UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionelle

Par : Ayat Noura

Thème

Étude de quelques problèmes aux limites pour inclusions différentielles fractionnaires

Version de : 27/06/2019

Devant le jury composé de :

M. Amara Abdelkader	MCA. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Mezabia Mohamed Elhadi	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Dédicace

Je dédiece ce mémoire
A ma chére mére
qui m'a soutenue et encouragé durant ces années d'études. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.
A mon cher pére
qui m'ont aide á affronter les diffécultés
A mes soeurs: ***Soumia,Khadidja,Imane***
A mes frères: ***Karim,Ayoub,Haroun***
A mes amies: ***Dounia zad, sara, rayan, safa, saloua***
A mon chére amie : ***Shérifa*** *et sa fille* ***Nada***
A tous les membres de famille ***Ayat****, petite et grand*

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Je remercie mon encadreur **Brahim Tellab**. Pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour son aide, ses conseils, ses remarques et sa patience pendant ce travail.
Je remercie **M. Amara Abdelkader**, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.
Mes remerciements vont également à **M. Mezabia Mohamed Elhadi** d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.
J'adresse aussi des remerciements spéciaux tous les professeurs des mathématiques à l'université de Kasdi Merbah Ouargla.
Finalement, je tiens à exprimer mes profondes gratitudes à ma famille qui m a toujours soutenue et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les équation différentielles d'ordre fractionnaire ont joué un rôle trés important dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques voir par exemple [6,7,9]. Au cours des dernières années beaucoup d'attention a été porté sur les problèmes aux limites pour les équations différentielles et les inclusions fractionnaires voir [3,4,5,10].

l'existence de solutions des problèmes aux limites avec conditions non locales a été étudiée dans de nombreux travaux publiés citons à titre d'exemple [1,2,8].

Ce mémoire se décompose en trois chapitres organisés de la manière suivant :

Première chapitre : Dans ce chapitre on présente quelques définitions des fonctions spéciales utiles à la suite de ce travail telles que la fonction gamma, la fonction bêta et la fonction Mittag-Leffler ainsi que quelques propriétés fondamentales.

Deuxième chapitre : Ce chapitre est consacré pour un rappel général sur le calcul fractionnaire et plus précisément les définitions des dérivées et des intégrales fractionnaires aux de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que les liens entre ces opérateurs différentielles fractionnaires avec des exemples et quelques propriéts fondamentales.

Troisième chapitre : Premièrement, on va discuter l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire d'ordre non entier $\alpha \in$]1,2] avec condition aux limites non locales

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(0) = x_0, \quad x(1) = aI^{p}x(\eta), \quad 0 < \eta < 1 \end{cases} \tag{1}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α de Caputo,$f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, a est une constante réelle vérifiant $a\eta^{p+1} \neq \Gamma(p+2)$ et I^{P} est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Deuxièment, nous étudions le problème aux limites pour inclusions différentielles fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) \in F(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(0) = x_0, \quad x(1) = aI^{p}x(\eta), \quad 0 < \eta \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

où $F : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs multiples et $P(x)$ est la famille de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électro-chimie, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini aux $19^{ème}$e siècle par Riermann-Liouville et Leitinkov. Leur but est de prolonger la dèrivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Bien que la théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent [25] à la fin du $17^{ème}$e siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n..e dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour$n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques [26].

La liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul fractionnaire jusqu'au milieu du 20e siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel $(1823-1826)$, J. Liouville $(1832-1873)$, B. Riemann (1847), H. Holmgren $(1865-67)$, A.K. Grunwald $(1867-1872)$, A.V. Letnikov $(1868-1872)$, H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside $(1892-1912)$ S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood $(1917-1928)$, H. Weyl (1917), P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis $(1924-1936)$, A. Zygmund $(1935-1945)$ E.R. Amour $(1938-1996)$, A. ErdÂt'elyi $(1939-1965)$, H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949) [27].

1.2 fonctions usuelles pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions de bases du calcul fractionnaire.

1.2.1 La fonction Gamma

Définition 1.2.1 *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{1.1}$$

cette intégrale est convergente pour tout x>0 avec $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(x)$ *est une fonction strictement décroissante pour* $0 < x \leq 1$.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

on peut démontrer (1.2) par intégration par partie

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \big[-t^x e^{-t} \big]_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *en effet* $\Gamma(1) = 1$, *donc d'après (1.2) on obtient*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) = 2! \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Gamma(n+1) & = & n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \end{array}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$.
D'aprés (1.1) *nous avons*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, *alors* $dt = 2ydy$, *et nous obtenons maintenant*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy, \tag{1.3}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1.4}$$

Si nous multiplions (1.4) *et* (1.3) *nous obtenons :*

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) *est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir*

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi.$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$.

