UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : GUEDIRI Amir

Thème

Un problème inverse d'ordre deux pour un Laplacien dans un secteur plan et application

Soutenu publiquement le : 26/06/2019

Devant le jury composé de :

Dr. ASILA Mustafa	M.C.B Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. GUERFI Amara	M.C.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID Mohamed Saïd	M.C.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et de votre soutien infaillible.

Merci d'être toujours là pour moi.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie mon Dieu pour la santé, l'intelligence et le courage qu'Il m'accordé tout au long de ma cursus, en particulier durant la période de réalisation de ce projet.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire SAID Mohamed Saïd, professeur à l'université Kasdi Merbah de Ouargla, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université Kasdi Merbah de Ouargla, pour tous leurs efforts durant ces années.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès et m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Enfin, je remercie mes amis(es) qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

À tous ceux-ci, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Dédication **i**

Remerciement **ii**

Notations **vii**

Introduction **1**

1 RAPPEL GÉNÉRAL **4**

1.1 Espace Sobolev 4

1.1.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ 4

1.1.2 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ 4

1.1.3 L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ 5

1.2 La trace et la formule de Green 6

1.2.1 La trace 6

1.2.2 La formule de Green 6

1.3 Problème d'équation au dérivée partielle 7

1.3.1 Le problème bien posé 7

1.3.2 Type de conditions aux limites 8

1.4 La série de Fourier 8

1.4.1 La série trigonométrique 8

1.4.2 Déterminer les coefficients 9

1.5 Laplacien 10
1.5.1 Généralités sur l'équation de Laplace 10
1.5.2 Propriétés 11
1.6 Problème de la corrosion 12

2 ÉTUDE SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ 15
2.1 Position du problème 15
2.2 La solution dans $H^1(\Omega)$ 16
2.2.1 La formulation variationnelle 17
2.2.2 Résolution du problème sous la forme variationnelle . . . 18
2.3 La solution dans $H^2(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$ 24
2.3.1 La solution dans $H^2(\Omega)$ 24
2.3.2 La solution dans $H^{m+2}(\Omega)$ 27

3 RÉSOLUTION DU PROBLÉME 29
3.1 Méthode séparation des variables 29
3.1.1 Introduction 29
3.1.2 Laplacien en coordonnées polaires 30
3.1.3 Le problème de Laplacien 31
3.1.4 Résoudre de problème 32
3.1.5 L'étude de l'équation harmonique 33
3.1.6 L'étude de l'équation d'Euler Cauchy 34
3.2 Exemple 37

4 ÉTUDE NUMÉRIQUE 44
4.1 Formulation du problème inverse 44
4.2 Méthode des différences finies. 45
4.3 Description de l'algorithme 45
4.4 Applications 47

Conclusion 53

Liste des tableaux

4.1 Les Valeurs de U et La Fonction Gamma 52

Table des figures

2.1 Pipeline métalliques 16

4.1 Les Valeurs de U 52

4.2 La Fonction Gamma 52

Notations

- Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega$: La frontière de l'ouvert Ω.
- $L^2(\Omega)$: L'espace des fonctions carrés pour la mesure de Lebiegue.
- $H^1(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre 1.
- $H^2(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre 2.
- $H^m(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre m.
- $\|\cdot\|_{H^m}$: La norme sur l'espace H^m.
- $(.,.)_{H^m}$: Le crochet du produit scalaire dans l'espace H^m.
- $C^k(\overline{\Omega})$: L'espace des fonctions f de classe C^k telle que toutes les dérivées $\partial^\alpha f, |\alpha| < k$ admettent des prolongements continues à $\overline{\Omega}$.
- $\frac{\partial}{\partial\eta}$: La dérivée normal par rapport à η où $\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$.
- Δ : L'opérateur de Laplace tel que :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

- D^α : La dérivée d'ordre α au sens des distributions tel que :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ pour tout } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

- Γ_i : La frontière dont les données sont inconnues.
- Γ_c : La frontière dont les données sont connues.
- $u(r,\theta)$: La fonction u aux coordonnées polaires.

Introduction

Il est bien connu qu'un grand nombre de problèmes de la physique mathématique sont modélisés par des équations aux dérivées partielles un système d'équation aux dérivées partielles joint à des conditions aux limites et lorsque le phénomène est d'évolution a des conditions initiales constitue ce qu'on appelle modèle mathématique.

Au cours de l'été 1994, des chercheurs de l'IRC ont entrepris une étude concernant une conduite d'eau principale de Gatineau, au Québec, qui avait été réparée plusieurs fois. Cette étude avait un double objectif : déterminer l'ampleur de la corrosion et mesurer l'importance des forces externes qui agissent sur la canalisation, et ils pourront prendre des mesures rectificatives en temps opportun.

La détection de la corrosion à l'intérieur d'un tube est l'un des sujets les plus importants de l'ingénierie, en particulier pour l'administration de la sécurité de la centrale nucléaire. Il y a plusieurs moyens de le faire. Dans ce travail, nous considérons un problème inverse de détermination de la corrosion se produisant dans une partie intérieure inaccessible d'un tube à partir des mesures effectuées sur la limite extérieure. Notre objectif est de déterminer les informations sur la corrosion susceptible de se produire sur une surface intérieure du tube, qui est une partie "inaccessible", et nous collectons des données électrostatiques sur la partie de la surface extérieure du tube, qui est une "partie accessible".

Dans le cas où l'épaisseur du tube est suffisamment petite par rapport

au rayon du tube et que les données de Cauchy sont données sur l'ensemble de la limite extérieure, ce problème inverse peut-être traité par la méthode d'approximation TPA (Thin Plate Approximation method). L'algorithme et l'analyse numérique peuvent être trouvés dans [4]. Mais cet algorithme ne fonctionne que dans l'hypothèse où l'épaisseur est suffisamment petite par rapport au rayon du tube. Le cas dans lequel les données de Cauchy sont données pour la limite extérieure et l'hypothèse de petitesse réduite, a été abandonné, n'a pas été étudié et il est évident que c'est très important pour les problèmes de pratique.

La principale difficulté de ce problème inverse est la mauvaise formulation du problème inverse. Les données mesurées ne sont données que sur une partie de la limite extérieure et nous voulons déterminer une fonction inconnue dans la limite intérieure. En raison de l'illicéité, les erreurs dans les données mesurées seront élargies dans le traitement numérique si nous ne les traitons pas convenablement. Dans ce travail, basé sur [5], nous proposons un nouvel algorithme BEM pour ce problème inverse. Cela peut facilement être réalisé.

À ce titre, ce travail se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre regroupe quelques définitions et de propriétés sur les espaces de Sobolev, les EDP, la série de Fourier, généralités et propriétés sur Laplacien et quelques informations sur le problème de la corrosion.

Le deuxième chapitre, pour faire des étude sur l'existence et l'unicité on mettons la position du problème, Ensuite, on démontrons l'existence et l'unité dans l'espace H^1 d'après le théorème de Lax-Milgram. Ensuite, grâce a le lemme de Peetre on obtient la régularité de la solution dans l'espace H^2 et comme résultat général dans $H^{m+2}, m \in \mathbb{N}$.

Dans le troisième chapitre, en transformons Laplacien en coordonnées polaires, pour résoudre le problème de Laplacien en utilise le méthode séparation des variables et on faire exemple. Cette étude méthodique peut déduire explicitement la solution complète de l'équation de Laplace qui vérifie les deux

conditions de Dirichlet et de Neumann

Le dernier chapitre est consacré à l'étude numérique, on va établir la formulation du problème inverse de corrosion :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sur } \Gamma_c \\ u_\eta = \psi, & \text{sur } \Gamma_c \end{cases}$$

Pour ceci il s'agit de détecter la fonction $\gamma = \gamma(x)$ à partir de la relation $u_\eta + \gamma u = 0$ sur Γ_i, on va construire une suite des fonctions γ_n qui converge vers γ. Pour ceci on description un algorithme de résolution ramène l'étude du problème dans un son domaine.

