UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par : Bensayah Dounia zad

Thème

Existence de solutions positives de quelques problèmes différentiels fractionnaires

Version de : 27/06/2019

Devant le jury composé de :

M. Badidja Salim	MCB. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Amara Abdelkader	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Dédicace

Je Dédie ce modeste travail A mes chers parents,
Rachida, Abdelghani
pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.
A mes chères soeurs, Amira, Hafssa, Kamilai
pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.
A mon cher frère, Amhammed Rached pour son soutien et ses encouragements.
A toute ma famille
Lotfi, Mohammed Sghir, Omare, Abdellah, Ahmed Ali, Mohammed Asile, Chahed Jasmine, Latifa, Hocine,
pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.
A tout mes amis
Noura, Hadjer, Nousaiba, Soumia, Safa, Rayane, Sarah, Salwa, Chrifa.

Remerciements

Je remercie avant tout mon dieu Allah qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au docteur **Brahim Tellab**, qui'est toujours montré à écouter et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer pour son soutien et son enseignement toujours judicieux et rigoureux durant toutes les phases de ce mémoire.
Je remercie également **M. Badidja Salim** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.
Je remercie également **M. Amara Abdelkader** de jury pour l'honneur qu'ils mont accordé en acceptant de juger mon travail.
Nous adressons également notre profonde gratitude à tous les professeurs de l'université **KASDI Merbah Ouargla**.
Je voudrais également remercier mes parents, mes soeurs, mes frère, mes amis et à toute la famille.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires ont joué un rôle important en raison de leurs vastes applications en physique, chimie, ingénierie, économie et plusieurs d'autres domaines. De nombreux livres et documents sur le calcul fractionnaire, les équations différentielles fractionnaires et les équations intégrales fractionnaires sont apparus voir par exemple [10, 11, 15, 4].

Récemment, de nombreux auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de solutions pour des équations différentielles fractionnaires, voir [2, 6, 1, 13]. L'étude des problèmes aux limites pour les équations différentielles fractionnaires semble y avoir un nouvel intérêt.

Zhang [16] a considéré l'existence et la multiplicité de solutions positives du problème aux limites fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t < 1 \\ \\ u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha \leq 2$, $f : [0,1] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^{C}D^{\alpha}_{0^+}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. L'auteur a obtenu des résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives en utilisant les théorèmes de point fixe de Krasnoselskii et de Leggett-Williams.

Yu et Jiang [14] on discuté le problème aux limites à deux points pour une équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ \\ u(0) = u(1) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

où α est un nombre réel vérifiant $2 < \alpha \leq 3$, $f : [0,1] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^{RL}D^{\alpha}_{0^+}$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. Il ont donné quelques résultats d'existence de solutions positives multiples pour des problèmes aux limites fractionnaires en utilisant les propriétés de la fonction de Green et en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Dans [8], Kelley et Peterson ont établis le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. *Supposons que $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait à une condition de Lipschitz uniforme par rapport à la deuxième variable sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ avec une constante de Lipschitz L, c'est-à-dire*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \tag{1}$$

pour tout $(t,x)(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. *Si*

$$b - a < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L}},$$

alors, le problème aux limites

$$\begin{cases} u''(t) = -f(t,u(t)), \quad a < t < b \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admet une solution unique.

Dans ce travail, nous généralisons le problème ordinaire précédent au cas fractionnaire :
Premièrement, nous étendrons le résultat prouvé dans le théorème 0.0.1, en considérant une dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous étudions donc l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^{\alpha} u(t) = -f(t,u(t)), \quad a < t < b \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $1 < \alpha \leq 2$.
D'un autre côté, nous traitons le problème aux limites fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^{\alpha} u(t) = -f(t,u(t)), \quad a < t < b \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad B \geq A \geq 0, \end{cases}$$

où $1 < \alpha \leq 2$ et ${}^{RL}D_0^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

Quelques résultats d'existence de solutions positives du problème précédent sont obtenus en utilisant les notions de sous-solution et sur-solution et des théorèmes de point fixe.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque ou Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dx^n}$ pour désigne la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôspital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hòpital a répondu : Qui sinifie $\frac{d^n}{dx^n}f$ si $n = \frac{1}{2}$?.

Cette lettre de l'Hôspital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôspital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématique. Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle, inclut :

P.S.Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J.Liouville (1832-1873), B. Riemann(1847), H.Holomgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867,1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A.Krug (1890), J.Hadamard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S.Pincherle (1902), G.H.Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P.L'evy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.Zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), A.Erdélyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

1.2 Fonctions spéciales

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions : Gamma, Bêta et Mittag-Leffler.

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est fonction de base définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad Re(\alpha) > 0. \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0+) = +\infty, \Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour
$0 < \alpha < 1$.

Propriétés 1.2.1.

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.2}$$

Pour démonter cette propriétés on utilise l'intégration par parties

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^{(\alpha+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = \left[-t^\alpha e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha\Gamma(\alpha).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2! \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
D'aprés (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \tag{1.5}$$

si nous multiplions (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.2) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi.$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