L'équation fonctionnelle (1.2) *entraine pour les entiers relatifs positifs n :*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

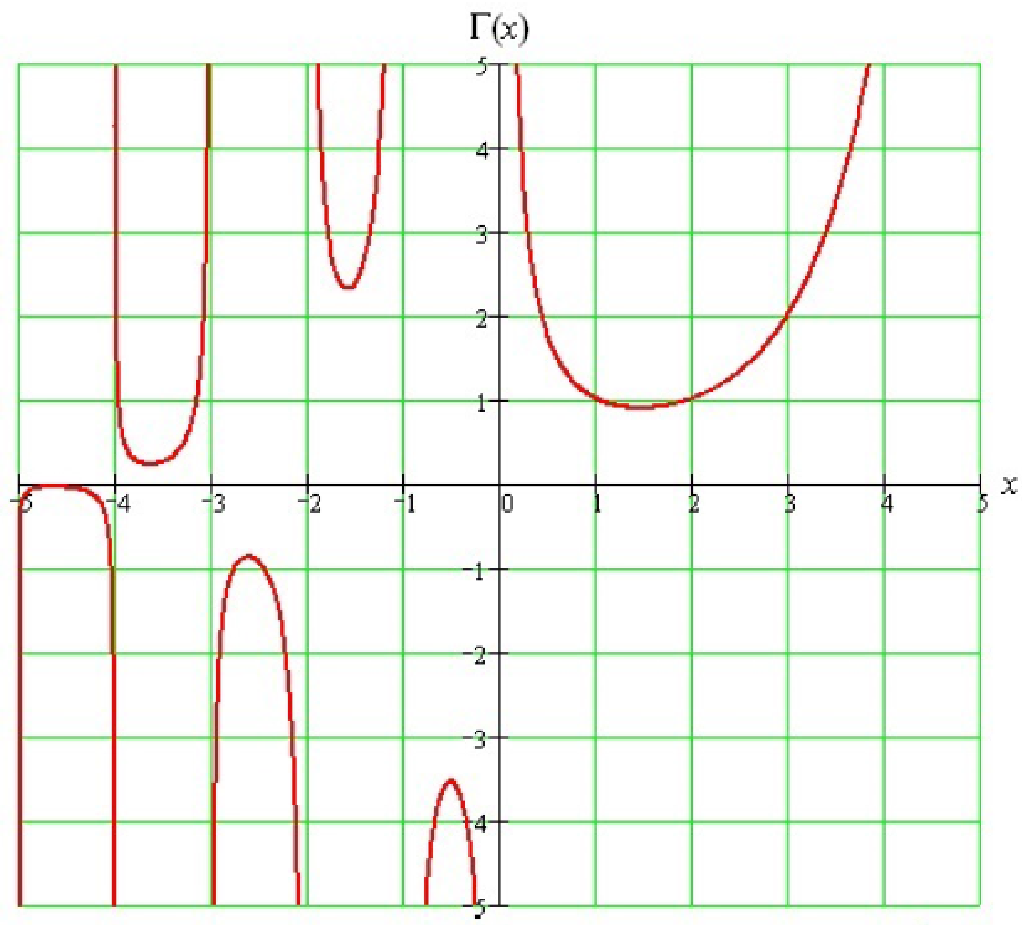

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.2.2 *Soit x,y >0*

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{1.6}$$

On peut définie la fonction Bêta par des termes de la fonction Gamma

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{1.7}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2\\
&= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-|t_1+t_2|}dt_2\right)dt_1
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$t_3=t_1+t_2.$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1\int_{t_1}^{+\infty}(t_3-t_1)^{y-1}e^{-t_3}dt_3\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\int_0^{t_1}(t_3-t_1)^{y-1}t_1^{x-1}dt_1
\end{aligned}$$

Si on pose $t_4=\dfrac{t_1}{t_3}$, on arrive $à$

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(t_3-t_4t_3)^{y-1}(t_4t_3)^{x-1}t_3dt_4\right)\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(t_3(1-t_4))^{y-1}t_4^{x-1}t_3^{x}dt_4\right)\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(1-t_4)^{y-1}t_4^{x-1}t_3^{x+y-1}dt_4\right)\\
&= \int_0^{+\infty} t_3^{x+y-1}e^{-t_3}dt_3\left(\int_0^1(1-t_4)^{y-1}t_4^{x-1}dt_4\right)\\
&= B(x,y)\int_0^{+\infty} t_3^{x+y-1}e^{-t_3}dt_3\\
&= B(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

donc

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Propriétés 1.2.1

1. $B(x,y) = B(y,x)$
2. $\alpha B(x,y+1) = B(x+1,y)$
3. *Si* x*=m et* y*=n, telle que,* $m,n \in \mathbb{N}$

$$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

4. $B(x,1) = \frac{1}{x}$

1.2.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler a été présenté par Mittag-Leffler et porte son nom $[23, 24]$, cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle .

Définition 1.2.3 *La fonction Mittag-Leffler est définie par :*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \tag{1.8}$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, elle définie par suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.9}$$

par la définition (1.9) on déduit que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

Car,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + E_{\alpha,\alpha+\beta}(x)
\end{aligned}$$

On rappelle également des cas pariculier :

$$
\begin{aligned}
E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\
E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x} \\
E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cosh(x)
\end{aligned}
$$

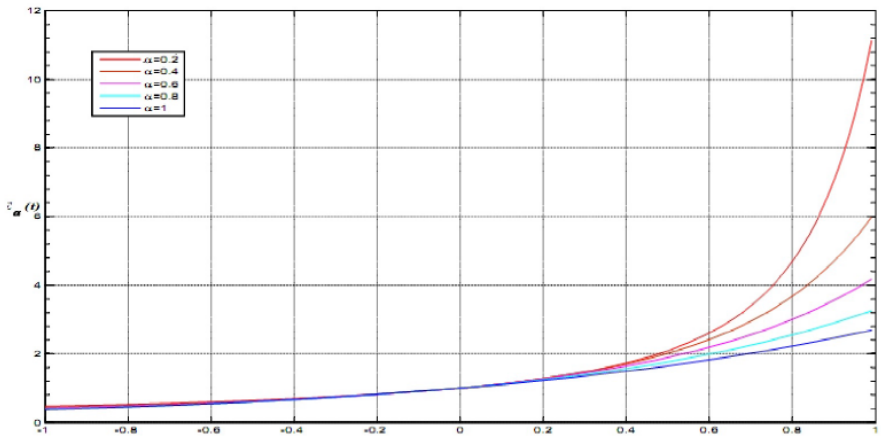

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

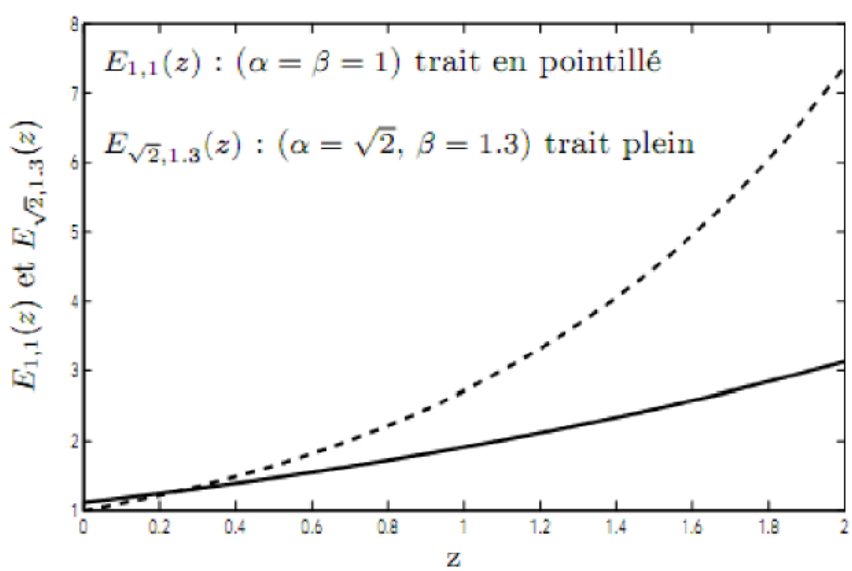

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Pour les application ultérieures, nous avons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.3.1 ***(Banach)****[12]*
Soit (U, d) *un espace métrique non vide complet et* $T : U \longrightarrow U$ *une application contractante. Alors, il existe un point unique* $u \in U$ *tel que* $T(u) = u$.

Théorème 1.3.2 ***(Ascoli-Arzèla)***
Soit $A \subset C(J, E)$*, A est compact dans* $C([J, E)$ *si et seulement si :*

1. *A est fermé*
2. *A est borné*
3. *A est équicontinu*

Chapitre 2

Dérivées et Intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et résultas concernant le calcul fractionnaire au sens de Grünwald-Latnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

2.1 Dérivée de Grünwald-Letnikov

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, t]$, la dérivée premier est définie par

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

en appliquant cette définition deux fois, on obtient

$$f''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}$$

Par récurrence,

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rt),$$

telle que :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma :$\Gamma(n+1)! = n!$ pour n non entier

$$\binom{n}{r} = \frac{\Gamma(n+1)}{r!\Gamma(n-r+1)!}$$

Pour n négative,

$$(-1)^r \binom{n}{r} = \frac{-n(1-n)...(r-n-1)}{r!} = \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)}.$$

Donc, on définie la dérivée d'ordre non entier

$$_aD_t^\alpha f(t) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1)}{r!\Gamma(\alpha - r + 1)} f(t - rh) \tag{2.1}$$

On obtient

$$ {}_{a}^{GL}D_{t}^{\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)}f(t-rh) \tag{2.2} $$

et

$$ {}_{a}^{GL}D_{t}^{-\alpha}f(t) = \lim_{h\to +0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)}f(t-rh) \tag{2.3} $$

Le formule (2.2) et (2.3) définie la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov fonction

Si f est de classe C^k,alors en utilisant l'intégration par parties de (2.2) et (2.3) on obtient :

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{\alpha}f(t) = \sum_{r=0}^{k-1}\frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{k-\alpha-1}f^{k}(\tau)d\tau, $$

aussi

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{-\alpha}f(t) = \sum_{r=0}^{k-1}\frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{k+\alpha-1}f^{k}(\tau)d\tau. $$

1. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

   Soit m,n deux nombre entiers et α,β non entier.