Chapitre 1

RAPPEL GÉNÉRAL

1.1 Espace Sobolev

1.1.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \ldots, n \right\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega) : \vec{grad} u \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x))dx \tag{1.2}$$

et de la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

1.1.2 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ est défini par :

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, \ldots, n \right\} \tag{1.4}$$

Muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^2(\Omega)} = &\int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx \end{aligned} \tag{1.5}$$

et de la norme :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.6}$$

1.1.3 L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-incide, c'est-à-dire un vecteur á n composantes entières positives $\alpha_i \geq 0$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Pour tout entier $m \succeq 1$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\} \tag{1.7}$$

où $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

On note aussi que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \quad , \forall u, v \in H^m(\Omega) \tag{1.8}$$

tel que : $(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v)\, dx$

et la norme sur $H^m(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^m} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad , \forall u \in H^m(\Omega) \tag{1.9}$$

Lemme 1.1.1 ***(compacité de Rellich)***

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier $m \geq 0$, l'injection de $\dot{H}^{m+1}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est compacte.

Remarque 1.1.2 *Les espaces de Sobolev sont un outil très important et très adapté à l'étude des EDP. En effet, les solutions EDP, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues dont les dérivées sont comprises dans un sens classique.*

1.2 La trace et la formule de Green

1.2.1 La trace

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application trace Υ_0*

$$\begin{array}{ll} H^1(\Omega) & \to L^2(\partial\Omega) \\ u & \to \Upsilon_0(u) = u|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.10}$$

Cette application Υ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore Υ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|\Upsilon_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.11}$$

Définition 1.2.2 *Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application trace Υ_1*

$$\begin{array}{ll} H^2(\Omega) & \to L^2(\partial\Omega) \\ u & \to \Upsilon_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.12}$$

Cette application Υ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore Υ_1. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$, on a

$$\|\Upsilon_1(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)} \tag{1.13}$$

1.2.2 La formule de Green

Théorem 1.2.3 ***(Formule de Green)***

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)ds \tag{1.14}$$

ou $\eta = (\eta_i)_{1\leq i\leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$

Démonstration.

Rappelons que la formule (1.14) a été établie pour des fonctions de classe C^1 (voir [1] Corollaire 3.2.3). On utilise à nouveau un argument de densité. Par densité de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ (voir [1] Théorème 4.3.5), il existe des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dans $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui convergent dans $H^1(\Omega)$ vers u et v, respectivement. En vertu du Corollaire 3.2.3 (dans [1]) on a

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_n v_n \eta_i ds \tag{1.15}$$

On peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans les deux premiers termes de (1.15) car u_n et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ (respectivement, v_n et $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$) convergent vers u et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (respectivement, v et $\frac{\partial v}{\partial x_i}$) dans $L^2(\Omega)$. Pour passer à la limite dans la dernière intégrale de (1.15), on utilise la continuité de l'application trace γ_0, c'est-ä-dire l'inégalité (1.11), qui permet d'affirmer que $\gamma_0(u_n)$ (respectivement, $\gamma_0(v_n)$) converge vers $\gamma_0(u)$ (respectivement, $\gamma_0(v)$) dans $L^2(\partial\Omega)$. On obtient ainsi la formule (1.14) pour des fonctions u et v de $H^1(\Omega)$.

Comme conséquence du Théorème de trace on obtient une caractérisation très simple de l'espace $H_0^1(\Omega)$

Corollaire 1.2.4 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

1.3 Problème d'équation au dérivée partielle

1.3.1 Le problème bien posé

Le concept mathématique de problème bien posé provient d'une définition de **Hadamard** qui pensait que les modèles mathématiques de phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

1. Une solution existe.

2. La solution est unique.

3. La solution dépend de façon continue par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

1.3.2 Type de conditions aux limites

La définition correcte des conditions aux limites est un des éléments essentiels pour obtenir un problème bien posé, on rappelle les différentes manières d'imposer des conditions aux limites :

1. La condition de Dirichlet : $u = f$

2. La condition de Neumann : $u_\eta = f$

3. La condition de Robin : $u_\eta + \gamma u = f$

4. La condition de Cauchy : $u_\eta = f$ et $u = g$

Dans ces conditions, u_η représente la dérivée normale à la frontière du domaine de calcul.

1.4 La série de Fourier

1.4.1 La série trigonométrique

Définition 1.4.1 *On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique de la forme :*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \tag{1.16}$$

on note que $f(x)$ une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{w}$, avec les coefficients a_0, a_n et b_n sont donnés.

Proposition 1.4.2 *Si les séries numériques $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique* (1.16) *est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. C'est évident puisque : $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$

1.4.2 Déterminer les coefficients

• **Calcul a_n :**

$$\begin{aligned}\int_0^T f(x)dx &= \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\cos(wnx) + b_n\sin(wnx)\right]dx \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T a_n\cos(wnx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T b_n\sin(wnx)dx \\ &= \frac{a_0}{2}\int_0^T dx = \frac{a_0}{2}T \\ &\Rightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx\end{aligned}$$

• **Calcul a_n et b_n :**

Maintenant nous prenons ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)]$$

Alors :

$$f(x)\cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)]$$

$$f(x)\sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)]$$

nous permet d'avoir :

• $$\begin{aligned}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^T \cos(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_0^T \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_0^T \sin(k\omega x)\cos(n\omega x)dx\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_0^T \cos(k\omega x)\sin(n\omega x)dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_0^T \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)dx\end{aligned}$$

On a :

$$\int_0^T \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(k\omega x)dx = 0$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx$$

1.5 Laplacien

1.5.1 Généralités sur l'équation de Laplace

L'équation de Laplace :

$$\Delta u(x,y) = f(x,y) \tag{1.17}$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$, appelé Laplacien, et f est une fonction continue donnée.
Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques.

Définition 1.5.1 *Soit $u(x,y)$ une fonction définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant dans ce domaine l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = 0$$

On dit équations harmoniques dans Ω tous les fonctions qui vérifient l'équation de Laplace.

1.5.2 Propriétés

L'étude des propriétés dans le cadre des espaces de Banach.

Proposition 1.5.2 *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un espace vectoriel normé sur* K *et* $T \in L(E, X)$ *bijective. Alors ces deux propriétés sont équivalentes :*

1) $\exists\, c > 0$ *telle que,* $\forall\, u \in E,\ \|Tu\|_X \geq c\|u\|_E$.

2) $(X, \|\cdot\|_X)$ *est un espace de Banach sur* K *.*

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Soit (y_n) suite de Cauchy dans X, l'opérateur T étant bijectif, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, Tx_n = y_n$
Où d'après **(1)**, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|x_p - x_q\|_E \leq c^{-1} \|T(x_p - x_q)\|_X \leq c^{-1} \|y_p - y_q\|_X$$

Donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E, et par suite, converge vers un élément x de E .

Alors, puisque T est continue, la suite de terme général $y_n = Tx_n$ converge vers $Tx \in X$

on en déduit que X est un espace de Banach.

(2) $\Rightarrow$ (1)

D'après le théorème de Banach **(2)** entraîne á $T^{-1} \in L(X, E)$

Puisque T^{-1} est continue, on a

$$\forall x \in E \quad \left\|T^{-1}Tx\right\|_E \leq \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|_X$$

Donc, pour tout

$$x \in E, \|Tx\|_X \geq \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|x\|_E$$

posons

$$\left\|T^{-1}\right\|^{-1} = c$$

alors on obtient, pour tout $x \in E$,

$$\|Tx\|_X \geq c\|x\|_E$$

Corollaire 1.5.3 *Soient* $(Y, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach sur* K *et* $T \in L(E, Y)$. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists\, c > 0$ *telle que,* $\forall\, x \in E$, $\|Tx\|_X \geq c\|x\|_E$.

2. T *est injectif et Im(T) est fermé dans* Y.

Preuve.

On pose

$$X := \mathrm{Im}(T)$$

Supposons qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_E$$

Alors, T est injectif donc est une bijection de E sur X. D'après la proposition ci-dessus, on en déduit que $X = \mathrm{Im}(T)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans Y.

