Sur la stabilité de solutions d'équations différentielles fractionnaires

Messaouda Saidi **Brahim Tellab (encadreur)**

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
fat.mathmatique @gmail.com

Résumé

L'objectif principal de ce travail, est d'étudier la stabilité de la solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire á dérivée fractionnaire de Caputo .

Mots Clés : stabilité de la solution, Dérivée fractionnaire de Caputo, fonction de Lyapunov.

1. Introduction

On considère le système suivant pour une équation différentielle fractionnaire avec dérivée fractionnaire de Caputo .

$$ {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0 \tag{1.1}$$

oú $0 < \alpha < 1$ et $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Nous supposerons que pour toute donné initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, le système (1.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une solution $x(t; t_0, x_0) \in C^{\alpha}([t_0, +\infty])$, le put de ce travail est d'étudier la stabilité du système (1.1), pour ce fait nous supposerons dans la suite que l'origine x=0 soit un point d'équilibre du système d'ordre fractionnaire (1.1) c'est-á-dire que f(t, 0) $\equiv$ 0.

2. Préliminaires

pour l'étude de nos problèmes nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1 *Soit x(t) $\in \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Alors pour tout instant t$\geqslant t_0$*

$$\frac{1}{2} {t_0}^c D_t^{\alpha} x^2(t) \leq x(t) {t_0}^c D_t^{\alpha} x(t), \quad \forall \alpha \in]0, 1[\tag{2.1}$$

Lemme 2.2 *[1] Si $x(t) \in R^n$, (2.1) reste toujours applicable et on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $t \geq t_0$*

$$\frac{1}{2} {t_0}^c D_t^{\alpha} x^t(t).x(t) \leq x^t(t).{t_0}^c D_t^{\alpha} x(t) \tag{2.2}$$

Lemme 2.3 *Soit le probléme est donnée aux limite*

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}Y(t) - \lambda Y(t) = h(t), \quad t \geq t_0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

oú $0 < \alpha < 1$
la solution de ce problème est donnée par

$$Y(t) = Y_0 E_{\alpha,1}(\lambda(t - t_0)^{\alpha}) + \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - s)^{\alpha}) h(s) ds$$

ou $E_{\alpha,\beta}$ est la fonction Mittag-Leffler á deux paramètres.

Définition 2.4 *[2] Étant donné un intervalle [a, b] de R, la dérivée fractionnelle de Caputo d'une fonction x d'ordre $\alpha > 0$ est définie par.*

$${}_{a}^{c}D_t^{\alpha}x(t) = I_a^{m-\alpha} x^{(m)}(t), t \in [a, b],$$

ou $0 < m - 1 < \alpha \leq m$
quand $0 < \alpha < 1$, alors la dérivée partielle de Caputo d'ordre α d'une fonction absolument continue x on [a, b] réduit á.

$${t_0}^c D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \quad , t \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Définition 2.5 *[3] la fonction Mittag-Leffler á deux paramètres, est définit par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{2.4}$$

De la définition (2.4) ,il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha} + \beta(z).$$

En effet,par définition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{zz^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha} + \beta(z). \end{aligned}$$

Par exemple ,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^k$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

Définition des fonction de classe K et K_∞

Définition 2.6 *On dit qu'une fonction continue $\varphi : R_+ \to R_+$ appartient á la classe K si elle est strictement croissante et $\varphi(0) = 0$. Si en plus $\varphi(t) \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$, on dit que φ appartient á la classe K_∞.*

Remarque 2.7 *Si $\varphi_1, \varphi_2 : R_+ \to R_+$ sont deux fonctions de classe K(respectivement de classe K_∞) , alors les functions $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_2$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1$ sont aussi de classe K (resp. de classe K_∞).*

3. Énoncé des résultats

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V$\in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ qui admet une dérivée de Caputo d'ordre α pour tout t $\geq t_0$ telle que V(t,0)$\equiv$ 0 et une fonction α_1 de classe K vérifiant :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

$${t_0}^c D_t^{\alpha} V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \geq 0 \tag{3.2}$$

Alors le point x=0 est Stable .
Si, de plus pour certaine fonction $\alpha_2 \in K$

$$V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

Alors x=0 est uniformément Stable .

Théorème 3.2 *Supposons qu'il existe une fonction de lyapunov V$\in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ qui admet une dérivée de Caputo d'ordre α pour tout t $\geq t_0$ et deux fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ qui vérifient :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

$${t_0}^c D_t^{\alpha} V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq -c\alpha_2(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \geq 0 \tag{3.5}$$

alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.
α_i de plus, $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, alors $x = 0$ globalement uniformément asymptotiquement, stable.

Références

[1] M. A.Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A.Gallegos, R. CastroLinares, Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 22(2012), 650 659.

[2] K.Diethelm, The analysis of fractional dierential equations, an application oriented, exposition using dierential operators of Caputo type, Lecture Notes in Mathematics nr. 2004, Springer, Heidelbereg, 2010.

[3] A. A. Kilbas, H. M.Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and application of fractional dierential equations, Elsevier, New York, 2006