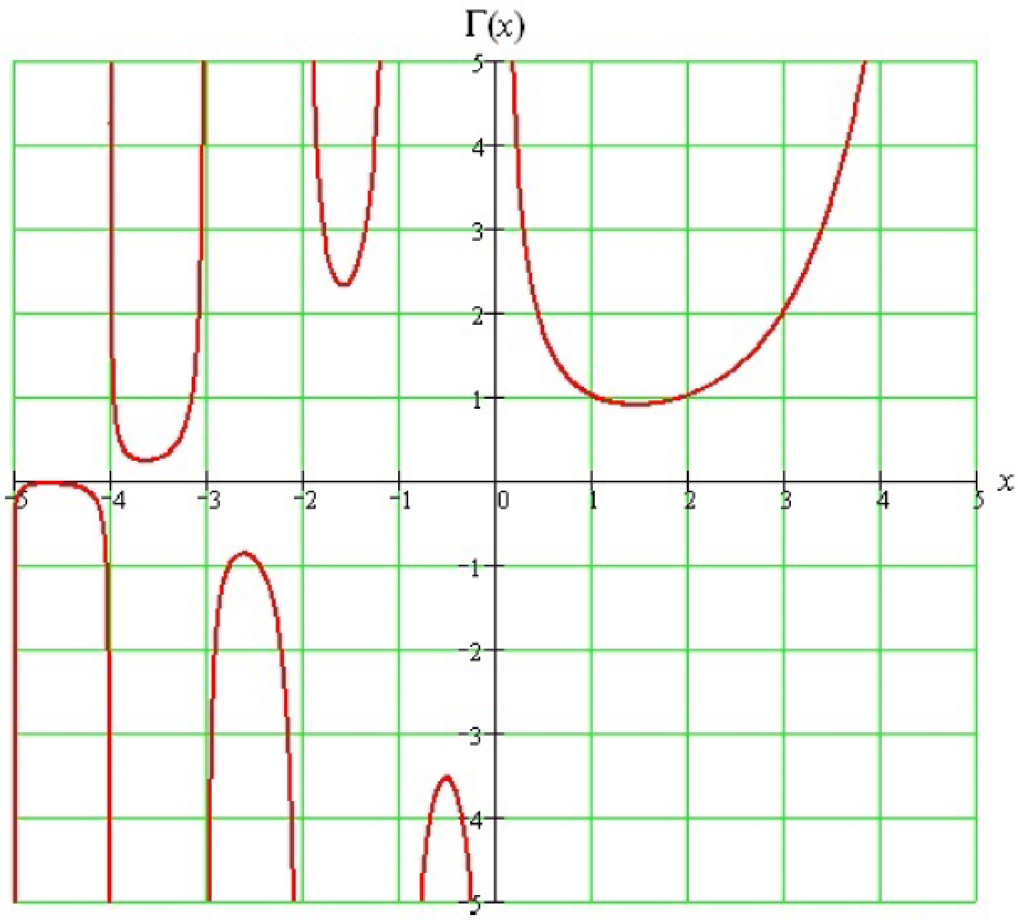

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

1.2.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta définie par :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+.$$

Proposition 1.2.1.

La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+, \quad ona : B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}t_2^{\beta-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2\\ &=\int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{\beta-1}e^{-|t_1+t_2|}dt_2\right)dt_1.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$t_3=t_1+t_2.$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}dt_1\int_{t_1}^{+\infty}(t_3-t_1)^{\beta-1}e^{-t_3}dt_3\\ &=\int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\int_0^{t_1}(t_3-t_1)^{\beta-1}t_1^{\alpha-1}dt_1,\end{aligned}$$

si on pose $t_4=\dfrac{t_1}{t_3}$, on arrive $\grave{a}$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(t_3-t_4t_3)^{\beta-1}(t_4t_3)^{\alpha-1}t_3dt_4\right)\\ &=\int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(t_3(1-t_4))^{\beta-1}t_4^{\alpha-1}t_3^{\alpha}dt_4\right)\\ &=\int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(1-t_4)^{\beta-1}t_4^{\alpha-1}t_3^{\alpha+\beta-1}dt_4\right)\\ &=\int_0^{+\infty} t_3^{\alpha+\beta-1}e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(1-t_4)^{\beta-1}t_4^{\alpha-1}dt_4\right)\\ &=B(\alpha,\beta)\int_0^{+\infty} t_3^{\alpha+\beta-1}e^{-t_3}dt_3\\ &=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Propriétés 1.2.2. *(voir[3])*

1. $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$.
2. $\alpha B(\alpha,\beta+1)=B(\alpha+1,\beta)$.
3. *Si* α*=m et* β*=n, on obtient :* $B(m,n)=\dfrac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$.
4. $B(\alpha,1)=\dfrac{1}{\alpha}$.

1.2.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903(voir[11]). Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

$1)$ La représentation de la fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie par la fonction suivante :

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{1.7}$$

$2)$ La représentation de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par le développement en série suivante :

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha>0,\beta>0. \tag{1.8}$$

D'après la définition (1.8), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par (1.8) on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\\
&=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)}\\
&=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\
&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\
&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}$$

Cas particulier pour $\alpha = 0, 1, 2$ et $\beta = 2$ alore :

$$E_{0,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$
$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$
$$E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cosh(x).$$
$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

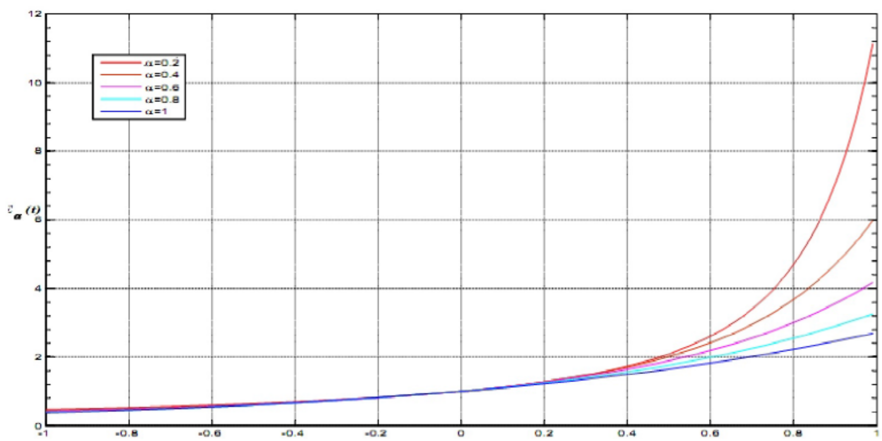

FIGURE 1.2 – Courbe représentative de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

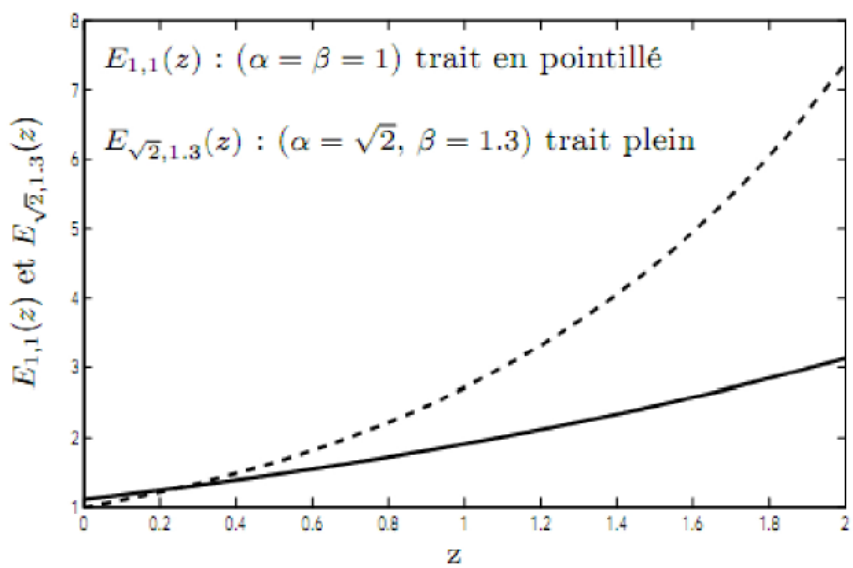

FIGURE 1.3 – Courbe représentative de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

1.3 Théorèmes fondamentaux

1.3.1 Quelques théorèmes du point fixe

On considère E et F des espaces de Banach muni des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ respectivement,
C(E,F) l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F .$$

Définition 1.3.1.