   - Si $\beta<0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, alors :

     $$ {}^{GL}D_{a}^{\alpha}({}^{GL}D_{a}^{\beta}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x). $$

   - Si $0\leq m-1<\beta<m$, $\alpha<0$, $f^{k}(a)=0 \quad$ pour $k=1,2,...,r-2$ alors :

     $$ {}^{GL}D_{a}^{\alpha}({}^{GL}D_{a}^{\beta}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x). $$

   - Si $0\leq m-1<\beta<m$, $0\leq n-1<\alpha<n$ et $f^{k}(a)=0 \quad$ pour $k=1,2,...,r-2$ avec $r=\max(m,n)$ alors :

     $$ {}^{GL}D_{a}^{\alpha}({}^{GL}D_{a}^{\beta}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{\beta}({}^{GL}D_{a}^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x). $$

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

   Pour m entier positif et α non entier on a :

   $$ \frac{d^{m}}{dx^{m}}({}^{GL}D_{a}^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{m+\alpha}f(x), $$

   et

   $$ \frac{d^{m}}{dx^{m}}({}^{GL}D_{a}^{\alpha}f(x)) = {}^{GL}D_{a}^{m+\alpha}f(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)(a)(x-a)^{k-\alpha-m}}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}. $$

Exemple 2.1.1

1. ***La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Grünwald-Latnikov***
   La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Grünwald-Latnikov n'est pas nulle ni constant.

$$ {}_{a}^{G}D_t^{\alpha}(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\alpha)^{-\alpha}. $$

2. ***La dérivée fractionnaire de $f(x) = (x-a)^{\beta}$ au sens de Grünwald-Letnikov***

   Si α non entier et Pour $0 < n-1 < \beta < n$, alors on a :

$$ f^{(k)}(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, ..., n-1, $$

et

$$ f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}, $$

d'où

$$ {}^{GL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds $$

en effectuant le changement de variables $s = a + t(x-a)$ on obtient :

$$ \begin{aligned} {}^{GL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x \left[(x-a)(1-t)\right]^{n-\alpha-1} t^{\beta-n}(x-a)^{\beta-n+1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} $$

2.2 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$ I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \tag{2.4} $$

où α est un nombre non entier

Remarque 2.2.1 *La formule (2.4) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.*

Remarque 2.2.2 *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction* $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = f(t) \star g_\alpha(t) \tag{2.5}$$

Propriétés 2.2.1 *Nous a avons les Propriétés suivantes :*

1. $I_a^0 f(t) = f(t)$
2. *l'opérateur intégral* I_0^α*est linéaire*

Exemple 2.2.1 *Soit la fonction* $f(t) = (t-a)^\beta$

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau$$

par changement de variable $\tau = a + s(t-a)$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} t^\beta dt \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proposition 2.2.1 *Soient* α *et* β *deux nombre complex et* $f \in C^0([a,b))$

1. $I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0)$
2. $\dfrac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \quad Re(\alpha) > 1$

2.3 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1 *Soit* $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. La dérivée fractionnaire d'ordre* α *de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha} f(t) \end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha = 0$*, alors*

$${}^{RL}D^0 f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_a^n f(t) = f(t)$$

si $\alpha = n$*, alors*

$$({}^{RL}D^n f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

Propriétés 2.3.1

1. ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***

   - *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,*
   $$^{RL}D_a^{\alpha}(I_a^{\alpha}f(x)) = f(x).$$
   En général on a
   $$^{RL}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) = (I^{\alpha-\beta}f)(x).$$
   On a Si $\alpha - \beta < 0$, alors :
   $$^{RL}D_a^{\alpha-\beta}f(x) = I^{\beta-\alpha}f(x).$$
   - *En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas*
   $$^{RL}D_a^{-\alpha}(^{RL}D_a^{\beta}f(x)) =^{RL} D_a^{\beta-\alpha}f(x) - \sum_{k=1}^{n}[^{RL}D_a^{\beta-k}f(x)]\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$
   avec $n-1 \leq \beta < n$.

