Existence de solutions positives de quelques problèmes différentiels fractionnaires

Bensayah Dounia zad
Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
bensayahdounia@gmail.com

Résumé

L'objectif du travail est l'étude des problèmes différentiels fractionnaires, en cherchant des conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité de solutions positives de ces problèmes différentiels fractionnaires.
Mots Clés : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Solution positive, Point fixe.

1. Introduction

Théorème 1.1 *Supposons que f :[a,b]× $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit une fonction continue qui satisfait*

$$|f(t,u)-f(t,y)| \leq L|x-y|$$

pour tout (t,x),(t,y) ∈ [a,b]× $\mathbb{R}$.

Si $b-a < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

alors, le problème aux limites :

$$u'' = -f(t,u(t)) \quad ,a<t<b \tag{1.1}$$

$$u(a)=A, \quad u(b)=B \quad ,A,B \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

admet une solution unique.

On va généraliser les résultats de problème (3.1)-(1.3) au cas fractionnaire en considérant le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_a^{\alpha}u(t) = -f(t,u(t)), & a<t<b, \\ u(a)=A, u(b)=B, & A,B \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur [a,b].

En deuxième temps, nous discuterons l'existence et l'unicité de solutions positives du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_a^{\alpha}u(t) = -f(t,u(t)), & a<t<b, \\ u(a)=A, u(b)=B, & A \geq B \geq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

où ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville et $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue sur [a,b].

2. Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et lemmes fondamentaux du calcul fractionnaire qui seront utilisés ultrieurement :

Définition 2.1 *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α, et on la note ${}^{RL}D^{\alpha}$ la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-s-1}f(s)ds \\ &= (\frac{d}{dt})^n(I_a^{n-\alpha}f(t)). \end{aligned}$$

avec n un entier tel que $n=[\alpha]+1$.

Lemme 2.2 *Supposons que* $1<\alpha\leq 2$ *et* $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors le problème fractionnaire aux limites :*

$$D_a^{\alpha}u(t) = -h(t), \quad a<t<b \tag{2.1}$$

$$u(a)=A, \quad u(b)=B, \tag{2.2}$$

admet une solution unique définie par :

$$u(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

avec

$$\theta(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a)$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a<s\leq t<b \\ \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a<t\leq s<b \end{cases}$$

Lemme 2.3 *La fonction de Green G satisfait la condition suivante :*

$$G(t,s) \geq 0$$

Lemme 2.4 *La fonction de Green G vérifie :*

$$\int_a^b |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha-1}{\alpha^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}}(b-a)^{\alpha}.$$

3. Énoncé des résultats

Théorème 3.1 *Supposons que f :[a,b]× $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit continue et satisfait une condition de Lipschitz uniforme par rapport à la deuxième variables sur [a,b]×$\mathbb{R}$ avec une constante de Lipschitz L c'est-dire que*

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y| \tag{3.1}$$

pour tous (t,x),(t,y) ∈ [a,b] × $\mathbb{R}$.

Si $b-a < \dfrac{\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha)\alpha^{\frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}}}{L^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}}}$

alors, le problème aux limites admet une solution unique.

Maintenant, nous introduisons les définitions de la sous-solution et la sur-solution du problème aux limites fractionnaire (1.4).

Définition 3.2 *Une fonction α est dite sous-solution du problème (1.4) si $\alpha \in C[a,b]$ et vérifie les hypothèses suivantes :*

$$-D_a^{\alpha}\alpha(t) \leq f(t,\alpha(t)), \quad a<t<b, \quad 1<\alpha\leq 2 \tag{3.2}$$

$$\alpha(a)\leq A, \quad \alpha(b)\leq B, \ B\geq A\geq 0. \tag{3.3}$$

Définition 3.3 *Une fonction β est appelée sur-solution du problème (1.4) si $\beta \in C[a,b]$ et vérifie les hypothèses suivantes :*

$$-D_a^{\alpha}\beta(t) \geq f(t,\beta(t)), \quad a<t<b, \quad 1<\alpha\leq 2 \tag{3.4}$$

$$\beta(a)\geq A, \quad \beta(b)\geq B, \ B\geq A\geq 0. \tag{3.5}$$

Théorème 3.4 *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*
(H_1) : $f(t,u) \in C([a,b]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *est non décroissante par rapport à* u, $f(t,\sigma(t)) \not\equiv 0$ *pou tout* $t \in]a,b[$.
(H_2) : *Il existe une constante réelle positive* $\mu<1$ *telle que :*

$$k^{\mu}f(t,u) \leq f(t,ku), \quad \forall 0\leq k\leq 1,$$

alors, le problème aux limites fractionnaire (1.4) une solution positive u.

Idée de la démonstration :
La démonstration se fait en quatre étapes
•Étape 1 : Nous montrerons que les fonctions $\alpha(t)=k_1h(t)$ et $\beta(t)=k_2h(t)$ sont respectivement sous-solution et sur-solution du problème (1.4), où

$$0<k_1\leq \min\{a_2^{-1}, a_1^{\frac{\mu}{1-\mu}}\}, \quad k_2 \geq \max\{a_1^{-1}, a_2^{\frac{\mu}{1-\mu}}\},$$

$$a_1 = \min\{1, \inf_{t\in[a,b]} f(t,\sigma(t))\}, \quad a_2 = \max\{1, \sup_{t\in[a,b]} f(t,\sigma(t))\},$$

and

$$h(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t,s)f(s,\sigma(s))ds.$$

•Étape 2 : On montre que : $\alpha(t)\leq A, \quad \alpha(b)\leq B, \quad \beta(a)\geq A$ et $\beta(b)\geq B.$

•Étape 3 : Nous définissons l'opérateur $T : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C([a,b],\mathbb{R})$ as :

$$Tu(t) = \theta(t) + \int_a^b G(t,s)h(s,u(s))ds,$$

où $G(t,s)$ et $\theta(t)$ sont les fonctions définies au Lemme 2.2.
•Étape 4 : On applique le théorème du point fixe de Schauder pour montrer l'existence d'une solution positive du problème (1.4)

Références

[1] L. M. Song, Existence of positive solutions to boundary value problem for a nonlinear fractional differential equations, Journal of South China Normal University : Natural Science Edition, 44 (2012), 25-28.

[2] M. A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, P. Noordhoff, Netherlands (1964).

[3] R. P. Agrawal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, Georgian Mathematical Journal, 2009, vol. 16, 3, pp. 401-411.

[4] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[5] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[6] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.