراغ X
ولتكن $(y_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية مكونة من عناصر الفراغ X^*، S مؤثر معطى من X_d في X.
إذا كانت (e_n) أساس في X_d. فإن العبارتين الآتيتين متكافئتين:

1. $((y_n), S)$ أساس بناخ المعمم على X بالنسبة لـ X_d و (e_n) أساس شاودار $(Schawder \;\; basis)$ (تعريف 1.2.1، تعريف 2.2.1) على X
2. $((y_n), (S(e_n)))$ تحليل ذري على X بالنسبة لـ X_d.

البرهان

بما أن (e_n) أساس لـ X_d فإنه من التعريف 1.3.2 يكون:
$X \ni x_n = S(e_n) \in X$ من أجل كل n، وبالتالي تكون الشروط 1, 2 و 3 في التعريف 2.3.2 مكافئة للشروط 2.3.1 في التعريف 3.3.2 ومنه نستنتج أن العبارة 1 تكافئ العبارة 2.

قضية 2.3.2 [12]

لكل فراغ بناخ قابل للفصل، يوجد أساس بناخ المعمم، حدوده تحقق: $\alpha = \beta = 1$.

البرهان

إذا كان X فراغ بناخ قابل للفصل. فإننا نستطيع إختيار المتتالية $(y_n)_{n\geqslant 1} \ni X^*$ حيث $\|y_n\| = 1$ من أجل $n = 1, 2, \dots$، ومن أجل كل x من X:

$$\|x\| = \sup_n |y_n(x)| \tag{2.24}$$

ليكن X_d فراغ جزئي من الفراغ ℓ^∞ معطى بـ:

$$X_d = \{(\langle x, y_n\rangle);\quad x \in X\}$$

وليكن S مؤثر من X_d، في X معرف كالتالي:

$$S(\langle x, y_n\rangle) = x$$

لاحظ من المساواة 2.24 ينتج أن S تقابل من X على X_d و $((y_n), S)$ أساس بناخ المعمم على X بالنسبة لـ X_d.

تعريف 4.3.2

يقال إن الجملة $\{\varphi_n,\quad n \geqslant 1\}$ أساس معمم لفراغ المعاملات X_d، إذا كان:
من أجل كل شكل خطي مستمر $f \in E'$ معامل فوري له، أي:

$$\langle f, \varphi_n\rangle := f(\varphi_n);\quad n = 1, 2, \dots$$

يحقق العلاقة:

$$\alpha \|f\|_E{}' \leqslant \|\{\langle f, \varphi_n\rangle\}_{n=1}^{+\infty}\|_Y \leqslant \beta \|f\|_E{}' \tag{2.25}$$

حيث β, α ثوابت تحقق:

$$0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$$

وهي غير متعلقة بـ f.
إذا كان $E = H$، $X_d = \ell^2$، فإن العلاقة 2.25 تكتب كالتالي :

$$\alpha \|f\|_H{}^2 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \beta \|f\|_H{}^2 \tag{2.26}$$

أي أن: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ يكون أساس معمم حسب التعريف 1.1.2 وعليه الصيغة 2.25 هي تعميم للصيغة 2.26 في حالة فراغ بناخ.

2.4 نظرية التمثيل

تعريف 1.4.2

يعرف فراغ المعاملات بالنسبة لـ Φ ويرمز له بـ X_Φ، بأنه فراغ كل المتتاليات العددية $x=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ التي من أجلها تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n$ متقاربة وفق النظيم:

$$\|x\|_{X_\Phi}=\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{k=1}^{n} x_k\varphi_k\|_X \tag{2.27}$$

الفراغ X_Φ يكون تاما بإعتبار النظيم 2.27

الآن نلاحظ أن كل شكل خطي مستمر f أي المتتالية $(f(\varepsilon_n))$ (حيث (ε_n) أساس طبيعي). على الفراغ النموذجي Y، هذا الشكل الخطي المستمر يعرف بشكل وحيد متتالية قيمه المأخوذة على الأساس الطبيعي. ومن ثم يكون الفراغ الثنوي X^* متقايسا مع فراغ بناخ F، عناصره هي المتتاليات العددية $y=\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ عندها يكون :

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n\geqslant 1} x_n y_n \tag{2.28}$$

الصيغة 2.28 تمثل الشكل العام للأشكال الخطية المستمرة على الفراغ النموذجي Y.