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***

   La dérivation fractionnaire et la dérivation d'ordre entiere ne commutent que si :
   $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.
   $$\frac{d^n}{dt^n}(^{RL}D_a^{\alpha}f(x)) =^{RL} D_a^{n+\alpha}f(x),$$
   mais
   $$^{RL}D_a^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(x)) =^{RL} D_a^{n+\alpha}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

3. ***Composition avec les dérivés fractionnaires***

   Soit $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, alors
   $$^{RL}D_a^{\alpha}(^{RL}D_a^{\beta}f(x)) =^{RL} D_a^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{k=1}^{m}[^{RL}D_a^{\beta-k}f(x)]\frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$
   et
   $$^{RL}D_a^{\beta}(^{RL}D_a^{\alpha}f(x)) =^{RL} D_a^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{k=1}^{n}[^{RL}D_a^{\alpha-k}f(x)]\frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$
   par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D_a^{\alpha}$ et $^{RL}D_a^{\beta}(\alpha \neq \beta)$, ne commutent que si $[^{RL}D_a^{\beta-k}f(x)]$ pour tout $k = 1, 2, ...n$, et $[^{RL}D_a^{\alpha-k}f(x)]$ pour tout $k = 1, 2, ...m$.

Exemple 2.3.1

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville***
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante,mais on a :

$$^{R}D^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\beta}$***au sens de Riemann-Liouville***
   Soit α *non entier et*$0 \leq n-1 < \alpha < n$ *et* $\beta > -1$

$$\begin{aligned} ^{R}D_{a}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{n-\alpha}f(s) \end{aligned}$$

eb faisant le changementde variable $\tau = a + s(t-a)$

$$\begin{aligned} ^{R}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}\right)\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

2.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 2.4.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* $\alpha > 0$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds, \qquad n-1 < \alpha < n, \quad n = [\alpha]+1 \\ &= I^{n-\alpha}(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t)) \end{aligned}$$

Exemple 2.4.1 *on a*

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{c}D^{\alpha}C = 0$$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Caputo***
   Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ *avec* $\alpha > n-1$*, alors on a*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

d'où

$$^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau$$

en effectuant le changement de variable $\tau=a+s(t-a)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

2.4.1 La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $\alpha>0$ avec $n-1<\alpha<n,(n\in\mathbb{N}^{*})$, supposons que f est une fonction telle que la dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville et de Caputo existe alors :

$$^{c}D^{\alpha}f(t)={}^{RL}D^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{2.7}$$

On déduit que

$$^{c}D^{\alpha}f(t)={}^{RL}D^{\alpha}f(t) \tag{2.8}$$

si $f^{(k)}(a)=0$ pour $(k=0,1,2,...,n-1)$

2.4.2 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue, alors :

$${}_{a}^{c}D_{t}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f(t)=f(t) \tag{2.9}$$

et

$$I_{a}^{\alpha}{}_{a}^{c}D_{t}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!} \tag{2.10}$$

on déduit que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration mais il n'est pas un inverse droit.

2.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité**
   La dérivée fractionnaire est une opérateur linéaire :

$$D^{p}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D^{p}f(t)+\mu D^{p}g(t)$$

2. **Régle de Leibniz**
   Pour n entier on a :
$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$$
   La généralisation de cette formule nous donne :
$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t) \quad n \geq p+1$$
   et
$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau - \xi) d\xi$$
   $(\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0)$
   Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a, t]$, la formule devient :
$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) \quad n \geq p+1$$

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour inclusions différentielles fractionnaires

3.1 Résultats d'existence et d'unicité de solution

Dans cette section nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(0) = x_0, \quad x(1) = aI^p x(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^C D^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α de Caputo, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, a est une constante réelle vérifiant $a\eta^{p+1} \neq \Gamma(p+2)$ et I^p est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
Avant d'énoncer nos résultats d'existence et d'unicité, nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivantes :

Lemme 3.1.1 *[11] Pour $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^C D^\alpha g(t) = 0$$

est donnée par

$$g(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

où $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ sont des constantes réelles, $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière du réel α.

Lemme 3.1.2 *[11] Soit $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ telle que ${}^C D^\alpha g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Alors*

$$I^{\alpha C} D^\alpha g(t) = g(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour certaines constantes réelles $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.1.3 *[11] Supposons que $a\eta^{p+1} \neq \Gamma(p+1)$. Pour toute fonction continue $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'unique solution du problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = y(t), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(0) = x_0, \quad x(1) = aI^p x(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

est donnée par :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds \\
&-\frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds \\
&+\frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds \\
&+\left[1-\frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0, \quad 0\leq t\leq 1.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Preuve : d'après (3.2), nous avons

$$
{}^C D^\alpha x(t) = y(t). \tag{3.4}
$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, aux deux cotés de l'équation (3.4), nous obtenons

$$
I^{\alpha C}D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds, \tag{3.5}
$$

en vue du Lemme 3.1.2, l'équation (3.5) nous donne

$$
x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds - c_0 - c_1 t. \tag{3.6}
$$

D'après la condition $x(0)=x_0$, on obtient $x(0)=-c_0$ c'est-à-dire $c_0=-x_0$.
En appliquant l'opérateur d'intégration fractionnaire I^p aux deux membres de l'équation (3.6), on trouve

$$
\begin{aligned}
I^p x(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}y(r)dr - c_0 - c_1 s\right]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds \\
&\quad -\frac{c_0}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}ds - \frac{c_1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds \\
&\quad -\frac{c_0}{\Gamma(p)}.\frac{t^p}{p} - \frac{c_1}{\Gamma(p)}.\frac{t^{p+1}}{p(p+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds \\
&\quad -c_0\frac{t^p}{\Gamma(p+1)} - c_1\frac{t^{p+1}}{\Gamma(p+2)}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