Supposons T injectif et X fermé dans Y . Alors, T est une bijection de E sur X et X est un espace de Banach. D'après la proposition ci-dessus, on en déduit qu'il existe $c > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a

$$\|Tx\|_X \geq c\|x\|_E.$$

1.6 Problème de la corrosion

Au cours de l'été 1994, des chercheurs de l'IRC ont entrepris une étude concernant une conduite d'eau principale de Gatineau, au Québec, qui avait été

réparée plusieurs fois. Cette étude avait un double objectif : déterminer l'ampleur de la corrosion et mesurer l'importance des forces externes qui agissent sur la canalisation. En s'appuyant sur les résultats de cette étude, les chercheurs mettront au point un modèle servant à estimer la durée de vie résiduelle des conduites d'eau principales. Les ingénieurs municipaux disposeront ainsi d'un outil pour déterminer les tronçons de conduites fortement corrodées, et ils pourront prendre des mesures rectificatives en temps opportun.

Pour recueillir les données, on a fait appel à quatre méthodes d'essais diagnostiques non destructifs, qui n'exigent ni creusage ni forage. Comme il est bien connu qu'une faible résistivité est un signe de corrosion, on a mesuré la résistivité du sol lors de certains essais, ce qui a permis d'obtenir indirectement de l'information sur le degré de corrosion de la conduite.

La première méthode d'essai utilisée a été l'induction électromagnétique, qui sert à mesurer la résistance du sol. Dans les deuxième et troisième méthodes, c'est-à-dire la mesure de résistivité en continu et la polarisation linéaire, on s'est servi de l'électricité pour déterminer l'étendue de la corrosion. En mesurant la différence de potentiel entre les électrodes, on a pu déterminer la résistance du sol au niveau de la conduite.

La quatrième méthode a consisté à se servir d'un hydroscope, qui a été introduit dans la conduite et en a été retiré par les bornes d'incendie ; cet instrument, qui a parcouru la canalisation sous la poussée de l'eau, a permis de mesurer la corrosion interne et externe.

On a par la suite dégagé et nettoyé la conduite afin de vérifier l'étendue effective de la corrosion et d'évaluer la fiabilité de la mesure de la résistance du sol.

Il ressort des recherches accomplies à ce jour que toutes les méthodes semblent prometteuses, mais que c'est la combinaison de l'induction électromagnétique et de l'hydroscope qui permet le mieux de déceler la présence de corrosion dans les conduites d'eau principales et d'en déterminer l'ampleur.

Les chercheurs ont aussi constaté que les méthodes qui se sont révélées les plus efficaces sont celles qui sont le moins intrusives. Certaines des méthodes expérimentées permettent d'établir un diagnostic général, tandis que d'autres peuvent servir à un stade ultérieur pour cerner davantage le problème.

Chapitre 2

ÉTUDE SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ

2.1 Position du problème

Soit le domaine Ω , tel que

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad r_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_2 \right\}$$

et de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r_1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r_2 \right\}$$

Supposons que Ω est un corps métallique à conductivité constante. Dans le domaine Ω, on considère le champ électrostatique. Le potentiel électrique u satisfait l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \tag{2.1}$$

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma_2$ est une partie accessible de l'ensemble ouvert de la frontière extérieure Γ_2 de Ω . Et la partie reste $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \backslash \Gamma_0$.

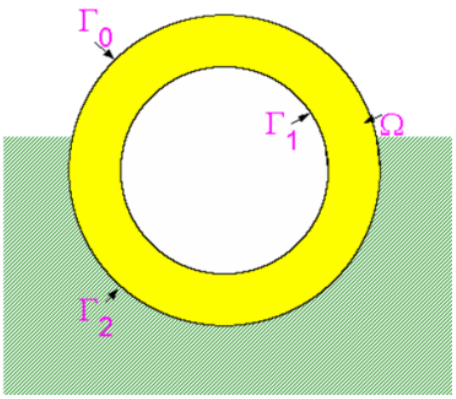

FIGURE 2.1 : Pipeline métalliques

Nous supposons que la corrosion ne s'est produite que sur la frontière intérieure du domaine Ω et que la corrosion peut être décrite par une fonction non négative γ dans la condition de limite sur la frontière intérieure.

$$u_\eta + \gamma u = 0, \quad \text{on} \quad \Gamma_1$$

Avec les conditions aux frontières de Dirichlet et Neumann :

$$u(x) = \varphi(x), x \in \Gamma_0 \tag{2.2}$$

$$u_\eta(x) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \psi(x), x \in \Gamma_i \tag{2.3}$$

où η est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de Γ.

Et $\varphi \in \Upsilon_0 \left(H^1(\Omega)\right), \psi \in \Upsilon_1 \left(H^1(\Omega)\right)$.

2.2 La solution dans $H^1(\Omega)$

On va proposer la formulation variationnelle du problème, c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et une forme linéaire $L(\cdot)$, tels que notre problème est équivalent à :

$$u \in H^1 \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1 \tag{2.4}$$

Et on aura aussi besoin de utilise le théorème de Lax-Milgram.

2.2.1 La formulation variationnelle

Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (2.1) par une fonction test v et on intègre par partie , on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma = 0 \tag{2.5}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma$$

La formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u_{\backslash\Gamma_0} = \varphi \text{ , et} \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega), v_{\backslash\Gamma_0} = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

On note $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v_{\backslash \mathrm{r}_0} = 0 \right\}$

$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \equiv H^1_0(\Omega)$ sous espace de $H^1(\Omega)$

Alors

$$\begin{cases} u \in \varphi + H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ tel que et } \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma \end{cases} \tag{2.7}$$

on note que : $a(u,v) = L(v)$ avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$L(v) = \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma$$

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace.*

Alors la semi-norme dans H^1_0 :

$$|v|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur H_0^1 équivalente à la norme usuelle induite par celle de H^1

Preuve. Soit $v \in H_0^1$. La première inégalité

$$|v|_{H_0^1} \leq \|v\|_{H^1} = \left(\int_\Omega \left(|v|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est évidente. D'autre part, l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\exists C > 0, \int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

pour toute fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$, conduit à

$$\|v\|_{H^1}^2 \leq (C+1) \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = (C+1)|v|_{H_0^1}^2$$

ce qui prouve que $|v|_{H_0^1}$ est norme équivalente à $\|v\|_{H^1}$.

2.2.2 Résolution du problème sous la forme variationnelle

Résumé :

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert on invoque ici théorème de **Lax-Milgram**. On note V un espace de Hilbert et on considère la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \forall v \in V \end{cases} \tag{2.8}$$

1). $L(\cdot)$ est une forme linéaire définie sur V de plus, $L(\cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\forall v \in V, |L(v)| \leq C\|v\|_V \tag{2.9}$$

2). $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire définie sur V vérifiant de plus,

i). $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur V c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que ;

$$\forall (u,v) \in V, \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|_V \|v\|_V \tag{2.10}$$

ii). $a(\cdot,\cdot)$ est coercive c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que,

$$\forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \tag{2.11}$$

Théorem 2.2.2 ***(Théorème de Lax-Milgram)***

Soient V un espace de Hilbert réel, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V.
Alors, il existe un unique élément u de V solution du problème

$$L(v) = a(u,v) \quad \forall v \in V \tag{2.12}$$

De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.

Preuve. (voir [8]) .

Théorem 2.2.3 ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert borné et $v \in H_0^1(a,b)$. Alors il existe une constante $C > 0$ (en fonction de $(b-a)$) telle que

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C \, \|\nabla v\|_{L^2(a,b)}$$

Démonstration.

On peut écrire

$$v(x) = \int_a^x v'(y)dy$$

Alors, pour $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} v^2(x) &= \left(\int_a^x v'(y)dy \right)^2 \\ &\leq \int_a^x (v'(y))^2 \, dy \int_a^x dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b v^2(x)dx \leq \int_a^b \left[\int_a^x (v'(y))^2 dy.(x-a)\right] dx$$
$$\leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \cdot \int_a^b (x-a)dx$$
$$\Rightarrow \|v\|^2_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|v'\|_{L^2(a,b)}$$

Donc,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Théorem 2.2.4 ***(Inégalité de Hölder).***

On suppose que p, q réels vérifient $1 \leq p, q \leq +\infty$ et la relation de conjugaison $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, le produit fg est intégrable et

$$\left|\int_{\mathrm{E}} fg\mathrm{d}\mu\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve.