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$

1. *On dit que$M$ est équicontinue en $x \in M$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, \|x - y\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon, \forall f \in M.$$

2. *On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $x \in E$.*

Cas particulier

Dans le cas où $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, une partie M de $C(E, F)$ est dite équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in [a, b] : |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in M.$$

Définition 1.3.2.

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$. On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in M$$

Définition 1.3.3.

Soit $A : E \longrightarrow F$, s'il existe L tel que :

$$\forall (x, y) \in E : \|A(x) - A(y)\|_F \leq L \|x - y\|_E$$

1. *On dit que A est un opérateur Lipschitizienne si $L \geq 0$.*

2. *On dit que A est un opérateur contractant si $L < 1$.*

Définition 1.3.4.

Soit $A : E \longrightarrow F$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de A si : $A(x) = x$.

1.3.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.3.1. ***(Théorème du point fixe de Banach)***

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $A : E \longrightarrow E$ une application contractante avec la constante
de contraction L, alors A admet un unique point fixe $x \in E$.

1.3.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.3.2. ***(Théorème du point fixe de Schauder)***

Soient K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et $A : K \longrightarrow K$ une application continue.
Alors A admet un point fixe.

1.3.4 Théorème d'Arzèla-Ascoli

Théorème 1.3.3. ***(Théorème d'Arzèla-Ascoli)***

Soit M une partie de $C([a, b])$ muni de la norme uniforme. M est relativement compact dans $C([a, b])$ si et seulement si :

1. *M est uniformément borné.*
2. *M est équicontinu.*

Chapitre 2

Dérivées et intégrales fractionnaires

2.1 Dérivée et intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

2.1.1 Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette dérivée est de généralisation la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit f la fonction continue sur $[a, b]$, la dérivée première de la fonction f est définie par :

$$f'(t) = D^{(1)}f(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(x) = D^{(2)}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Et, par récurrence, la dérivée d'ordre entier n si n est un nombre entier positif ou nul :

$$D^{(n)}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(x-rh). \tag{2.1}$$

Cette formule représente la dérivée d'ordre entier n si n est positif, et l'intégrale répétée-n fois si n est négatif.

Où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Ceci peut être remplacé par des fonctions gamma telles que $\frac{\Gamma(n+1)}{r!\Gamma(n-r+1)}$ pour un nombre non entier n, c'est-à-dire, α.
Par conséquent, on définie la dérivée d'ordre non entier α

$$D_a^{\alpha}f(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\Gamma(\alpha+1)}{r!\Gamma(\alpha-r+1)}f(x-rh). \tag{2.2}$$

Et pour α négative,

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= \frac{-n(-n-1)...(-n-r+1)}{r!}\\ &= (-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+r-1)}{r!}\\ &= (-1)^r\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \longrightarrow (-1)^r\frac{\Gamma(n+r)}{r!\Gamma(n)}.\end{aligned}$$

Cette formule représente la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f .

$$^{GL}D_a^{\alpha}f(x) \quad = \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\Gamma(\alpha+1)}{r!\Gamma(\alpha-r+1)}f(x-rh). \tag{2.3}$$

Et la dérivée fractionnaire d'ordre $-\alpha$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f est :

$$^{GL}D_a^{-\alpha}f(x) \quad = \quad \lim_{h\to +0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(n+r)}{r!\Gamma(n)}f(x-rh). \tag{2.4}$$

Donc, Si la fonction f est de classe C^n, on obtient :

$$^{GL}D_a^{\alpha}f(x) = \sum_{r=0}^{n-1}\frac{f^{(r)}(a)(x-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^n(t)dt, \tag{2.5}$$

et

$$^{GL}D_a^{-\alpha}f(x) = \sum_{r=0}^{n-1}\frac{f^{(r)}(a)(x-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1}f^n(t)dt.$$

Propriétés 2.1.1.

1. ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***

   Soit m, n deux nombre entiers et α, β non entier.

   - *Si $\beta < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :*

     $$^{GL}D_a^{\alpha}(^{GL}D_a^{\beta}f(x)) = {}^{GL}D_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

   - *Si $0 \leq m-1 < \beta < m$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $f^k(a) = 0 \quad$ pour $k = 1, 2, ..., r-2$ avec $r = \max(m, n)$ alors :*

     $$^{GL}D_a^{\alpha}(^{GL}D_a^{\beta}f(x)) = {}^{GL}D_a^{\beta}(^{GL}D_a^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

   Pour m entier positif et α non entier on a :

   $$\frac{d^m}{dx^m}(^{GL}D_a^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_a^{m+\alpha}f(x),$$

   et

   $$\frac{d^m}{dx^m}(^{GL}D_a^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_a^{m+\alpha}f(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)(a)(x-a)^{k-\alpha-m}}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}.$$

Exemple 2.1.1.

1. ***La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov***

   La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante $f(x) = C$ est non nulle :
   Si f (x) = c et α non entier positif on a :

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad pour \quad k = 1, 2, ..., n,$$

   d'après (2.5) *on a :*

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^{\alpha} f(x) &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-\alpha)^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t)dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-\alpha)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2. ***La dérivée fractionnaire de $f(x) = (x-a)^{\beta}$ au sens de Grünwald-Letnikov***

   Si α non entier et Pour $0 < n-1 < \beta < n$, alors on a :

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad pour \quad k = 1, 2, ..., n-1,$$

   et

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n},$$

   d'où

$${}^{GL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds$$

   en effectuant le changement de variables $s = a + t(x-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x \left[(x-a)(1-t)\right]^{n-\alpha-1} t^{\beta-n}(x-a)^{\beta-n+1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

2.1.2 Intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Définition 2.1.1.

Soit $\alpha > 0$, et f est une fonction continue, l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov est définie par :

$$
\begin{aligned}
{}^{GL}I_a^{\alpha} f(x) &= {}^{GL}D_a^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{r=0}^{n} \binom{\alpha}{r} f(x - rh), \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.
\end{aligned}
$$

Si la fonction f est de classe C^n, on obtient :

$$
{}^{GL}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(t) dt.
$$

2.2 Dérivée et intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction réelle, a appartient au domaine de défnition de f et α un nombre réel strictement positif.