En vue de l'équation (3.6) nous obtenons

$$
x(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds - c_0 - c_1
$$

et en tenant compte de la deuxième condition aux limites du problème (3.2), on arrive à

$$a\Big[\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds-c_0\frac{\eta^p}{\Gamma(p+1)}-c_1\frac{\eta^{p+1}}{\Gamma(p+2)}\Big]=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds-c_0-c_1$$

après une simple manipulation, on obtient

$$\begin{aligned}c_1\frac{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}{\Gamma(p+2)} &= -\frac{a}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+\frac{\Gamma(p+1)-a\eta^p}{\Gamma(p+1)}x_0.\end{aligned}$$

Si on suppose que $a\eta^{p+1}\neq\Gamma(p+2)$ alors il vient que

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}\Big[-\frac{a}{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+\frac{\Gamma(p+1)-a\eta^p}{\Gamma(p+1)}x_0\Big]\\ &= -\frac{ap(p+1)}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds\\ &\quad+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+\frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}x_0.\end{aligned}$$

Par substitution dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds\\ &= +\frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds\\ &\quad-\frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+\Big[1-\frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\Big]x_0.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.4

$$\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}drds=\frac{1}{\alpha}\eta^{p+\alpha}\mathcal{B}(\alpha+1,p).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\int_0^\eta\int_0^s(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}drds &= \int_0^\eta(\eta-s)^{p-1}\Big(\int_0^s(s-r)^{\alpha-1}dr\Big)ds\\ &= \int_0^\eta(\eta-s)^{p-1}\Big[-\frac{1}{\alpha}(s-r)^\alpha\Big]_{r=0}^{r=s}ds\\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\eta s^\alpha(\eta-s)^{p-1}ds\\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\eta s^\alpha\eta^{p-1}\Big(1-\frac{s}{\eta}\Big)^{p-1}ds\\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\eta\Big(\frac{s}{\eta}\Big)^\alpha\eta^{p+\alpha-1}\Big(1-\frac{s}{\eta}\Big)^{p-1}ds.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t = \dfrac{s}{\eta}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}drds &= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^\alpha \eta^{p+\alpha-1}(1-t)^{p-1}\eta dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\eta^{p+\alpha}\int_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{p-1}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\eta^{p+\alpha}\mathcal{B}(\alpha+1,p).\end{aligned}$$

□

Maintenant, dans toute la suite de cette section on munit l'espace de Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ de toutes les fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la norme de la convergence uniforme $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Pour plus de commodité on pose

$$M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t,0)|$$

et

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha+1)\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|} + \frac{|a|\eta^{p+\alpha}\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+\alpha+1)\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|} \\ &\quad + \frac{\left|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\right|}{\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|} + 1\end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 *Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'hypothèse*
$(H_1) : \left|f(t,x)-f(t,y)\right| \leq L\left|x-y\right|, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$
Si $LA < 1$, alors le problème (3.1) admet une solution unique

Preuve : En vue du lemme 3.1.3, on définit l'opérateur $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}(Nx)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}f(r,x(r))drds \\ &\quad + \left[1 - \frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0, \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned} \tag{3.8}$$

On choisit un nombre réel positif ρ tel que

$$\rho \geq \max\left\{\frac{MA}{1-LA}, \frac{|x_0|-M}{L}\right\} \tag{3.9}$$

et on définit l'ensemble B_ρ par

$$B_\rho = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \quad \|x\| \leq \rho\}.$$

La preuve du théorème se fait en deux étapes.

Première étape :
Nous allons montrer que $NB_\rho \subset B_\rho$. pour tout $u \in B_\rho$ et pour chaque $t \in J$, Nous avons :

$$\begin{aligned}
\big|(Nx)(t)\big| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x(s))\big|ds \\
&\quad+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\big|f(s,x(s))\big|ds \\
&\quad+\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}\big|f(r,x(r))\big|drds \\
&\quad+\Bigg[1+\frac{\big|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\big|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\Bigg]\big|x_0\big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big[\big|f(s,x(s))-f(s,0)\big|+\big|f(s,0)\big|\Big]ds \\
&\quad+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\Big[\big|f(s,x(s))-f(s,0)\big|+\big|f(s,0)\big|\Big]ds \\
&\quad+\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}\Big[\big|f(r,x(r))-f(r,0)\big| \\
&\quad+\big|f(r,0)\big|\Big]drds+\Bigg[1+\frac{\big|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\big|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\Bigg]\big|x_0\big|.
\end{aligned}$$

En exploitant l'hypothèse (H_1) et l'estimation (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\big|(Nx)(t)\big| &\leq (L\rho+M)\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds \\
&\quad+\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}drds \\
&\quad+1+\frac{\big|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\big|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\Bigg].
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.1.4, et après quelques simplifications, on trouve

$$\begin{aligned}
\big|(Nx)(t)\big| &\leq (L\rho+M)\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha+1)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|} \\
&\quad+\frac{\big|a\big|\eta^{p+\alpha}\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+\alpha+1)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}+\frac{\big|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\big|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}+1\Bigg]. \\
&\leq \rho.
\end{aligned}$$

Donc $\big\|Nx\big\| \leq \rho$ et par conséquent $NB_\rho \subset B_\rho$.