Le résultat est évident pour $(1, +\infty)$ ou $(+\infty, 1)$; si $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^\infty$, on sait que $|g| \leq \|g\|_\infty$ presque partout, donc

$$\left|\int_{\mathrm{E}} fg\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_{\mathrm{E}} |fg|\mathrm{d}\mu = \int_{\{|g| \leq \|g\|_\infty\}} |f||g|\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty \int_{\mathrm{E}} |f|\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

On suppose maintenant que $1 < p, q < +\infty$ et $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ (sinon, f ou g est nulle presque partout, $\int_{\mathrm{E}} fg\mathrm{d}\mu = 0$ et ce cas est clair). On pose

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$$

Alors $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$, et

$$\left|\int_{\mathrm{E}} f_1 g_1 \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_{\mathrm{E}} |f_1|\,|g_1|\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p}\int_{\mathrm{E}} |f_1|^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_{\mathrm{E}} |g_1|^q\,\mathrm{d}\mu = 1$$

puisque $f = \|f\|_p f_1$ et $g = \|g\|_q g_1$, on obtient que

$$\left|\int_{\mathrm{E}} fg\mathrm{d}\mu\right| = \|f\|_p\|g\|_q \left|\int_{\mathrm{E}} f_1 g_1 \mathrm{d}\mu\right| \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

ce qui termine la démonstration.

Maintenant on vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

- **Cas** $\varphi = 0$

On a $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert,

1. C'est facile a montrer que $L(\cdot)$ est une forme linéaire car $\int$ est linéaire, on va montrer la continuité :

pour tout $v \in H_0^1$:

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left|\int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma\right| \\
&\leq \int_{\Gamma_i} |\psi||v| d\Gamma \\
&\leq \|\psi\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq c\|\psi\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq c\|\psi\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} \\
&\leq \beta\|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Alors $L(\cdot)$ est continue dans H_0^1

2. C'est facile à montrer que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme linéaire car $\int$ et ∇ sont linéaire, on va montrer la continuité :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Alors $a(\cdot,\cdot)$ est continue dans H_0^1

Maintenant on va montrer la coercivité :

pour tout $u \in H_0^1$:

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1}^2$$
$$\exists \alpha > 1 : a(u,u) \succeq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$$

Alors $a(\cdot,\cdot)$ est coercive dans H_0^1

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème variationnelle admet une solution unique.

• **Cas** $\varphi \neq 0$

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut un espace vectoriel. Alors on ne peut pas appliquer directement.

Définition 2.2.5 *On a* $\varphi \in \Upsilon_0(H^1(\Omega))$*, on appelle relèvement* $t \in H^1(\Omega)$ *de la fonction* φ *: un antécéent de* φ *par* Υ_0*, c'est-à-dire* $t \in H^1(\Omega)$ *vérifie* $\Upsilon_0(t) = \varphi$

Un tel antécéent existe par définition de l'espace image $\Upsilon_0(H^1(\Omega))$, mais n'a aucune raison d'être unique.

Remarque.

L'espace $t + H_0^1(\Omega)$ est un espace affine si $t \in H^1(\Omega)$, tel que

$$t + H_0^1(\Omega) = \left\{w \in H^1(\Omega) \,\mathrm{tq}\, \exists v \in H_0^1(\Omega), w = v + t\right\}$$

associé à l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$, et si $\varphi \in \Upsilon_0\left(H_0^1(\Omega)\right)$, alors pour un relèvement t donné de (2.7), on note :

$$\varphi + H_0^1(\Omega) = t + H_0^1(\Omega)$$

car il est immédiat que cet espace est indépendant du relèvement t de φ choisi : si t_1 et t_2 sont deux relèvements de φ, c'est-à-dire si $\Upsilon_0\left(v_1\right) = \varphi = \Upsilon_0\left(v_2\right)$, alors $t_1 + H_0^1(\Omega) = t_2 + H_0^1(\Omega)$.

On dit que, si $w = t_1 + v_1 \in t_1 + H_0^1(\Omega)$, alors $w = t_2 + v_2$ avec $v_2 = (t_1 - t_2) + v_1$ et on a $\Upsilon_0\left(v_2\right) = 0$, c'est-à-dire $v_2 \in H_0^1(\Omega)$.

Le problème (2.7) posé dans l'espace affine $\varphi + H_0^1(\Omega)$ dans l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$ associé , puisque $\varphi \in \Upsilon_0\left(H^1(\Omega)\right)$ il existe au moins un relèvement $t_\varphi \in H^1(\Omega)$ de φ, on fixe t_φ et on considère le problème à la variable $u_0 = u - t_\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega \nabla t_\varphi \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma \end{cases}$$

Maintenant on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_0, v) = L_\varphi(v) \end{cases} \tag{2.13}$$

1. On note que la forme $a(\cdot,\cdot)$ et la même forme de problème du cas $(\varphi = 0)$. Alors la forme $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

2. C'est facile a montrer que $L_\varphi(\cdot)$ est une forme linéaire car $\int$ et ∇ sont linéaire, on va montrer la continuité :

pour tout $v \in H_0^1$:

$$
\begin{aligned}
|L_\varphi(v)| &= \left| -\int_\Omega \nabla t_\varphi \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla t_\varphi| \cdot |\nabla v| \, dx + \int_{\Gamma_i} |\psi||v| d\Gamma \\
&\leq \|\nabla t_\varphi\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq \|t_\varphi\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + c\|\psi\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \|t_\varphi\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + c\|\psi\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq \left(\|t_\varphi\|_{H_0^1} + c\|\psi\|_{L^2} \right) \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq \alpha \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

Alors $L_\varphi(\cdot)$ est continue dans H_0^1

D'après le théorème de Lax-Milgram le problème variationnelle admet une solution unique $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

2.3 La solution dans $H^2(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$

2.3.1 La solution dans $H^2(\Omega)$

Un résultat de régularité indique que lorsque $\Delta u = f \in L^2$ alors u est en fait est dans H^2.

Pour vérifier l'existence et l'unicité de la solution dans $H^2(\Omega)$ on fait l'étude de la fermeture de l'image de l'opérateur Δ dans $L^2(\Omega)$ et on montre que la dimension de noyau de l'opérateur Δ est fini et pour cela on utilisant une inégalité de priori qui découle de lemme du Peetre.

Lemme 2.3.1 ***(Lemme de Peetre)***

Soient X, Y et Z trois espaces de Banach réflexifs tel que X s'injecte dans Z et cette injection est compacte, soit L un opérateur linéaire continue de X dans Y. Alors les conditions suivantes sont équivalents :

1. *L'image de L est fermée dans Z et le noyau de L est de dimension finie.*

2. *Il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|u\|_X \leq k \left(\|Lu\|_Z + \|u\|_Y \right)$$

On va appliquer ce lemme aux espaces de Banach réflexifs :

$$X = H^2, Y = H^1, Z = L^2$$

H^2 s'injecte dans L^2 et l'injection est compacte. Il est évident que l'opérateur Laplacien Δ linéaire et continue de H^1 dans H^2. Pour obtient :

$$\exists k > 0, \|u\|_{H^2} \leq k\left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}\right)$$

on fait l'étude d'existence et unicité.

Existence : L'image de l'opérateur Δ est fermé dans $L^2(\Omega)$.

Unicité : La dimension de noyau de l'opérateur Δ est fini.

1. L'étude d'existence :

Nous savons qu'un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois pour donner sens à une EDP et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

On applique le corollaire 1.5.3 on constate que l'image de l'operateur Δ est fermé dans L^2. [2]

2. L'étude d'unicité :

• Cas de la condition de Dirichlet :

On a

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On va calculer le produit scalaire $\langle \Delta u, u \rangle_{L^2} = 0$

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, u\rangle_{L^2} &= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 = 0 \\
&\Rightarrow \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 = \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

Alors u est constante, et comme $u = 0$ sur Γ, donc $u = 0$ dans $H^1(\Gamma)$ donc $u = 0$ dans $H^2(\Gamma)$.

• **Cas de la condition mixte(Dirichlet-Neumann) :**

On a

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.14}$$

On va calculer le produit scalaire $\langle \Delta u, u\rangle_{L^2} = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, u\rangle_{L^2} &= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, u \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, u \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, u \right\rangle \\
&= \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|_{L^2}^2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Alors u est constante, et la dimension du noyau de ce problème est au moins de dimension 1.