2.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

soit f une fonction continue l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$
I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.
$$

La primitive seconde de f définit comm suite

$$
I_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^u f(t) dt \right) du.
$$

Permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t) dt, \\
I_a^2 f(x) &= \int_a^x (x-t) f(t) dt.
\end{aligned}
$$

Le n^{ieme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$
I_a^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.
$$

Pour tout entier n.

Depuis (1.3)

$$
I_a^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \tag{2.6}
$$

Cette formulle (2.6) a un sens même quand n prenant une valeur non-entier, on définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 2.2.1.

Soit $f \in C([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonctin f d'ordre α est définie par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Exemple 2.2.1.

Nous considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, on calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds. \end{aligned}$$

On effectue de changement de variables $s = a + (x-a)t$ on obtient,

on a $\quad ds = (x-a)dt.$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-(a+(x-a)t))^{\alpha-1} (a+(x-a)t-a)^\beta (x-a)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)t)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} t^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-t)]^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} t^\beta dt \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^\beta dt, \end{aligned}$$

où B est la fonction Bêta d'Euler définie par :

$$B(\beta+1, \alpha) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^\beta dt,$$

et comme

$$B(\beta+1,\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}I_a^\alpha f(x) &= B(\beta+1,\alpha)\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

D'ou

$$I_a^\alpha f(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}.$$

Propriétés 2.2.1.

soit $h\in C[a,b]$ *alors :*

1. $I_a^0 h(x)=h(x)$.
2. *l'opérateur intégral* I_a^0 *est linéaire.*

Proposition 2.2.1.

Soient f *une fonction intégrable et bornée, et* α,β *deux nombres réels strictement positifs. Alors :*

$$I_a^\beta I_a^\alpha f(x)=I_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

$$\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x))=I_a^{\alpha-1}f(x),\quad (\alpha>1).$$

Preuve :

1. On montre la premiére égalité :

$$\begin{aligned}I_a^\beta I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dtds,\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt.$$

En effectuant le changement de variables $s = t + (x - t)y$

$$\begin{aligned}I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \int_0^1 \left[(x-t)(1-y)\right]^{\alpha-1} \left[y(x-t)\right]^{\beta-1} (x-t)dydt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dydt.\end{aligned}$$

D'aprés la définition de la fonction Bôta, on $\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy = B(\beta, \alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ et par la suite on aura :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

2. On montre maintenant la deuxiéme égalité :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right),\end{aligned}$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue, et on a Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{\alpha-1} f(t)dt) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= I_a^{\alpha-1} f(x).\end{aligned}$$

D'oû le résultat.

Théorème 2.2.1.

Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in$ [a, b] et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$.

Preuve :

En introduisant la définition 2.2.1 puis an utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)|\, dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)|\, dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|\, (b-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a,b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat désiré.

2.2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.2.

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α notée ${}^{RL}D_a^\alpha$ est définie par :

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt$$

avec n un entier naturel supérieur strictement à α.

En particulier, pour α=0 et α=$m \in \mathbb{N}$, on a

$$({}^{RL}D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t) dt = f(x) \tag{2.7}$$

$$({}^{RL}D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \int_a^x f(t) dt = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.1.

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f(x)),$$

avec $n-1 \leq \alpha < n$.

Propriétés 2.2.2. *(voir [9, 11])*

1. ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***

   - *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,*

$${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)) = f(x).$$

En général on a

$$^{RL}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) = ^{RL} D_a^{\alpha-\beta} f(x).$$

Et si $\alpha - \beta < 0$, *alors :*

$$^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(x) = I^{\beta-\alpha} f(x).$$

- *En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas*

$$^{RL}D_a^{-\alpha}(^{RL}D_a^{\beta} f(x)) = ^{RL} D_a^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{n} [^{RL}D_a^{\beta-k} f(x)] \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

avec $n-1 \leq \beta < n$.

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

Pour n un nombre entier et α *non entier.*

La dérivation fractionnaire et la dérivation d'ordre entiere ne commutent que si :
$f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\frac{d^n}{dx^n}(^{RL}D_a^{\alpha} f(x)) = ^{RL} D_a^{n+\alpha} f(x),$$

mais

$$^{RL}D_a^{\alpha}(\frac{d^n}{dx^n} f(x)) = ^{RL} D_a^{n+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

3. ***Composition avec les dérivés fractionnaires***

Soit $n-1 \leq \alpha < n$ *et* $m-1 \leq \beta < m$, *alors*

$$^{RL}D_a^{\alpha}(^{RL}D_a^{\beta} f(x)) = ^{RL} D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m} [^{RL}D_a^{\beta-k} f(x)] \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}$$

et

$$^{RL}D_a^{\beta}(^{RL}D_a^{\alpha} f(x)) = ^{RL} D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{n} [^{RL}D_a^{\alpha-k} f(x)] \frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}.$$

Par la suite les deux opérateurs de dérivation fractionnaire ne commutent que si $\alpha = \beta$ *et*

$$[^{RL}D_a^{\beta-k} f(x)] = 0$$

pour tout $k = 1, 2, ...m, et$

$$[^{RL}D_a^{\alpha-k} f(x)] = 0$$

pour tout $k = 1, 2, ...n$.

Exemple 2.2.2.

1. ***La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville***

   la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(x) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$^{RL}D_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

2. ***La dérivée de $f(x) = (x-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville***

   Soit $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$ alors on a :

$$^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta} dt.$$

   En effectuant le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on obtient

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{n-\alpha-1} s(x-a)^{\beta}(x-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(x-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2.

Si la dérivée $^{RL}D_a^{\alpha}$ a existe en un point x_0, il en est de même de $^{RL}D_b^{\alpha}$, quel que soit $b < x_0$, et on a

1. $I_a^{n-\alpha} f(x) = I_b^{n-\alpha} f(x) + \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$
2. $^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = ^{RL} D_b^{\alpha} f(x) + \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$
3. $I_a^{\beta}(1) = \dfrac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}, \quad (\beta \geq 0).$
4. $^{RL}D_a^{\alpha} \dfrac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \dfrac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$

Preuve :

1. On a
$$\begin{aligned}
I_a^{n-\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt + \int_b^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_b^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \\
&= I_b^{n-\alpha}f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

2. D'aprés 1), on a
$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha}f(x) \\
&= D^n I_b^{n-\alpha}f(x) + D^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \\
&=^{RL} D_b^{\alpha}f(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^b (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

3. Un calcul immédiat donne
$$\begin{aligned}
I_a^{\beta}(1) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\beta-1}dt \\
&= \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)}\left[-(x-t)^{\beta}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\beta}}{\beta\Gamma(\beta)},
\end{aligned}$$

   Comme
$$\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1).$$

   Alors, il résulte que
$$I_a^{\beta}(1) = \frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}, \quad (\beta \geq 0).$$

4. On a
$${}^{RL}D_a^{\alpha}\frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = D^n I_a^{(n-\alpha)} I_a^{\beta}(1) = D^n I_a^{(n+\beta-\alpha)}(1) = D^n\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}.$$

   Par suite
$${}^{RL}D_a^{\alpha}\frac{(x-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$$

Remarque 2.2.2.