تعريف 2.4.2

نقول أن الجملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset X\backslash\{0\}$ هي أساس معمم في فراغ بناخ X بالنسبة للفراغ النموذجي Y، إذا وجد ثابتين α و β حيث : $0<\alpha\leqslant\beta<+\infty$، بحيث تكون من أجل أي شكل خطي مستمر $g\ni G$، تكون متتالية معاملات فوري له $\{\langle\varphi_n,g\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ تحقق المتراجحة الآتية :

$$\alpha\|g\|_G\leqslant\|\{\langle\varphi_n,g\rangle\}_{n=1}^{+\infty}\|_Y\leqslant\beta\|g\|_G \tag{2.29}$$

المؤثر $T:G\longrightarrow Y$ المعرف بـ : $Tg=\{\langle\varphi_n,g\rangle\}_{n=1}^{+\infty};\quad g\in G$ يسمى بـ : مؤثر التحليل.

المؤثر $S:X\longrightarrow F$ المعرف بـ : $Sx=\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n,\quad x=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\in X$ يسمى بـ : مؤثر التركيب.

T و S مؤثران خطيان محدودان ويحققان:

$$T=S^*$$

تعريف 3.4.2

يعرف الفراغ النموذجي بأنه كل فراغ بناخ قابل للفصل عناصره عبارة عن متتاليات عددية $(x_n)_{n\geqslant 1}$، أساسه الجملة $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$، $\varepsilon_n=(0,0,...,1_n,0,...)$ يسمى $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ الأساس الطبيعي له.

نتيجة

إذا كان Y فراغ نموذجي أساسه الجملة $E=\{\varepsilon_n,\quad n\geqslant 1\}$ فإن فراغ المعاملات لـ E يكون هو Y أي: $X_E=Y$.

إذا كان $F=G=H$ فراغ هيلبار، و $X=Y=\ell^\infty$ فإن المتراجحة الإطارية 2.29 تتطابق مع المتراجحة الإطارية 2.1 وهذا من التعريف 1.1.2.

نظرية 4.2[9]

نظرية التمثيل

إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم في F بالنسبة لـ X، فإنه من أجل أي شعاع f من F توجد متتالية عددية $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من X بحيث:

$$f=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n \tag{2.30}$$

وهذا يعني أن مؤثر التركيب S يطبق الفراغ X على الفراغ F. أي أنه غامرا.
بمفهوم آخر:
كل أساس معمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ لـ F بالنسبة لـ X يكون جملة تمثيل.

قضية 1.4.2 [8]

كل جملة تمثيل $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من $X\backslash\{0\}$ تكون أساس معمم في F بالنسبة لـ فراغ المعاملات المرتبط بالأساس المعمم X_Φ.

البرهان

بما أن Φ هي جملة التمثيل، فإن S من X_Φ في F.
لنبرهن أن S محدود:
نعتبر متتالية المؤثرات ذات البعد المنته S_n من X_Φ في F. معرفة كالتالي:

$$S_nx=\sum_{k=1}^{n} x_k\varphi_k;/\quad n=1,2,\ldots.$$

وهي مؤثرات محدودة على الفراغ X_Φ. بما أن :
$Sx=\lim_{n\to+\infty}S_nx$ من أجل كل x من X_Φ. فإنه وحسب مبدأ المحدودية بإنتظام لبناخ شتاينهاوس يكون:

$$\sup_{n\geqslant 1}\|S_n\|_{X_\Phi\longrightarrow F}=M<+\infty$$

ومنه $\|S\| \leqslant M$.