2.3.2 La solution dans $H^{m+2}(\Omega)$

Supposons que $\Delta u = f \in H^m$ tel que $m \succeq 0$ et $m \in \mathbb{N}$, et la solution $u \in H^{m+2}$ d'après le **lemme de Peetre** :

$$\exists k > 0, \|u\|_{H^{m+2}} \leq k\left(\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}}\right)$$

Preuve de l'inégalité :

• <u>Si $m = 0$</u> : on a démontrer l'inégalité :

$$\exists k > 0, \|u\|_{H^2} \leq k\left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}\right)$$

• On suppose que c'est vrai pour m ($f \in H^m$ alors $u \in H^{m+2}$) , et on va montrer que c'est vrai pour $m+1$ ($f \in H^{m+1}$ alors $u \in H^{m+3}$) .

Notez que $u \in H^{m+3}$ c'est a dire que : $u \in H^{m+2}$ et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \in H^{m+2}$, et u est la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.15}$$

On a $u \in H^{m+2}$, et on pose $v = \frac{du}{dx} \in H^{m+1}$.

Si $f \in H^{m+1} \Rightarrow g = \frac{df}{dx} \in H^m$.

En dérivant (2.15) par x , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\Delta u) = \frac{df}{dx}, & \text{dans } \Omega \\ \frac{du}{dx} = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.16}$$

c'est a dire ,

$$\begin{cases} \Delta v = g, & \text{dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{dv}{dx} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.17}$$

Donc v la solution du (2.17).

Et $v \in H^{m+2} \Rightarrow \frac{du}{dx} \in H^{m+2}$.

Maintenant, on pose $v = \frac{du}{dy}$ et on obtient $\frac{du}{dy} \in H^{m+2}$.

Donc, $u \in H^{m+2}$ et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \in H^{m+2}$, alors $u \in H^{m+3}$.

Alors, $\forall m \in \mathbb{N}, m \succeq 0$ on a l'inégalité :

$$\exists k > 0, \|u\|_{H^{m+2}} \leq k \left(\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}} \right)$$

Chapitre 3

RÉSOLUTION DU PROBLÉME

3.1 Méthode séparation des variables

3.1.1 Introduction

Soit équation différentielle partielle du second ordre $Lu = f$ ou L est un opérateurs différentielle aux dérivées partielles d'ordre ≤ 2 et u est l'inconnue définie dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

f est une fonction donnée dans un espace fonctionnel $E(\Omega)$ en général $f \in L^2(\Omega)$, an doit résoudre le problème suivant :

$$Lu = f \text{ , avec condition aux limites}$$

ou, $u = u(x, y)$ est une solution du problème.

Dans le cas ou L est linéaire, c'est à dire L s'écrit sous la forme :

$$L = a(x, y)\partial^2_{xx} + b(x, y)\partial^2_{xy} + c(x, y)\partial^2_{yy} + \alpha(x, y)\partial_x + \beta(x, y)\partial_y + \lambda(x, y)u$$

L est d'ordre ≤ 2. Parmi les méthodes les plus utilisées pour résoudre le problème on utilise la méthode de séparation des variables, c'est à dire on cherche $u(x, y)$ sous la forme :

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

ou X est une fonction de la variable x et Y est une fonction de la variable y.

3.1.2 Laplacien en coordonnées polaires

Soit l'équation de Laplace dans un rectangle

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.1}$$

On pose

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

On utilise

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta$$

Cela implique

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx}$$

et pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{d^2r}{dx^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{-y}{r^2}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

Et les dérivées partielles secondes sont continues, alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$

Donc,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{-2xy}{r^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(\frac{y^2}{r^4}\right) + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)$$

Et de la même façon, on obtient :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{2xy}{r^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(\frac{x^2}{r^4}\right) + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\frac{-2xy}{r^4}\right)$$

D'où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

et l'équation de Laplacien en coordonnées polaires.

3.1.3 Le problème de Laplacien

Le potentiel $u(r,\theta)$ satisfait l'équation de Laplace dans le domaine

$$\Omega = \{r_1 \leq r \leq r_2, \text{ et } 0 \leq \theta \leq \varphi\}$$

On a

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0 \tag{3.2}$$

Et les conditions mixtes :

$$u\left(r_1,\theta\right) = f(\theta), \text{ sur } \Gamma_1 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u\left(r_2,\theta\right)}{\partial\theta} = g(\theta), \text{ sur } \Gamma_2 \tag{3.4}$$

tel que

$$\Gamma_1 = \{(r,\theta), r = r_1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \varphi\}$$

$$\Gamma_2 = \{(r,\theta), r = r_2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \varphi\}$$

3.1.4 Résoudre de problème

Pour résoudre le problème de Laplacien en utilise le méthode séparation des variables, alors on pose

$$u(r,\theta) = F(r)G(\theta) \tag{3.5}$$

Maintenant, nous calculons la dérivée seconde par rapport à r

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(F(r)G(\theta)) = F'.G \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(F(r)G(\theta)) = F''.G \tag{3.7}$$

et la dérivée seconde par rapport à θ

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(F(r)G(\theta)) = F.G' \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(F(r)G(\theta)) = F.G'' \tag{3.9}$$

On remplaçons dans (3.2), on obtient :

$$F''.G + \frac{1}{r}F' \cdot G + \frac{1}{r^2}F.G'' = 0 \tag{3.10}$$

On divise par FG, on obtient :

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r}\frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2}\frac{G''}{G} = 0 \tag{3.11}$$

Cela implique :

$$\frac{r^2F''}{F} + r\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} \tag{3.12}$$

Remarque 3.1.1 *Doit être noté que $G \neq 0$ et $F \neq 0$.*

Le terme de gauche de l'équation (3.12) *est une fonction de r seulement, et le terme de droite est une fonction de θ seulement. On note qu'ils ne dépendent pas de la même variable.*
Pour avoir cette égalité, il faut que chacun de ces termes soit constant et on note cette constante par k. De ceci on tire deux équations différentielle ordinaires :

$$\frac{r^2F''}{F} + r\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} = k \tag{3.13}$$

On obtient donc 2 équations :
L'équation harmonique : $G''(\theta) + kG(\theta) = 0$
L'équation d'Euler Cauchy : $r^2F''(r) + rF'(r) - kF(r) = 0$

3.1.5 L'étude de l'équation harmonique

Pour détermine les solutions de l'équation

$$G''(\theta) + kG(\theta) = 0$$

- Pour $k = 0$, on a la solution :

$$G(\theta) = C\theta + D$$

$$G(0) = D = 0$$

$$G(\varphi) = C\varphi = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

- Pour $k < 0$, $k = -l^2$, on a la solution :

$$G(\theta) = E\exp(l\theta) + F\exp(-l\theta)$$

$$G(0) = E + F = 0$$

$$G(\varphi) = E\exp(l\varphi) + F\exp(-l\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow E = F = 0$$

- Pour $k > 0$, on a la solution :

$$G(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$

$$G(0) = A = 0$$

$$G(\varphi) = B\sin(k\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{h\pi}{\varphi}, k = n$$

Comme conclusion :

$$G_n(\theta) = B_n \sin(n\theta)$$

3.1.6 L'étude de l'équation d'Euler Cauchy

Pour trouver la solution de l'équation

$$r^2F''(r) + rF'(r) - kF(r) = 0$$

On pose

$$F(r) = r^{\alpha}$$

dans l'équation ci-dessus , on obtient :

$$\alpha(\alpha-1)r^2r^{\alpha-2} + \alpha r r^{\alpha-1} - kr^{\alpha} = 0$$

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha} + \alpha r^{\alpha} - kr^{\alpha} = 0$$

$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - k)r^{\alpha} = 0$$

$$\left(\alpha^2 - k\right) r^{\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 - k = 0$$

$$\alpha^2 = k = n^2$$

Si $n \neq 0$ cela implique que les racines sont $\alpha = \pm n$

Donc,

$$F_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

Alors, les solutions u_n s'écrivent,

$$u_n(r,\theta) = \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n \sin(n\theta) \tag{3.14}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} u_n(r,\theta) \tag{3.15}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n \sin(n\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} b_n \sin(n\theta)$$

tel que :

$$b_n = \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n$$

on peut écrire de la forme

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n\succeq 1} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

tel que :