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est est non-commutative i.e :
$${}^{RL}D^{m\,RL}D^{\alpha}f(x) =^{RL} D^{m+\alpha}f(x) \neq^{RL} D^{\alpha\,RL}D^{m}f(x).$$

Théorème 2.2.2. *(voir[7])*

Soit f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ telles que ${}^{RL}D_a^{\alpha}f$ et${}^{RL}D_a^{\alpha}g$ existe. Alors pour λ,μ $\in \mathbb{R}$, ${}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f+\mu g)$ existe et on a :

$${}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x)+\mu({}^{RL}D_a^{\alpha}g)(x).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}{}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f+\mu g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^x(x-t)^{n-t-1}(\lambda f(t)+\mu g(t))dt\\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^x(x-t)^{n-t-1}f(t)dt\\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^x(x-t)^{n-t-1}f(t)dt\\ &= \lambda({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x)+\mu({}^{RL}D_a^{\alpha}g)(x).\end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 2.3.1.

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire au sens Caputo de la fonction f d'ordre α notée ${}^{C}D_a^{\alpha}$ est définie par :

$$\begin{aligned}{}^{C}D_a^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt\\ &= I^{n-\alpha}D^nf(x),\end{aligned}$$

avec n un entier naturel supérieur strictement à α.

Propriétés 2.3.1.

1. ***La relation avec la dérivée de Caputo et Riemann-Liouville***
   Soit $\alpha\geq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n-1\leq\alpha<n$, Si ${}^{C}D_a^{\alpha}f(x)$ et ${}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)$ existe alors :

   $${}^{C}D_a^{\alpha}f(x)={}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \tag{2.9}$$

   d'ápre (2.9), On déduit que

   $${}^{c}D_a^{\alpha}f(x)={}^{RL}D_a^{\alpha}f(x).$$

   Si $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,2,...,n-1$.
2. ***Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire***

   Si f est une fonction continue on a

   $${}^{C}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}f=f \quad et \quad I_a^{\alpha C}D_a^{\alpha}f(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)(x-a)^k}}{k!}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemple 2.3.1.

1. ***La dérivée de** $f(x) = (x-a)^\beta$ **au sens de Caputo***
   Pour $0 < n-1 < \beta < n$ *, on a :*

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n},$$

   d'où

$${}^{C}D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds.$$

   En effectuant le changement de variables $s = a + t(x-a)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x \left[(x-a)(1-t)\right]^{n-\alpha-1} t^{\beta-n}(x-a)^{\beta-n+1} dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

2. ***La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante***

   La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle

$${}^{C}D_a^\alpha C = 0.$$

2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité**
   La dérivation fractionnaire est une opérateur linéaire :

$$D_a^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x),$$

   où D_a^α désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

2. **Régle de Leibniz**
   Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

   La généralisation de cette formule nous donne :

$$D_a^\alpha(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) D_a^{\alpha-k} g(x) - R_n^\alpha(x),$$

   où $\quad n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} g(t) dt \int_t^x f^{(n+1)}(y)(t-y) dy, \quad (\lim_{n\to\infty} R_n^\alpha(x) = 0).$$

   Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a, x]$, la formule devient :

$$D_a^\alpha(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) D_a^{\alpha-k} g(x).$$

   D_a^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions positives

3.1 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = -f(t, u(t)), \quad a < t < b \\ \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $1 < \alpha \leq 2$.

Avant d'énoncer nos résultats nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivants :

Lemme 3.1.1. *[9, 4] Pour tout $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation homogène ${}^{RL}D_a^{\alpha} u(t) = 0$ dans $C(a, b) \cap L^1(a, b)$ est donnée par*

$$u(t) = c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha-2} + c_{n-1} t^{\alpha-1},$$

où c_i sont des constantes réelles $(i = 0, 1, ..., n-1)$.

Lemme 3.1.2. *[9, 4] Supposons que $u \in C(a, b) \cap L^1(a, b)$ telle que ${}^{RL}D_a^{\alpha} u \in C(a, b) \cap L^1(a, b)$. Alors,*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} u(t) = u(t) + c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha-2} + c_{n-1} t^{\alpha-1},$$

pour certaine constante $c_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, ..., n-1)$.

Lemme 3.1.3. *Supposons que $1 < \alpha \leq 2$ et $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le problème fractionnaire aux limites :*

$$\begin{cases} D_a^{\alpha} u(t) = -h(t), \quad a < t < b & (3.2) \\ \quad u(a) = A, \quad u(b) = B, & (3.3) \end{cases}$$

admet une solution unique définie par :

$$u(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t, s) h(s) ds,$$

avec

$$\theta(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a),$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a < s \leq t < b \\ \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a < t \leq s < b \end{cases}$$

Preuve :
Supposons que u est solution du problème (3.2)-(3.3). Alors le Lemma 3.1.2 nous donne :

$$u(t) = -I_a^\alpha h(t) - c_0 - c_1 t,$$

en utilisant la première condition aux limites, nous obtenons :

$$-c_0 - c_1 a = A,$$

d'autre part, la seconde condition aux limites implique que :

$$-c_0 - c_1 b = B + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

après quelques manipulations, on arrive à :

$$c_1 = \frac{A-B}{b-a} - \frac{1}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

et

$$c_0 = -A + \frac{a(B-A)}{b-a} + \frac{a}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(t) &= A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[-\int_a^t \big[(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}\big] h(s) ds \\ &+ \frac{t-a}{b-a} \int_t^b (b-s)^{\alpha-1} h(s) ds \Big]. \end{aligned}$$

$\square$

Par le Lemme 3.1.3, on en déduit immédiatement le résultat suivant :

Lemme 3.1.4. *Supposons que f est une fonction continue sur $[a,b]$. Si $u \in C([a,b],\mathbb{R})$ est une solution du problème aux limites (3.1), alors u vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s) f(s,u(s)) ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie au Lemme 3.1.3.