المؤثر القرين S^* من G في ${X_\Phi}^*$ يعطى بالعلاقة:

$$S^*g = \{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$$

يكون متباينا.

ومنه نستنتج أن:

$$\alpha\|g\|_G \leqslant \|S^*g\|_{X_\Phi} \leqslant \beta\|g\|_G$$

يعني تحقق المتراجحة الإطارية 2.29 من أجل $Y = X_\Phi$.

عندها تكون الجملة $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ هي أساس معمم في الفراغ F بالنسبة لـ X_Φ.

تعريف 4.4.2

لتكن $\Phi = \{\varphi_n, \quad n \geqslant 1\}$ أساسا معمما لفراغ بناخ X. المؤثر T المعرف كالتالي:

$$T\varepsilon_n = \varphi_n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

حيث $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ الأساس العادي في فراغ المعاملات X_Φ. يسمى بـ: المؤثر المشارك للأساس المعمم.

تعريف 5.4.2

الجملة $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من فراغ بناخ X، يقال أنها جملة تقارب مع فراغ المعاملات X_Φ، إذا كانت من أجل كل متتالية عددية $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X_\Phi$، السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n$ متقاربة.

تعريف 6.4.2

الجملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من فراغ بناخ X، تسمى جملة تمثيل مع فراغ المعاملات، إذا وجدت من أجل كل $g \in E$، متتالية عددية $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X_\Phi$ تحقق:

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n$$

قضية 2.4.2 [8]

المؤثر T المعرف من X_Φ في X المشارك للأساس المعمم يكون محدودا.

البرهان

ليكن X_0 فراغ المتتاليات العددية، $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من X_Φ التي عناصرها تختلف عن الصفر.

$(\bar{X}_0 = X)$ و $(X_0 \subset X)$ من أجل كل x من X_0 يكون:

$$\|Tx\|_X = \|T\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varepsilon_n\|_X = \|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n\|_X = \sup_{\|f\|_{X'}\leqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} x_n\langle f, \varphi_n\rangle$$
$$\leqslant \sup_{\|f\|_{X'}\leqslant 1} \|\{x_n\}\|_X \|\{\langle f, \varphi_n\rangle\}\|_Y \leqslant \beta\|x\|_X$$

قضية 3.4.2 [8]

المؤثر T^* المرافق للمؤثر T المشارك للأساس المعمم، يكتب من الشكل:

$$T^*f = \{\langle f, \varphi_n\rangle\}_{n=1}^{+\infty}, \quad f \in X'$$

البرهان

عندنا

$$\langle T^*f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \langle f, \varphi_n\rangle = \langle y, x\rangle$$

حيث

$$y = \{\langle f, \varphi_n\rangle\}_{n=1}^{+\infty}; \quad \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

نظرية 5.2[8]

ليكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم لفراغ المعاملات X_Φ. من أجل كل $g \in E$، توجد متتالية عددية $x = \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ تحقق:

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \varphi_n \tag{2.31}$$

البرهان

حسب القضية 2.4.2، ومن تعريف الأساس المعمم يكون:

$$\alpha\|f\|_{X'} \leqslant \|T^*f\|_Y \leqslant \beta\|f\|_{X'}$$

ومنه المؤثر T^* متباين. وبالتالي حسب القضية 1.3.1 المؤثر T يكون غامرا. وعليه من أجل كل $g \in E$ يوجد $x \in Y$ حيث:

$$g = Tx$$

ومنه تكون الصيغة 2.31 محققة.

نظرية 6.2[8]

الجملة غير الصفرية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من فراغ بناخ X، تكون أساسا معمما لفراغ المركبات X_Φ، إذا وفقط إذا كانت جملة تقاربية وجملة تمثيل مع الفراغ X_Φ نفسه.