$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = (C_n r^n + D_n r^{-n}) B_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

$$u(r_1,\theta) = f(\theta) = \sum_{n\geq 0} b_{n1} \sin(n\theta) \tag{3.16}$$

$$b_{n1} = \left(C_n r_1^n + D_n r_1^{-n}\right) B_n$$

$$\frac{\partial u(r_2,\theta)}{\partial\theta} = g(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{n\succeq 0} b_n \sin(n\theta)\right)$$

$$g(\theta) = \sum_{n>0} b_{n2} \cos(n\theta)$$

$$b_{n2} = n\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n$$

$$b_{n2} = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\varphi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$

3.2 Exemple

Soit le problème suivant :

$$\Delta u = 0, \text{ dans } \Omega \tag{3.17}$$

$$u(r = a, \theta) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r = b, \theta) = f(\theta) = \theta^2, \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{3.19}$$

ou

$$\Omega = \{a \leq r \leq b, \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

L'équation à résoudre est l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ qui s'écrit en coordonnées polaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.20}$$

On applique la méthode de séparation des variables, avec :

$$u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

Et on obtient

$$\frac{r^2 F''}{F} + r\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} = k \tag{3.21}$$

• **L'étude de** $G(\theta)$

Pour détermine les solutions de l'équation

$$G''(\theta) + kG(\theta) = 0$$

- Pour $k = 0$, on a la solution :

$$G(\theta) = C\theta + D$$

$$G(0) = D$$

$$G(2\pi) = 2C\pi + D$$

$$\Rightarrow C = 0$$

- Pour $k < 0$, $k = -l^2$, on a la solution :

$$G(\theta) = E\exp(l\theta) + F\exp(-l\theta)$$

$$G(0) = E + F = 0$$

$$G(2\pi) = E\exp(2l\pi) + F\exp(-2l\pi) = 0$$

$$\Rightarrow E = F = 0$$

- Pour $k > 0$, on a la solution :

$$G(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$

$$G(\theta) = G(\theta + 2\pi)$$

donne le résultat suivant $k = n, n = 1, 2, 3, ...$

Comme conclusion :

$$G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$$

• **L'étude de** $F(r)$

Pour trouver la solution de l'équation

$$r^2F''(r) + rF'(r) - kF(r) = 0$$

On pose

$$F(r) = r^\alpha$$

dans l'équation ci-dessus , on obtient :

$$\alpha(\alpha-1)r^2r^{\alpha-2} + \alpha r r^{\alpha-1} - kr^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - kr^\alpha = 0$$

$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - k)r^\alpha = 0$$

$$\left(\alpha^2 - k\right) r^\alpha = 0$$

$$\alpha^2 - k = 0$$

$$\alpha^2 = k = n^2$$

Si $n \neq 0$ cela implique que les racines sont $\alpha = \pm n$

$$F(a) = Ca^k + Da^{-k} = 0$$

$$\Rightarrow D = -Ca^{2k}$$

Donc,

$$F(r) = C\left[r^n - a^{2n}r^{-n}\right]$$

• si $k = 0$

$$F(r) = E_1 \ln r + E_2$$

on a la condition $F(a) = 0$, alors :

$$F(a) = E_1 \ln a + E_2 = 0$$

$$E_1 = \frac{-E_2}{\ln a}$$

Donc

$$F(r) = \frac{-E_2}{\ln a} \ln r + E_2$$

$$F(r) = E_2\left(1 - \frac{\ln r}{\ln a}\right)$$

on prend $E_2 = E$

Alors, la solution est ,

$$u(r,\theta) = E\left(1 - \frac{\ln r}{\ln a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)\right)\left(r^n - a^{2n}r^{-n}\right)\right] \tag{3.22}$$

Au final, on détermination les coefficients, alors :

$$\frac{\partial u(b,\theta)}{\partial \theta} = f(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin(n\theta)+B_n\cos(n\theta)\right)\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin(n\theta)+B_n\cos(n\theta)\right)\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left(nA_n\cos(n\theta)-nB_n\sin(n\theta)\right)\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[nA_n\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)\cos(n\theta)-nB_n\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)\sin(n\theta)\right]
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

on peut écrire sous la forme

$$f(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\sin(n\theta)+b_n\cos(n\theta)\right]$$

avec

$$a_0=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)\right)$$

$$a_n=-nB_n\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)$$

$$b_n=nA_n\left(b^n-a^{2n}b^{-n}\right)$$

- Calculer a_0 :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[E\left(1-\frac{\ln b}{\ln a}\right)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{3} d\theta = E\left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right)$$

Donc

$$E\left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right) = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$E = \frac{2\pi^3}{3\left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right)}$$

- Calculer a_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\theta^2\sin(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\theta\sin(n\theta)}{n}d\theta \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\theta\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{-1}{n\pi}\left[\frac{-2\theta\cos(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos(n\theta)}{n}d\theta \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(-n\pi)\right] \\
&= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2} \\
&= -nB_n\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^3\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)}$$

- Calculer b_n :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\theta^2\cos(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\theta\cos(n\theta)}{n}d\theta \\
&= 0 \\
&= nA_n\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n = 0$$

Alors la solution du problème de Laplace :

$$u(r,\theta) = E\left(1 - \frac{\ln r}{\ln a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(n\theta)\left(r^n - a^{2n}r^{-n}\right) \tag{3.24}$$

tel que :

$$E = \frac{2\pi^3}{3\left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right)}, \qquad B_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^3\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)}$$

Chapitre 4

ÉTUDE NUMÉRIQUE

4.1 Formulation du problème inverse

On considère un problème inverse de la détermination de la corrosion dans un partie inaccessible intérieur a partir des mesures sur les limites extérieure, qui est modélisé par l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = f_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \tag{4.1}$$

On n'a aucune information de u sur Γ_i (Γ_i est la frontière intérieure du domaine Ω), on chercher f_i et g_i telles que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = f_i, & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_i, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.2}$$

Le problème inverse est de déterminer la corrosion qui s'est produit dans la partie inaccessible Γ_i à partir des mesures (données) sur la frontière extérieure Γ_c. On définit cette corrosion par la fonction non-négative γ tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_i$$

Où $f_i \neq 0$, on déduire :

$$\gamma = -\frac{g_i}{f_i}, \qquad \text{sur } \Gamma_i$$

Pour trouver la solution du problème (4.2), on va construire un algorithme qui donne une bonne approximation de la fonction $\gamma = \gamma(x)$. Cet algorithme donne une suite $\gamma_n = \gamma_n(x)$; $n \in \mathbb{N}$ des valeurs approximatives de la fonction $\gamma = \gamma(x)$.

4.2 Méthode des différences finies.

Supposons (pour simplifier) que le domaine Ω soit un carré (c.a.d. $d = 2$, le cas rectangulaire se traite tout aussi facilement). On se donne un pas de maillage constant h et des points $x_{i,j} = (ih, jh), i = 1, \ldots, N$ $j = 1, \ldots, N$. En effectuant les développements limités dans les deux directions , on approche $-\partial_i^2 u(x_{i,j})$(resp. $-\partial_j^2 u(x_{i,j})$) par :

$$\frac{2u\left(x_{i,j}\right) - u\left(x_{i+1,j}\right) - u\left(x_{i-1,j}\right)}{h^2} \left(\text{resp. par } \frac{2u\left(x_{i,j}\right) - u\left(x_{i,j+1}\right) - u\left(x_{i,j-1}\right)}{h^2} \right)$$

Ce type d'approche est limité à des géométries simples. Pour mailler des géométries compliqués, il est en général plus facile d'utiliser des triangles en dimension 3 , auquel cas la méthode des différences finies est plus difficile à généraliser. (D'après la cour de l'Université d'Aix-Marseille).

4.3 Description de l'algorithme

• Étape 1 :

On spécifie une estimation initiale pour le problème initial :

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = f_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \tag{4.3}$$

• Étape 2 :

∘ Soit u_0 est un vecteur choisi sur Γ_i dans le problème mixte bien posé suivant :

$$(P_0)\begin{cases} \Delta V^{(0)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V_\eta^{(0)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V^{(0)} = u_0, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.4}$$

On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (P_0) (utilisan la condition de Neumann), on déterminer $V^{(0)}$ sur Ω et on pose $q_0 = V_\eta^{(0)}$ sur Γ_i.