Deuxième étape :
maintenant, on va montrer que N est contractante. Pour tout $t \in [0,1]$ et $x, y \in C([0,1], \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\big|(Nx)(t) - (Ny)(t)\big| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \big|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big| ds \\
&+ \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \big|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big| ds \\
&+ \frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \times \\
&\int_0^\eta \int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} \big|f(r,x(r)) - f(r,y(r))\big| drds \\
&\leq L|x-y| \Bigg\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \int_0^\eta \int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} drds \Bigg\} \\
&\leq L|x-y| \Bigg\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha+1)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \\
&+ \frac{\big|a\big|\eta^{p+\alpha}\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+\alpha+1)\big|\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}\big|} \Bigg\} \\
&\leq LA|x-y|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Nx - Ny\| \leq LA\|x-y\|.$$

Puisque $LA < 1$, alors N est une contraction. Les hypothèses du (oo) sont remplies et par suite le problème aux limites (3.1) admet une solution unique.

$\square$

Exemple 3.1.1 *on considère le problème fractionnal aux limite suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{(t+2)^2}\dfrac{|x|}{1+|x|} + 1 + sin^2 t, \quad t \in [0,1] \\ \\ x(0) = 1, \quad x(1) = \dfrac{1}{2} I^{1/2} x\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

ici, $\alpha = 3/2, a = 1/2, p = 1/2, \eta = 1/2, x_0 = 1$ *et* $f(t,x) = \dfrac{1}{(t+2)^2}\dfrac{|x|}{1+|x|} + 1 + sin^2 t$
comme $a = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{\Gamma(p+2)}{\eta^{p+1}} = \dfrac{\Gamma(5/2)}{(1/2)^{3/2}}$

et

$$
\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{1}{(t+2)^2}\frac{|x|}{1+|x|}-\frac{1}{(t+2)^2}\frac{|y|}{1+|y|}\right| \\
&= \frac{1}{(t+2)^2}\left|\frac{|x|}{1+|x|}-\frac{|y|}{1+|y|}\right| \\
&\leq \frac{1}{(t+2)^2}\Big||x|-|y|\Big| \\
&\leq \frac{1}{4}|x-y|
\end{aligned}
$$

Donc, (H_1) *est satisfie avec* $L=\dfrac{1}{4}$*, et* $LA \approx 0,98 < 1$

alors le problème aux limites (3.10) *admet une solution unique.*

3.2 Résultats d'existence de solution

Maintenant, nous considérons le problème aux limites pour inclusions différentielles fractionnaires suivant :

$$
\begin{cases}
{}^{C}D^{\alpha}x(t) \in F(t,x(t)), \quad 0<t<1, \quad 1<\alpha\leq 2 \\[2ex]
x(0)=x_0, \quad x(1)=aI^{p}x(\eta), \quad 0<\eta\leq 1,
\end{cases}
\tag{3.11}
$$

où $F:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs multiples et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Rappelons quelques définitions de base sur les fonctions multivoques qui peuvent être trouvées dans [13, 14].

Définition 3.2.1 *Une fonction multivoque (aussi appelée correspondance, fonction multivaluée, fonction multiforme, ou simplement multifonction) est une relation binaire quelconque à chaque élément d'un ensemble elle associe, non pas au plus un élément mais possiblement zéro, un ou plusieurs éléments d'un second ensemble.*

Remarque 3.2.1 *On peut voir une multifonction comme une fonction classique prenant ses valeurs dans l'ensemble des parties du second ensemble. En particulier, si l'image de chaque point est un singleton, on dit que la correspondance est univoque.*

Exemple 3.2.1 *Un exemple simple de fonction multivoque est la fonction réciproque d'une application non injective : à tout point dans son image on fait correspondre l'image réciproque formée des antécédents de ce point.*

Pour un espace normé $(X,\|.\|)$, soient

$$\mathcal{P}_f(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): \quad Y \text{est fermé}\},$$

$$\mathcal{P}_b(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): \quad Y \text{est borné}\},$$

$$\mathcal{P}_{cp}(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): \quad Y \text{est compact}\},$$

$$\mathcal{P}_{cp,c}(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): \quad Y \text{est compact et convexe}\}.$$