البرهان

برهان اللزوم يستنتج من القضية 2.4.2 والنظرية 5،2.
بفرض $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ جملة تقاربية وتمثيلية مع فراغ المركبات X_Φ. يكون:

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \varphi_n$$

معرفا جيدا وغامرا من X في E.
لنبرهن أن T محدود:
نستعمل نظرية بناخ شتاينهاوس:
نعرف المؤثر T_n; $n \geqslant 1$ كالتالي: $T_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots$
بما أن: $\lim_{n\to+\infty} T_n x = Tx$، فإن: $\|T_n x\|$ محدود حسب n من أجل كل x.
ومنه يكون:

$$\|T_n\| \leqslant c, \quad n \geqslant 1$$

وعليه يكون:

$$\|Tx\| = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\| \leqslant c\|x\|$$

أي أن T محدود.
حسب القضية 1.3.1 المؤثر القرين T^* يكون متباينا، أي يحقق:

$$\gamma\|f\|_{E'} \leqslant \|T^* f\|_Y \leqslant c\|f\|_{E'}$$

حسب القضية 2.4.2

$$T^* f = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n=1}^{+\infty}$$

وعليه يكون : $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم مع فراغ المركبات.

نظرية 7،2[8]

من أجل كل جملة تمثيل $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$، يوجد فراغ بناخ X_Φ للمتتاليات العددية بحيث يكون: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم مع فراغ معاملاته هو X_Φ.

البرهان

نضع

$$X_\Phi=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\}$$

حيث $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\varphi_n$ متقاربة في X.

X_Φ هو فراغ المعاملات بالنسبة للجملة Φ، وهو فراغ شعاعي نظيمي، مع النظيم:

$$\|x\|_{X_\Phi}=\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{k=1}^{n}x_k\varphi_k\|_E$$

لنبرهن أنه فراغ بناخ:

لتكن $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty}\subset X$ متتالية كوشي، أي:

$$\|x^{(m+p)}-x^{(m)}\|_{X_\Phi}=\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)})\varphi_k\|_X\rightarrow 0,\quad (n\longrightarrow +\infty)$$

من الصيغة الأخيرة نستنتج أن المتتاليات العددية $\{x_n^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty}$ حيث $n\geqslant 1$ لكوشي في الفراغ التام، ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n^{(m)}=x_n;\quad n\geqslant 1$$

نضع $x=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$، ونبرهن أن:

$$\lim_{m\to+\infty}x^{(m)}=x$$

عندنا

$$\exists n_0,\forall m\geqslant n_0,\quad \forall n\geqslant 1\longrightarrow \|x^{(m+p)}-x^{(m)}\|_{X_\Phi}=\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)})\varphi_k\|_E\leqslant\varepsilon$$

من أجل كل n و $p\to+\infty$ يكون

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^{(m)})\varphi_n\|_E\leqslant\varepsilon$$

ومنه

$$\forall\varepsilon>0,\exists m_0\geqslant 1,\forall m\geqslant m_0\longrightarrow\|x-x^{(m)}\|\leqslant\varepsilon$$

أي

$$x=\lim_{m\to+\infty}x^{(m)}$$

ومنه X_Φ لبناخ. نلاحظ من ناحية ثانية:

$$\|x-\sum_{i=1}^{+\infty}x_i\varepsilon_i\|_{X_\Phi}=\sup_{p\geqslant 1}\|\sum_{k=m+1}^{m+p}x_k\varphi_k\|_E\longrightarrow 0$$

ومنه

$$x=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i\varepsilon_i$$

من أجل كل $x\in X_\Phi$.

من تعريف الجملة $\{\varepsilon_i\}_{n=1}^{+\infty}$، نستنتج وحدانية التمثيل السابق. وبالتالي الجملة $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ تكون جملة تقاربية وتمثيلية مع فراغ المعاملات X_Φ، وبالتالي حسب النظرية 4.2 تكون الجملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم فراغ معاملاته هو X_Φ.

2.5 الأساس المعمم كإسقاط لأساس

ليكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس لفراغ بناخ X، و P إسقاط مستمر من E على الفراغ الجزئي F من E.