Maintenant, on peut calculer $\gamma_0 = -\frac{q_0}{u_0}$

∘ On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (P_1) ((utilisant la condition connue de Dirichlet et q_0 sur Γ_i)

$$(P_1)\begin{cases} \Delta V^{(1)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V^{(1)} = f_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V_\eta^{(1)} = q_0, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.5}$$

on déterminer $V^{(1)}$ et on pose $u_1 = V^{(1)}$ sur Γ_i.

Maintenant, on peut calculer $\gamma_1 = -\frac{q_0}{u_1}$

∘ On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (P_2) (utilisant la condition connue de Neumann et u_1 sur Γ_i)

$$(P_2)\begin{cases} \Delta V^{(2)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V_\eta^{(2)} = g, & \text{sur } \Gamma_c \\ V^{(2)} = u_1, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.6}$$

on déterminer $V^{(2)}$ et on pose $u_2 = V^{(2)}$ sur Γ_i, $q_1 = V_\eta^{(2)}$.

Maintenant, on peut calculer $\gamma_2 = -\frac{q_1}{u_1}$.

∘ On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (P_3) (utilisant la condition connue de Dirichlet et q_1 sur Γ_i)

$$(P_3)\begin{cases} \Delta V^{(3)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V^{(3)} = f_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V_\eta^{(3)} = q_1, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.7}$$

on déterminer $V^{(3)}$ et on pose $u_3 = V^{(3)}$ sur Γ_i, $q_2 = V_\eta^{(3)}$.

Maintenant, on peut calculer $\gamma_3 = -\frac{q_1}{u_3}$.

∘ On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (P_4) (utilisant la condition connue de Neumann et u_2 sur Γ_i)

$$(P_4)\begin{cases} \Delta V^{(4)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V_\eta^{(2)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V^{(4)} = u_2, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.8}$$

on déterminer $V^{(4)}$ et on pose $u_4 = V^{(4)}$ sur Γ_i, $q_3 = V_\eta^{(4)}$.

Maintenant, on peut calculer $\gamma_4 = -\frac{q_3}{u_2}$.

• **Étape 3 :**(par récurrence)

On suppose que on a obtenue l'approximation q_k, on résoudre le problème mixte aux limite :

$$(P_{2k+1})\begin{cases} \Delta V^{(2k+1)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V^{(2k+1)} = f_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V_\eta^{(2k+1)} = q_k, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.9}$$

on déterminer $V^{(2k+1)}$, ou $u_{k+1} = V^{(2k+1)}$ sur Γ_i.

Par utilisant u_{k+1} on peut obtenir V^{2k+2} sur Ω et $q_{k+1} = V_\eta^{2k+2}$ sur Γ_i à partir de la résolution du problème mixte aux limites :

$$(P_{2k+2})\begin{cases} \Delta V^{(2k+2)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ V_\eta^{(2k+2)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ V^{(2k+2)} = u_{k+1}, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.10}$$

On répète cette étape pour $k \geq 0$ jusqu'à un critère d'arrêt prévus respecté. On utilise : $\|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon$ comme critère d'arrêt, ou ε un petit nombre positif.

4.4 Applications

Résolution d' un problème aux limites avec méthode des différences finies :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & \text{sur } \Omega \\ u(0,\theta) = u(1,\theta) = 0 \\ u(r,0) = u(r,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Où $\Omega = \{(r,\theta) \in]0,1[\times]0,\varphi[\}$ on a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{4.12}$$

$$u(r+h,\theta) = u(r,\theta) + h\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + o\left(h^2\right) \tag{4.13}$$

$$u(r-h,\theta) = u(r,\theta) - h\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + o\left(h^2\right) \tag{4.14}$$

Par soustraction (4.14) de (4.13) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2h}[u(r+h,\theta) - u(r-h,\theta)]$$

Par addition les deux relations (4.13) et (4.14) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2}[u(r+h,\theta) + u(r-h,\theta) - 2u(r,\theta)]$$

De même manière, on peut déduire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{h^2}[u(r,\theta+h) + u(r,\theta-h) - 2u(r,\theta)]$$

On remplace dans (4.12) on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta u = &\frac{1}{h^2}[u(r+h,\theta) + u(r-h,\theta) - 2u(r,\theta)] + \frac{1}{2rh}[u(r+h,\theta) - u(r-h,\theta)] \\ &+ \frac{1}{r^2h^2}[u(r,\theta+h) + u(r,\theta-h) - 2u(r,\theta)] = 0\end{aligned}$$

telles que $i,j = \overline{1,3}$, $r = ih$:

$$\frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}] + \frac{1}{2rh}[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}] + \frac{1}{r^2h^2}[u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}] = 0$$

$$(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2rh})u_{i+1,j}+(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2rh})u_{i-1,j}+(-\frac{2}{h^2}-\frac{2}{r^2h^2})u_{i,j}+(\frac{1}{r^2h^2})u_{i,j+1}+(\frac{1}{r^2h^2})u_{i,j-1} = 0$$

$$(1+\frac{h}{2r})u_{i+1,j}+(1-\frac{h}{2r})u_{i-1,j}+(-2-\frac{2}{r^2})u_{i,j}+(\frac{1}{r^2})u_{i,j+1}+(\frac{1}{r^2})u_{i,j-1}=0$$

$$(1+\frac{1}{2i})u_{i+1,j}+(1-\frac{1}{2i})u_{i-1,j}+(-2-\frac{2}{(ih)^2})u_{i,j}+\frac{1}{(ih)^2}u_{i,j+1}+\frac{1}{(ih)^2}u_{i,j-1}=0$$

Maintenant on déduire le système suivant :

$$A_hU=B_h$$

telle que :

$$A_h=\begin{bmatrix} -2-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -2-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -2-\frac{2}{h^2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -2-\frac{2}{4h^2} & \frac{1}{4h^2} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4h^2} & -2-\frac{2}{4h^2} & \frac{1}{4h^2} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4h^2} & -2-\frac{2}{4h^2} & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & -2-\frac{2}{9h^2} & \frac{1}{9h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{9h^2} & -2-\frac{2}{9h^2} & \frac{1}{9h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{9h^2} & -2-\frac{2}{9h^2} \end{bmatrix}$$

Où

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_h=-\begin{bmatrix} \frac{1}{2}u_{01}+\frac{1}{h^2}u_{10} \\ \frac{1}{2}u_{02} \\ \frac{1}{2}u_{03}+\frac{1}{h^2}u_{14} \\ \frac{1}{4h^2}u_{20} \\ 0 \\ \frac{1}{4h^2}u_{24} \\ \frac{7}{6}u_{41}+\frac{1}{9h^2}u_{30} \\ \frac{7}{6}u_{42} \\ \frac{7}{6}u_{43}+\frac{1}{9h^2}u_{34} \end{bmatrix}$$

On prend $h=0.25$:

$$A = \begin{bmatrix} -34 & 16 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -34 & 16 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -34 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 4 & -10 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 & -5.55 & 1.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0 & 1.77 & -5.55 & 1.77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0 & 1.77 & -5.55 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2.52 \\ 0 \\ -2.52 \end{bmatrix}$$

Pour trouve U on va résoudre le système suivant :

$$U = A^{-1}B$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.0417 & -0.0256 & -0.0122 & -0.0111 & -0.0113 & -0.0066 & -0.0040 & -0.0048 & -0.0030 \\ -0.0256 & -0.0539 & -0.0256 & -0.0113 & -0.0177 & -0.0113 & -0.0048 & -0.0070 & -0.0048 \\ -0.0122 & -0.0256 & -0.0417 & -0.0066 & -0.0113 & -0.0111 & -0.0030 & -0.0048 & -0.0040 \\ -0.0055 & -0.0056 & -0.0033 & -0.1313 & -0.0678 & -0.0290 & -0.0403 & -0.0337 & -0.0173 \\ -0.0056 & -0.0088 & -0.0056 & -0.0678 & -0.1603 & -0.0678 & -0.0337 & -0.0576 & -0.0337 \\ -0.0033 & -0.0056 & -0.0055 & -0.0290 & -0.0678 & -0.1313 & -0.0173 & -0.0337 & -0.0403 \\ -0.0013 & -0.0016 & -0.0010 & -0.0268 & -0.0224 & -0.0115 & -0.2123 & -0.0822 & -0.0289 \\ -0.0016 & -0.0023 & -0.0016 & -0.0224 & -0.0384 & -0.0224 & -0.0822 & -0.2413 & -0.0822 \\ -0.0010 & -0.0016 & -0.0013 & -0.0115 & -0.0224 & -0.0268 & -0.0289 & -0.0822 & -0.2123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2.52 \\ 0 \\ -2.52 \end{bmatrix}$$