Lemme 3.1.5. *La fonction de Green G définie précédemment vérifie la condition suivante :*

$$G(t,s) \geq 0, \quad \textit{pour tout} \quad a < t, s < b.$$

Preuve :

On définit deux fonctions G_1 et G_2 par :

$$\begin{aligned} G_1(t,s) &= -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, \quad a < s \leq t < b \\ G_2(t,s) &= \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, \qquad\qquad\qquad a < t \leq s < b \end{aligned}$$

Premièrement, il est clair que : $G_2(t,s) \geq 0$. Voyons maintenant $G_1(t,s)$.
Pour tout $t \in]a,b[$, nous avons : $0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1 &\iff 0 \leq \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1 \\ &\iff \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \leq \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} \\ &\iff -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \leq G_1(t,s). \end{aligned}$$

Donc,il suffit de montrer que :

$$h_1(t,s) = -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \geq 0.$$

On peut écrire $h_1(t,s)$ sous la forme :

$$h_1(t,s) = -\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[b - \big(a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a}\big)\right]^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}.$$

Maintenant, notez que :

$$\begin{aligned} a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a} \geq s &\iff \frac{a(t-a)+(s-a)(b-a)}{t-a} \geq s \\ &\iff a(t-a)+(s-a)(b-a) - s(t-a) \geq 0 \\ &\iff (s-a)(b-t) \geq 0 \\ &\iff s \geq a, \end{aligned}$$

par conséquent, $h_1(t,s) \geq 0$ ce qui implique que $G_1(t,s) \geq 0$. Ce qui termine la preuve.

□

Lemme 3.1.6. *La fonction de Green G vérifie :*

$$\int_a^b |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} . \frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^{\alpha}.$$

Preuve :
Comme $G(t,s) \geq 0$ pour tout $a < t, s < b$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |G(t,s)|ds &= \int_a^b G(t,s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^t \left(\frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right)ds + \int_t^b \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{t-a}{b-a}\frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + \frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-t)^\alpha}{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Définissons une fonction $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\psi(t) = \frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha},$$

alors,

$$\psi'(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\alpha}\left[\left(\frac{b-a}{t-a}\right)^{\alpha-1} - \alpha\right].$$

Par conséquent, nous constatons immédiatement que le maximum de la fonction ψ est atteint au point

$$t_1 = \frac{b-a}{\alpha^{1/\alpha-1}} + a,$$

et on a :

$$\psi(t_1) = \frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^\alpha,$$

ce qui donne directement

$$\int_a^b |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^\alpha.$$

□

Théorème 3.1.1. *Supposons que $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continu et satisfasse une condition de Lipschitz uniforme par rapport à la deuxième variable sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ avec une constante de Lipschitz L c'est-à-dire que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,$$

pour tous $(t,x),(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Si

$$b - a < \frac{\Gamma^{1/\alpha}(\alpha).\alpha^{2\alpha-1/\alpha(\alpha-1)}}{L^{1/\alpha}.(\alpha-1)^{1/\alpha}}, \tag{3.4}$$

alors, le problème aux limites fractionnaire (3.1) possède une solution unique.

Preuve :
Soit $B = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\| = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|.$$

Il suit du Lemme 3.1.4 que, si $u \in C([a,b],\mathbb{R})$ est solution du problème (3.1) alors, u vérifie l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)f(s,u(s))ds.$$

Maintenant, nous définissons l'opérateur $F : B \longrightarrow B$ par :

$$Fu(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)f(s,u(s))ds.$$

On montre que pour tout $t \in]a,b[$ l'opérateur $F : B \longrightarrow B$ admet un unique point fixe.

Pour tous $x, y \in B$, nous avons :

$$\begin{aligned} |Fx(t) - Fy(t)| &\leq \int_a^b |G(t,s)||f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\ &\leq \int_a^b |G(t,s)|L|x(s) - y(s)|ds \\ &\leq L\|x-y\| \int_a^b |G(t,s)|ds. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.1.6, nous obtenons :

$$\|Fx - Fy\| \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} . \frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^{\alpha}\|x-y\|.$$

Par l'hypothèse (3.4), on conclut que F soit une contraction sur B. Toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont satisfaites et par conséquent notre problème (3.1) admet une solution unique.

□

Remarque 3.1.1. *Notez que les résultats du Théorème 0.0.1 peut être obtenus par le Théorème 3.1.1 en prenant $\alpha = 2$.*

Exemple 3.1.1. *On considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D_0^{3/2}u(t) = -\dfrac{e^{-t}}{1+e^t}u(t), \quad 0 \leq t \leq 1 & (3.5) \\ \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2, & (3.6) \end{cases}$$

Dans cet exemple, nous avons :

$$\alpha = 3/2, \quad f(t,u(t)) = \frac{e^{-t}}{1+e^t}u(t).$$

Alors,

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \frac{1}{2}|x(t) - y(t)|$$

et

$$\frac{\Gamma^{1/\alpha}(\alpha).\alpha^{2\alpha-1/\alpha(\alpha-1)}}{L^{1/\alpha}(\alpha-1)^{1/\alpha}} = \frac{\pi^{1/3}.3^{8/3}}{4} > 1.$$

L'inégalité (3.4) est vérifiée, donc par le Théorème 3.1.1 on conclut que le problème aux limites (3.5)-(3.6) possède une solution unique.

3.2 Existence de solution positive

Dans cette section, nous établissons l'existence de solution positive d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant la notions de sous-solution et sur-solution.

$$\begin{cases} D_a^\alpha u(t) = -f(t, u(t)), \quad a < t < b, \quad 1 < \alpha \leq 2 & (3.7) \\ \quad u(a) = A, \quad u(b) = B, \; B \geq A \geq 0, & (3.8) \end{cases}$$

où $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Lemme 3.2.1. *Si $h \in C[a, b]$ et $h(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, alors le problème aux limites fractionnaire*

$$\begin{cases} D_a^\alpha u(t) = -h(t), \quad a < t < b, \quad 1 < \alpha \leq 2 & (3.9) \\ \quad u(a) = A, \quad u(b) = B, \; B \geq A \geq 0. & (3.10) \end{cases}$$

admet une solution unique positive u définie par :

$$u(t) = A + \frac{B - A}{b - a}(t - a) + \int_a^b G(t, s)h(s)ds,$$

où $G(t, s)$ est la fonction de Green définie au Lemme 3.1.3.