واضح أن الجملة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ حيث $\varphi_n=P\psi_n\ \ n\geqslant 1;$ هي جملة تمثيل في F. وبحذف العناصر الصفرية منها، حسب النظرية 7.2 أعلاه، تكون هاته الجملة أساسا معمما. كما يمكن أخذ فراغ المعاملات هو نفسه فراغ معاملات الأساس $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

تعريف 1.5.2

نقول أن الأساس المعمم $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ في F بالنسبة لـ X، هو أساس معمم إسقاطي، إذا وجد فراغ بناخ E يحوي F كفراغ جزئي مغلق $(E\supseteq F)$.

الأساس $\Psi=\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ في E، فراغ المعامل X_Ψ بالنسبة له يطابق الفراغ النموذجي X للأساس المعمم Φ.

تعريف 2.5.2

ليكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم لـ F مع فراغ المعاملات X.

يعرف فراغ المعاملات للسلاسل المعدومة بأنه الفراغ الجزئي المغلق من X المعرف كالتالي:

$$N=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\in X,\ \ \sum_{n=1}^{+\infty}x_n\varphi_n=0\}$$

نظرية 8.2[9]

إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم لفراغ بناخ F، مع فراغ المعاملات X.

فإنه يوجد أساس $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ لفراغ بناخ E $(F\subset E)$، مع فراغ معاملاته يطابق X.

و $\varphi_n=Pe_n,\ \ n\geqslant 1$. حيث P الإسقاط المستمر من E على F إذا وفقط إذا كان فراغ المعاملات للسلاسل المعدومة N متمما في الفراغ X.

بتعبير آخر:
إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم في F بالنسبة لـ X، فإن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ يكون أساس معمم إسقاطي إذا وفقط إذا كان N فراغا جزئيا متمما في الفراغ X.

البرهان

$[\Leftarrow]$
نفرض ان الأساس موجود.
من العلاقة بين $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$، و $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $(e_n \longrightarrow \varepsilon_n)$، وبإعتبار J الإيزومورفيزم بين X و E.
بوضع $\Pi = J^{-1}PJ$ يكون:

$$\Pi x = 0 \Leftrightarrow PJx = 0 \Leftrightarrow P(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\varphi_n = 0 \Leftrightarrow x \in N$$

ومنه $ker\Pi$ تطابق N. وعليه يكون $X = ker\Pi \oplus Im\Pi$، أي أن N هو متمم في الفراغ X.
$[\Rightarrow]$
نفرض أن N متمم في الفراغ X، أي أن: $X = M \oplus N$، ومنه يوجد إسقاط مستمر $\Pi : X \longrightarrow X$ على الفراغ M حيث $ker\Pi = N$. نضع $E = F \times N$ ونعرف $J : X \longrightarrow E$ كالتالي

$$Jx = (Tx_M, x_N); \quad x = x_M + x_N \quad /x_M \in M; \quad x_N \in N$$

حيث T المؤثر المشارك للأساس المعمم.
لنبرهن أن J يعتبر إيزومورفيزم للفراغ X و E :
من تعريف الفراغ E والمؤثر J يكفي برهان أن $T\mid_M$ (إقتصار T على M) يعتبر إيزومورفيزم بين M و E، وهذا واضح، لأنه من غمور T و $kerT = N$، ومنه J إيزومورفيزم.
وعليه نستنتج أن الجملة $\{e_n = J\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس للفراغ E مع فراغ المعاملات X.
بمطابقة F مع الفراغ الجزئي من E المكون من الأشعة من النوع $(g, 0)$، حيث $g \in F$ عندها F يكون متمما في E، والإسقاط المرفق به يكون من الشكل:

$$P(g, x_N) = (g, 0) \equiv g$$

واضح أن: $\Pi = J^{-1}PJ$ ومنه:

$$Pe_n = PJ\varepsilon_n = J\Pi\varepsilon_n = (T\Pi\varepsilon_n, 0) \equiv T\Pi\varepsilon_n = T\varepsilon_n = \varphi_n; \quad n \geqslant 1$$