Alors

$$U = \begin{bmatrix} 0.2686 \\ 0.2741 \\ 0.2686 \\ 0.5009 \\ 0.4858 \\ 0.5009 \\ 0.6936 \\ 0.5166 \\ 0.6936 \end{bmatrix}$$

On déduire la fonction de corrosion :

$$\gamma = -\frac{u}{u_\eta}$$

Donc

$$\gamma_{ij} = -2h\frac{u_{ij}}{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}$$

Pour $i, j = \overline{1,3}$

$$\gamma = \begin{bmatrix} -0.2681 \\ -0.2821 \\ -0.2681 \\ -0.5892 \\ -1.0016 \\ -0.5892 \\ 0.6923 \\ 0.5317 \\ 0.6923 \end{bmatrix}$$

U_{11}	0.2686	γ_{11}	-0.2681
U_{12}	0.2741	γ_{12}	-0.2821
U_{13}	0.2686	γ_{13}	-0.2681
U_{21}	0.5009	γ_{21}	-0.5892
U_{22}	0.4858	γ_{22}	-1.0016
U_{23}	0.5009	γ_{23}	-0.5892
U_{31}	0.6936	γ_{31}	0.6923
U_{32}	0.5166	γ_{32}	0.5317
U_{33}	0.6936	γ_{33}	0.6923

TABLE 4.1 : Les Valeurs de U et La Fonction Gamma

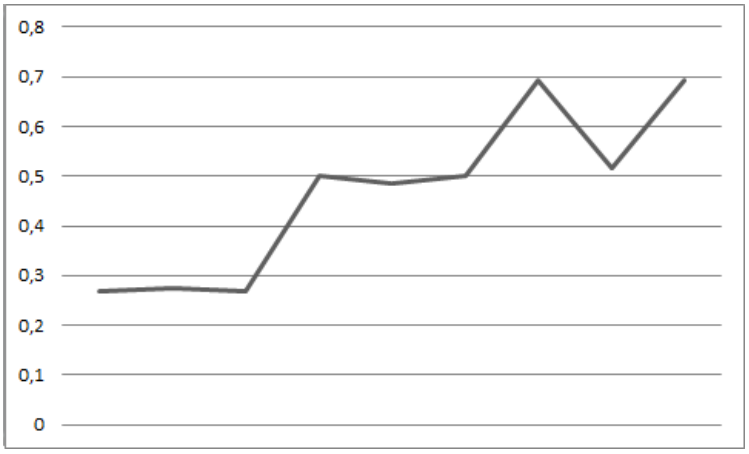

FIGURE 4.1 : Les Valeurs de U

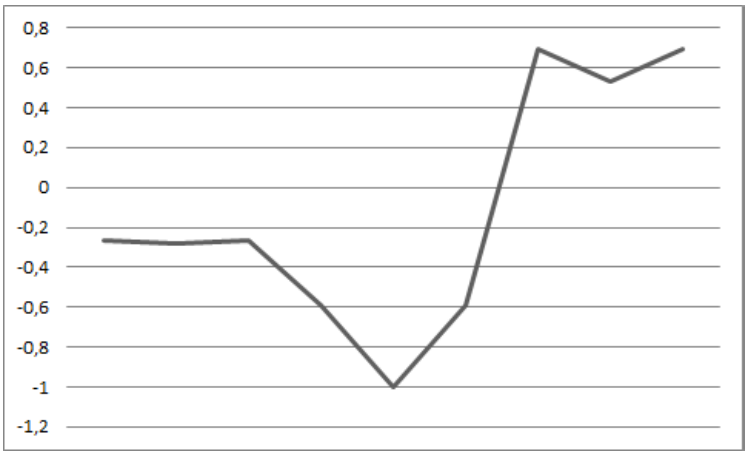

FIGURE 4.2 : La Fonction Gamma

Conclusion

Dans ce mémoire , nous avons étudié un problème inverse d'ordre deux pour un Laplacien qui modélise le phénomène de corrosion .

La première partie est la partie théorique, nous avons étudié l'existence et l'unicité d'un problème elliptique dans l'espace H^1 par le théorème de Lax-Milgram et dans H^2 nous utilisant le lemme de Peetre et comme résultat général $H^{m+2}; m \in \mathbb{N}$.

La deuxième est la partie analytique, on résoudre le problème par la méthode de séparation des variables et on donne un exemple.

La troisième partie est la partie numérique, on a posé notre problème inverse gouverne par Laplacien avec des conditions aux limites mixtes, puis on a résolution le problème par présse un algorithme et on a trouvé la suit (γ_n) qui tend vers le fonction γ qui représente le taux de corrosion .

Bibliographie

[1] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation, "Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique", Éditions de l'École Polytechnique - Mai 2006

[2] M. Lemkeddem, Résolution d'un problème inverse elliptique qui modélise la détection et l'évolution de la corrosion dans une conduite métallique, Mémoire du Magister Univercité Kasdi Merbah Ouargla, 2012.

[3] A. Paul, Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques, Mémoire du Doctora Université de Poitiers, 2011.

[4] G. Inglese, An inverse problem in corrosion detection, Inverse problem 13(1997), 977-994.

[5] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and A. V. Fomin, An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations, Comput. Math. Phys. 31(1)(1991), 45–52.

[6] I. Gouni, Etude d'un problème inverse d'ordre deux perturbé, Mémoire du Master Univercité Kasdi Merbah Ouargla, 2011.

[7] J. Cheng, M. Choulli, X. Yang. An Iterrative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe, Numerical mathematics , A journal of chinese universites, Vol 14. No3 Ang 2005.

[8] M. BOUHENNI Hocine, Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach et applications, Mémoire du Master Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen, 2017.

[9] E. Goncalvès, Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007, pp.99.

[10] M. Choulli, Introduction aux problèmes inverses elliptique et parabolique, Springer. Vering Berlin Heidelberg 2009.

ملخص

في هذا العمل ، نعتبر مشكلة عكسية تتمثل في تحديد التآكل الذي يحدث في جزء داخلي لا يمكن الوصول إليه من أنبوب من القياسات التي أجريت على الحد الخارجي. يتم صياغة المشكلة بواسطة معادلة لابلاس بمصطلح غير معروف γ في شروط الحدود على الحدود الداخلية. استناداً إلى خوارزمية التكرارية لـ Maz'ya ، تقترح طريقة BEM منتظمة للحصول على حلول تقريبية لهذه المشكلة العكسية. تظهر النتائج العددية أن طريقتنا يمكن تنفيذها بسهولة وفعالة للغاية.

الكلمات المفتاحية: مشكلة عكسية ، تآكل ، مشكلة كوشي ، لابلاسيان.

Résumé

Dans ce travail, nous considérons un problème inverse de détermination de la corrosion se produisant dans une partie intérieure inaccessible d'un tuyau à partir des mesures effectuées sur la limite extérieure. Le problème est modélisé par l'équation de Laplace avec un terme inconnu γ dans la condition limite sur la limite intérieure. Basé sur l'algorithme itératif de Maz'ya, une méthode BEM régularisée est proposée pour obtenir des solutions approchées à ce problème inverse. Les résultats numériques montrent que notre méthode peut être facilement réalisée et est très efficace.

Mots-clés: Problème inverse, Corrosion, Problème de Cauchy, Laplacien.

Abstract

In this work, we consider an inverse problem of determining the corrosion occurring in an inaccessible interior part of a pipe from the measurements on the outer boundary. The problem is modelled by Laplace's equation with an unknown term γ in the boundary condition on the inner boundary. Based on the Maz'ya iterative algorithm, a regularized BEM method is proposed for obtaining approximate solutions for this inverse problem. The numerical results show that our method can be easily realized and is quite effective.

Keywords: Inverse problem, Corrosion, Cauchy problem, Laplacian.