Lemme 3.2.2. *Si $u \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ une solution positive du problème (3.7)-(3.8), alors il existe deux constantes réels m et M telle que :*

$$\theta(t) + m\sigma(t) \leq u(t) \leq \theta(t) + M\sigma(t),$$

où

$$\sigma(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right],$$

et

$$\theta(t) = A + \frac{B - A}{b - a}(t - a).$$

Preuve :

Puisque $u \in C[a, b]$, alors il existe une constante positive $M^\star$ telle que $|u(t)| \leq M^\star$, pour tout $t \in [a, b]$. Prenons

$$m = \min_{(t,u)\in[a,b]\times[0,M^\star]} f(t, u(t)), \qquad M = \max_{(t,u)\in[a,b]\times[0,M^\star]} f(t, u(t)).$$

Donc, nous avons :

$$m\int_a^b G(t, s)ds \leq \int_a^b G(t, s)f(s, u(s))ds \leq M\int_a^b G(t, s)ds,$$

ce qui donne en vue du Lemme 3.2.1

$$\theta(t)+\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right] \leq u(t) \leq \theta(t)+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right].$$

Alors

$$\theta(t) + m\sigma(t) \leq u(t) \leq \theta(t) + M\sigma(t).$$

$\square$

Maintenant, nous introduisons les définitions de la sous-solution et la sur-solution du problème aux limites fractionnaire (3.7)-(3.8).

Définition 3.2.1. *Une fonction α est dite sous-solution du problème (3.7)-(3.8) si $\alpha \in C[a,b]$ et vérifie les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} -D_a^\alpha \alpha(t) \le f(t,\alpha(t)), \quad a < t < b, \quad 1 < \alpha \le 2 & (3.11) \\ \alpha(a) \le A, \quad \alpha(b) \le B, \;\; B \ge A \ge 0. & (3.12) \end{cases}$$

Définition 3.2.2. *Une fonction β est appelée sur-solution du problème (3.7)-(3.8) si $\beta \in C[a,b]$ et vérifie les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} -D_a^\alpha \beta(t) \ge f(t,\beta(t)), \quad a < t < b, \quad 1 < \alpha \le 2 & (3.13) \\ \beta(a) \ge A, \quad \beta(b) \ge B, \;\; B \ge A \ge 0. & (3.14) \end{cases}$$

Théorème 3.2.1. *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*
(H_1) : *$f(t,u) \in C([a,b] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est non décroissante par rapport à u, $f(t,\sigma(t)) \not\equiv 0$ pou tout $t \in]a,b[$.*
(H_2) : *Il existe une constante réelle positive $\mu < 1$ telle que :*

$$k^\mu f(t,u) \le f(t,ku), \quad \forall 0 \le k \le 1,$$

alors, le problème aux limites fractionnaire (3.7)-(3.8) une solution positive u.

Preuve :
Premièrement, nous montrerons que les fonctions $\alpha(t) = k_1 h(t)$ et $\beta(t) = k_2 h(t)$ sont respectivement sous-solution et sur-solution du problème (3.7)-(3.8), où

$$0 < k_1 \le \min\left\{a_2^{-1}, a_1^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right\}, \quad k_2 \ge \max\left\{a_1^{-1}, a_2^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right\},$$

$$a_1 = \min\left\{1, \inf_{t\in[a,b]} f(t,\sigma(t))\right\}, \quad a_2 = \max\left\{1, \sup_{t\in[a,b]} f(t,\sigma(t))\right\},$$

et on a

$$h(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t,s) f(s,\sigma(s)) ds.$$

Il est clair par le Lemme 3.2.1, que la fonction h est une solution positive du problème

$$\begin{cases} D_a^\alpha u(t) = -f(t,\sigma(t)), \quad a < t < b, \quad 1 < \alpha \le 2 \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \;\; B \ge A \ge 0. \end{cases}$$

D'après le Lemme 3.2.2 et d'après simplifications, nous avons :

$$a_1 \sigma(t) \le h(t) \le a_2 \sigma(t), \quad t \in]a,b[. \tag{3.15}$$

En utilisant les hypothèses du Théorème 3.2.1 et l'inégalité (3.15), on trouve :

$$k_1 a_1 \le \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)} \le k_1 a_2 \le 1, \quad \frac{1}{k_2 a_2} \le \frac{\sigma(t)}{\beta(t)} \le \frac{1}{k_2 a_1} \le 1$$

et par l'hypothèse,

$$k_1 \leq a_1^{\frac{\mu}{1-\mu}}, \quad k_2 \geq a_2^{\frac{\mu}{1-\mu}}$$

nous arrivons à :

$$(k_1 a_1)^\mu \geq k_1, \quad (k_2 a_2)^\mu \leq k_2.$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f(t,\alpha(t)) &= f\big(t, \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}\sigma(t)\big) \\ &\geq \left(\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}\right)^\mu f(t,\sigma(t)) \\ &\geq (k_1 a_1)^\mu f(t,\sigma(t)) \\ &\geq k_1 f(t,\sigma(t)), \end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned} f(t,\sigma(t)) &= f\big(t, \frac{\sigma(t)}{\beta(t)}\beta(t)\big) \\ &\geq \left(\frac{\sigma(t)}{\beta(t)}\right)^\mu f(t,\beta(t)) \\ &\geq \frac{1}{(k_2 a_2)^\mu} f(t,\beta(t)) \\ &\geq \frac{1}{k_2} f(t,\beta(t)), \end{aligned}$$

ce qui veut dire que :

$$f(t,\beta(t)) \leq k_2 f(t,\sigma(t)). \tag{3.17}$$

D'où, (3.16) et (3.17) impliquent que :

$$-D_a^\alpha \alpha(t) = k_1 f(t,\sigma(t)) \leq f(t,\alpha(t)), \;\; a < t < b, \;\; 1 < \alpha \leq 2,$$

et

$$-D_a^\alpha \beta(t) = k_2 f(t,\sigma(t)) \geq f(t,\beta(t)), \;\; a < t < b, \;\; 1 < \alpha \leq 2.$$

Il reste à montrer que : $\alpha(a) \leq A, \quad \alpha(b) \leq B, \quad \beta(a) \geq A$ et $\beta(b) \geq B$.