من المساواة قبل الأخيرة $\Pi\varepsilon_n \in M$ ومنه $\varepsilon_n - \Pi\varepsilon_n \in N = ker(T)$. وعليه تكون:

$$T(\varepsilon_n - \Pi\varepsilon_n) = 0$$

2.6 الخوارزميات الخطية للتحليل وفق الأساس المعمم

تعريف 1.6.2

نقول أنه عندنا خوارزمية خطية للتحليل وفق الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ في F بالنسبة لـ X، إذا وجدت جملة $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^{+\infty}$ للأشكال الخطية المستمرة في الفراغ F بحيث: من أجل كل شعاع f من F، السلسلة العددية $\{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ تنتمي إلى X و

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \varphi_n{}^*\rangle \varphi_n \tag{2.32}$$

نظرية 9.2[9]

ليكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس معمم في F بالنسبة لـ X. إذن توجد خوارزمية خطية وفق الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$، إذا وفقط إذا كان هذا الأساس المعمم إسقاطي.

البرهان

$[\Leftarrow]$

ليكن T مؤثرا من $l(F, X)$ معرف كالتالي:

$$Tf = \{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$$

إستنادا إلى التمثيل 2.32 يكون: $ST = I$، حيث I هو المؤثر الحيادي في الفراغ F.
هذا يعني أن مؤثر التركيب $S : X \longrightarrow F$ المرتبط بـ الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ يكون عبارة عن إنسحاب.
نعتبر متتالية المؤثرات المحدودة ذات البعد المنته

$$T_n f = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k{}^*\rangle \varepsilon_k; \quad n = 1, 2, ...$$

بما أن $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساس في X، فإن $Tf = \lim_{n\to+\infty} T_n f$ من أجل كل f من F.
وبإعتبار نظرية بناخ شتاينهاوس يكون:

$$\|T\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| < +\infty$$

$N = ker(S)$ نواة الإنسحاب S هي متممة في X ، ذلك لأنه بوضع $M = T(f)$، من أجل كل x من X نضع: $x_0 = x - TSx$ و $x' = TSx$ يكون:

$$Sx_0 = Sx - STSx = Sx - Sx = 0$$

وعليه تكون $x' \in M$,$x_0 \in N$ و $x = x_0 + x'$.

من ناحية ثانية عندنا $N \cap M = \{0\}$. ذلك لأنه إذا كان: $x \in N$ و $x \in M$، يكون $Sx = 0$،
ويوجد شعاع $f \in F$ بحيث $x = Tf$ ومنه نستنتج:
$f = STf = Sx = 0$ و $x = Tf = 0$، وبالتالي يكون: $X = N \oplus M$.
ومنه الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ يكون إسقاطا.
$[\Rightarrow]$
نستعمل نفس رموز برهان النظرية 8.2 وبإعتبار هاته النظرية لدينا:
لاحظ أنه إذا كان: $T : E \longrightarrow X$ إقتصار الإيزومورفيزم: $J^{-1} : F \longrightarrow X$ حيث $(F \subset E)$ فإن:

$$STf = PJJ^{-1}f = Pf = f$$

من أجل كل f من F.
الشكل الدالي ${\varphi_n}^*$ يعرف كتركيب للشكل الخطي $f_n(x) = x_n$ والمؤثر T، أي:

$$\langle f, {\varphi_n}^* \rangle = f_n(Tf); \quad f \in F$$

واضح أن $Tf = \{\langle f, {\varphi_n}^* \rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ من X. عندها يكون التمثيل 2.32 صحيح، ذلك لأن:

$$f = STf = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, {\varphi_n}^* \rangle \varphi_n$$

2.7 التحليل وفق الأساس المعمم

نظرية 10.2[9]

إذا كان $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ أساسا معمما في F بالنسبة لـ X. و N فراغ المعاملات من السلاسل المعدومة لهذا الأساس المعمم. فإن الشرطين الآتين متكافئين:

1. يوجد مؤثر خطي $P : X \longrightarrow N$ يحقق:

$$\|x - Px\|_X = \inf_{x_0 \in N} \|x - x_0\|$$

وهذا من أجل كل x من X. P يسمى مؤثر مقرب

2. توجد خوارزمية تحليل خطية 2.32، بحيث من بين كل المتتاليات العددية $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ من X التي تحقق 2.30، تكون المتتالية $\{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ من معاملات التمثيل 2.32 تملك أصغر نظيم في X. أي:

$$\|\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}\|_X \geqslant \|\{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}\|_X \qquad (2.33)$$

البرهان

نلاحظ أن المؤثر الخطي المقرب P إسقاط مستمر من X على N، على طول $M = ker(P)$. كما أن خاصية التقريب للمسقط P مكافئة لشرط أن يكون الإسقاط $Q = I - P$ من X على M، على طول N نظيمه يساوي الواحد.

$[2 \Leftarrow 1]$

لدينا $X = N \oplus M$ ومنه وبإعتبار النظرية 8.2، يكون الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ هو إسقاطا.

ومن خلال النظرية 9.2، الخوارزمية الخطية للتحليل وفق الأساس المعمم $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ الموافقة للصيغة 2.32 تكون صحيحة.

نختار $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ الجملة المشكلة في برهان النظرية 2.9.

نعتبر مؤثر التركيب $S : X \longrightarrow F$، والتشاكل التقابلي $J : X \longrightarrow E; (E = N \oplus M)$ المعرف بـ :

$J(x) = (x - Qx, Sx)$، والإقتصار $T : F \longrightarrow X$ لـ J^{-1} على الفراغ الجزئي المغلق F.

للعلم أن $Tf = \{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ و $T(F) = M$.

نأخذ متتالية عددية كيفية $c = \{c_n\}_{n=1}^{+\infty} \ni X$، من أجلها تحقق 2.30. هذا يعني أن : $Sc = f$

وليكن $c = c_0 + c'$ حيث: $N \ni c_0 = Pc$ و $M \ni c' = Qc$

لاحظ أن: $c' = Tf'$ من أجل $F \ni f'$.

في نفس الوقت لدينا:

$$f' = STf' = Sc' = Sc = f$$

ومنه $c' = Tf = \{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$. عندها يكون:

$$\|\{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}\|_X = \|c'\|_X = \|Qc\|_X \leqslant \|c\|_X$$

ذلك لأن Q هو إسقاط نظيمه يساوي الواحد. ومنه نستنتج صحة المتراجحة 2.33.

$[1 \Leftarrow 2]$

نستعمل نفس الترميز المستعمل في برهان النظرية 9.2.

كما سبق عندنا: $Tf = \{\langle f, \varphi_n{}^*\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$، $ST = I$، $M = T(F)$. ومنه يكون:

$$X = N \oplus M$$

و Q إسقاط من X على M.

لاحظ أنه من أجل كل x من X يكون: $x = x_0 + Qx$ بحيث : $x_0 \in N$ و $Qx \in M$. ومنه: $Qx = Tf$، ومن أجل كل f من F لدينا

$$f = STf = SQx = Sx$$

أي أن التمثيل 2.30 و التحليل 2.32. محقق. نكتب المتراجحة 2.33 على النحو:

$$\|x\|_X \geqslant \|Tf\|_X = \|Qx\|_X$$

وعليه الإسقاط Q نظيمه يساوي الواحد. ومنه $P = I - Q$ هو مسقط مقرب من X على N.

خـــــاتمة

يندرج محتوى هاته المذكرة في العمل على توضيح مفهوم الأساس المعمم في فراغ بناخ.

تناولنا في البداية مفهوم الأساس المعمم في فراغ هيلبار القابل للفصل، وهو المفهوم الأول للأساس المعمم الذي وضعه كل من دافين وشاشفيرم سنة 1952م. وتطرقنا إلى بعض الحالات الخاصة من هذا التعريف. ثم تناولنا مفهوم الأساس المعمم في فراغ بناخ وهو المفهوم الذي وضعه كروشينكوم سنة 1991م.