En vue des hypothèses du Théorème 3.2.1, il est clair que, $k_1 \leq 1$ et $k_2 \geq 1$ donc nous avons :

$$\alpha(a) = k_1 h(a) = k_1 A \leq A, \quad \alpha(b) = k_1 h(b) = k_1 B \leq B$$

et

$$\beta(a) = k_2 h(a) = k_2 A \geq A, \quad \beta(b) = k_2 h(b) = k_2 B \geq B.$$

Par conséquent, les fonctions α et β sont respectivement sous-solution et sur-solution du problème (3.7)-(3.8).
Maintenant, on montre que le problème aux limites fractionnaire

$$
\begin{cases} -D_a^\alpha u(t) = h(t,u(t)), \quad a<t<b, \quad 1<\alpha\leq 2 & (3.18)\\ u(a)=A, \quad u(b)=B, \;\; B\geq A\geq 0. & (3.19)\end{cases}
$$

a une solution

$$
h(t,u(t)) = \begin{cases} f(t,\alpha(t)), & u(t)\leq \alpha(t),\\ \\ f(t,u(t)), & \alpha(t)\leq u(t)\leq \beta(t),\\ \\ f(t,\beta(t)), & \beta(t)\leq u(t). \end{cases}
$$

Pour ce fait, nous définissons l'opérateur $T : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C([a,b],\mathbb{R})$ as :

$$
Tu(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t,s)h(s,u(s))ds,
$$

où $G(t,s)$ et $\theta(t)$ sont les fonctions définies au Lemme 3.1.3. Puisque $f(t,u)$ est non décroissante par rapport à u alors, pour tout $u\in C[a,b]$ nous avons :

$$
f(t,\alpha(t)) \leq h(t,u(t)) \leq f(t,\beta(t)), \quad t\in]a,b[.
$$

Alors, il existe une constante positive M_1 telle que $|h(t,u(t))|\leq M_1$, ceci veut dire que T est uniformément borné.
Pour tous $u\in C[a,b]$ et $a<t_1\leq t_2<b$, donc on a :

$$
\begin{aligned}
|Tu(t_1)-Tu(t_2)| &\leq \int_a^b |G(t_1,s)-G(t_2,s)|h(s,u(s))ds\\
&\leq \Bigg[\left(\frac{B-A}{b-a}+\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)|t_1-t_2|\\
&+ \frac{1}{\alpha}|(t_1-a)^\alpha-(t_2-a)^\alpha|\Bigg]\int_a^b f(s,\beta(s))ds. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Le second membre de (3.20) est indépendant de u et tend vers zéro quand $t_1\longrightarrow t_2$, Donc T est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzèla-Ascoli on en déduit que T est compact. Par conséquent, par le théorème du point fixe de Schauder [5], l'opérateur T admet un point fixe, ce qui veut dire que le problème aux limites fractionnaire (3.18)-(3.19) possède une solution.

Finalement, nous monrerons que le problème (3.7)-(3.8) admet une solution positive.
Supposons que $u^\star$ soit solution du problème (3.18)-(3.19). On sait que la fonction $f(t,u)$ est non décroissante en u, et

$$
f(t,\alpha(t)) \leq h(t,u^\star(t)) \leq f(t,\beta(t)), \quad \forall\, t\in]a,b[.
$$

Donc,

$$
\begin{cases} -D_a^\alpha w(t) \geq f(t,\beta(t)) - h(t,u^\star(t)), \quad a<t<b, \quad 1<\alpha\leq 2\\ w(a)\geq 0, \quad w(b)\geq 0, \;\;, \end{cases}
$$

où $w(t)=\beta(t)-u^\star(t)$.
Par le Lemme 3.2.1, on en déduit que $w(t)\geq 0$, alors $u^\star(t)\leq\beta(t)$, pour $t\in]a,b[$. De même, $\alpha(t)\leq u^\star(t)$, pour $t\in[a,b]$, par conséquent, $u^\star(t)$ est une solution positive du problème (3.7)-(3.8).

$\square$

Exemple 3.2.1. *Nous considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0^+}u(t)(t) = f(t,u(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, & (3.21) \\ \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \ , & (3.22) \end{cases}$$

avec $f(t,u) = t^2 + u + u^{\mu}, \qquad 0 < \mu < 1.$
nous avons $k^{\mu} \leq 1$ *pour* $0 < \mu < 1$ *et* $0 \leq k \leq 1$. *alors*

$$\begin{aligned} k^{\mu} f(t,u) &= k^{\mu}t^2 + k^{\mu}u + (ku)^{\mu} \\ &\leq t^2 + ku + (ku)^{\mu}, \quad parceque \quad k^{\mu} \leq 1. \\ &= f(t,ku). \end{aligned}$$

Le Théorème 3.2.1 affirme que le problème (3.21)-(3.22) admet une solution positive u.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons établi l'existence et l'unicité de solutions positives d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nos résultats ont été obtenus en appliquant quelques théorèmes de point fixe, en particulier on a exploité les théorèmes de point fixe de Banach et de Schauder.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[2] R. P. Agrawal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, Georgian Mathematical Journal, 2009, vol. 16, 3, pp. 401-411.

[3] Erdelyi A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[4] Z. Bai, H. Lï, Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505.

[5] D. Guo, Nonlinear Functional Analysis, Shandong, Sci. Tech. Press, Jinan, 1985.

[6] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[7] Diethelm.K,The analysis of fractional differential equations : An application-oriented exposition using differential operators of caputo type,Lecture Notes in Mathematics,2010, 1-262.

[8] W. G. Kelley, A. C. Peterson, The theory of differential equations, second edition, Universi- text, Springer, New York, 2010.

[9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B. V., Amesterdam, 2006.

[10] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[11] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[12] A.A. Stanislavsky, Hamiltonian formalism of fractional systems, Eur. Phys. J. B, 49(2006), 93-101.

[13] S. Xinwei, L. Landong, Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2007, 223, 3, pp. 291-298.

[14] Y. Yu, D. Jiang, Multiple Positive Solutions for the Boundary Value Problem of A Nonlinear Fractional Differential Equation. Northeast Normal University (2009).

[15] S. Q. Zhang, The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.

[16] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations. Electron. J. Dier. Equ. 2006, 36 (2006).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de quelques problèmes différentiels fractionnaires au sens de Riemann-Liouville avec des conditions aux limites. Pour prouver l'existence et l'unicité des solutions positives en utilisant le théorème du point fixe du Banach et le théorème du point fixe du Schauder.

Mots Clés: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Solution positive, Point fixe.

Abstract

In this thesis, we have studied the existence and uniqueness of some fractional differential problems in the Riemann-Liouville sense with boundary conditions. To prove the existence and uniqueness of positive solutions using the Banach fixed point theorem and the Schauder fixed point theorem.

Key words: Fractional Derivative of Riemann-Liouville, Positive solution, .Fixed point.

الملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود و وحدانية الحلول الموجبة للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات كسرية من نوع ريمان ليوفيل . بحيث قمنا باثبات وجود و وحدانية الحلول الموجبة باستخدام نظرية النقطة الثابتة لبناخ، و النقطة الثابتة لشولدر.

الكلمات المفتاحية: المشتقات الكسرية، الحل الموجب، النقطة الثابتة.