خلصنا في الأخير إلى توضيح الشروط الكافية لإعتماد الأساس المعمم في تحليل عناصر الفراغ في خوارزمية خطية وفق عناصر الأساس المعمم. وتبقى الدراسة مفتوحة لتطبيقات أخرى...

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

[1] د.أ.كولموغوروف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج.1987.

[2] مصطفى . عسيلة، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

المراجع باللغة الأجنبية

[3] B. S. Kashin and T. Yu. Kulikova, "A note on the description of frames of general form," Mat. Zametki, 72:6 (2002), 941-945; English transl.: Math. Notes, 72:6 (2002), 863–867.

[4] D. Han, D. R. Larson .Frames, bases , group representations ,. Memoirs .Amer . Math. Soc., 147: 697 (2000), 1-91.

[5] J . Lindenst rauss, L . Tzafriri, Classical Banach Spaces 1 : Sequence Spaces, Spring . Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[6] K. Gr¨ochenig, "Describing functions: atomic decompositions versus frames," Monatsh. Math., 112:1 (1991), 1–41.

[7] P. A. Terekhin, "Banach frames in the affine synthesis problem," Mat. Sb., 200:9 (2009), 127–146; English transl.: Russian Acad. Sci. Sb. Math., 200:9 (2009), 1383–1402.

[8] P. A. Terekhin, "Frames in Banach spaces and Their Applications to Construction ofWavelets," in: Research in Algebra, Number Theory, Functional Analysis, and Related Topics. Collection of Scientific Works [in Russian], vol. 2, Izd. Saratov Univ., Saratov, 2003, 65–81.

[9] P.A. Terekhin, " Frames in Banach Spaces ,"Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. 44, No. 3, pp. 50–62, 2010. Original Russian Text Copyright c by P. A. Terekhin

[10] P. A. Terekhin, "Representation systems and projections of bases," Mat. Zametki, 75:6 (2004), 944–947; English transl.: Math. Notes, 75:6 (2004), 881–884.

[11] P. G. Casazza, D. Han, and D. R. Larson, "Frames for Banach spaces," Contemp. Math., 247 (1999), 149–182.

[12] P. G. Casazza, O. Christensen, and D. T. Stoeva, "Frame expansions in separable Banach spaces," J. Math. Anal. Appl., 307:2 (2005), 710–723.

[13] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, "A class of nonharmonic Fourier series," Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 341–366.

ملخص

هذا العمل في مجمله يدرس الأساس المعمم في فراغ بناخ، ويوضح إمكانية استعمال هذا الأساس والحصول على نفس النتائج في حالة الأساس العادي، ونخص هنا تحليل عناصر الفراغ، تحديد معاملات فوري ودراسة الإسقاط.

لهذا بدأت الدراسة بالتعريفات المختلفة للأساس: أساس هامل (الأساس الجبري)، أساس شاودار، الأساس المعمم في فراغ هيلبار ثم الأساس المعمم في فراغ بناخ.

خلصت الدراسة في الحالة الأخيرة لوجود خوارزمية خطية لتحليل عناصر فراغ بناخ وفق الأساس المعمم.

الكلمات المفتاحية: فراغ بناخ، الأساس، الأساس المعمم، التحليل الذري، فراغ المعاملات، الفراغ النموذجي، جملة التمثيل.

Abstract

This work studies the frame in Banach space, and it clarifies the possibility of using it to obtain the same results when using the basis. Especially in the space's elements analysis, identifying Fouri's coefficients and studying the projection. For this reasons, this study began with differen definitions of the basis: Hamel basis, Shcauder basis and the frame in Banach space.

As a conclusion, this study gives an algorithm to analysis Banach space's elements according to the frame.

Key words : Banach space, frame, basis, atomic decomposition, coefficient space, model space, representation system.