Définition 3.2.2 *Une fonction multivoque $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est convexe (fermée) si $G(x)$ est convexe (fermée) pour tout $x \in X$.*
• La fonction G est bornée sur des ensembles bornés si $G(B) = \bigcup\limits_{x \in B} G(x)$ est borné dans X pour tout $B \in \mathcal{P}_b(X)$ c'est-à-dire :

$$\sup_{x \in B} \Big\{ \sup |y| : \quad y \in G(x) \Big\} < +\infty.$$

• G est appelée semi-continue supérieure "S-c-s" sur X si pour chaque $x_0 \in X$, $G(x_0)$ est un sous-ensemble fermé non vide de X et pour chaque ensemble ouvert N de X contenant $G(x_0)$, il existe un voisinage ouvert N_0 de x_0 tel que $G(N_0) \subseteq N$.
• G est dite complètement continue si $G(B)$ est relativement compact pour chaque $B \in \mathcal{P}_b(X)$.
•Si la fonction multivoque G est complètement continue avec des valeurs compactes non vides alors G est "S-c-s" si et seulement si G a un graphe fermé, c'est-à-dire : $x_n \longrightarrow x^\star, y_n \longrightarrow y^\star, y_n \in G(x_n)$ implique que $y^\star \in G(x^\star)$.
• G a un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$. L'ensemble des points fixes de l'opérateur multivoque G sera noté $FixG$.
• Une fonction multivoque $G : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ est dite mesurable si pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \mapsto d(y, G(t)) = \inf\{|y - z|, \quad z \in G(t)\} \text{ est mesurable.}$$

Soit $L^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, qui sont Lebesgue intégrable est normé par

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

Définition 3.2.3 *Une fonction $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.11) si $x(0) = x_0$, $x(1) = aI^p x(\eta)$ et il existe une fonction $f \in L^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(t) \in F(t, x(t))$ p.p sur $[0,1]$ et*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^\eta \int_0^s (\eta - s)^{p-1} (s-r)^{\alpha-1} f(r) dr ds \\ &\quad + \left[1 - \frac{\Gamma(p+2) - a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}} t \right] x_0, \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

Définition 3.2.4 *Une fonction multivoque $F : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dite Carathéodory si les conditions suivantes sont satisfaites :*
i) $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
ii) $x \mapsto F(t,x)$ est semi-continue supérieure pour presque tout $t \in [0,1]$.
De plus, une fonction Carathéodory F est dite L^1-Carathéodory si
iii) pour chaque $\alpha > 0$, il existe $\phi \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\|F(t,x)\| = \sup\{|v| : \quad v \in F(t,x)\} \le \phi_\alpha(t)$$

pour tout $\|x\|_\infty \le \alpha$ et pour p.p $t \in [0,1]$.

Maintenant, pour chaque $y \in C([0,1],\mathbb{R})$, on définit l'ensemble de sélections de F par :

$$S_{F,y} = \{v \in L^1([0,1],\mathbb{R}) : \quad v(t) \in F(t,y(t)) \text{ pour p.p } t \in [0,1]\}.$$

Lemme 3.2.1 *[15] Soit X un espace de Banach et soit $F : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(X)$ une fonction multivoque L^1-Carathéodory et soit θ une application linéaire continue $\theta : L^1([0,1],X) \longrightarrow C([0,1],X)$. Alors l'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} \theta o S_F : C([0,1],X) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{cp,c}(C([0,1],X)) \\ x & \mapsto & (\theta o S_F)(x) = \theta(S_{F,x}) \end{array} \tag{3.12}$$

est un opérateur de graphe fermé dans $C([0,1],X)\times C([0,1],X)$.

Pour la preuve de notre résultat principal, nous utiliserons le théorème suivant (voir [16], corollaire 3.8)

Théorème 3.2.1 *Soit X un espace de Banach et D un voisinage borné de $0 \in X$.*
Soit $Z_1 : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(X)$ et $Z_2 : \overline{D} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(X)$ deux opérateurs multivoques satisfaisant
i) Z_1 est une contraction
ii) Z_2 est S.c.s et compact.
Alors, si $G = Z_1 + Z_2$, soit
a) G a un point fixe sur $\overline{D}$ ou
b) il existe un point $u \in \partial D$ et $\lambda \in (0,1)$ avec $u \in \lambda G(u)$.
($\mathcal{P}_{cp,c}(X)$ est une famille de sous-ensembles non vides compacts et convexes de X.)

Théorème 3.2.2 *Supposons que :*
(H_1) : $F : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(X)$ soit une fonction multivoque L^1-Carathéodory.
(H_2) : Il existe une fonction continue non décroisante $\psi : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ et une fonction $P \in L^1([0,1],\mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\|F(t,x)\| = \sup\{|y| : \quad y \in F(t,x)\} \leq p(t)\psi(\|x\|)$$

pour chaque $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$
(H_3) : Il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$\frac{M}{A\psi(M) + \beta|x_0|} > 1 \tag{3.13}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}p(s)ds - \frac{\Gamma(p+2)t}{|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\ &+ \frac{ap(p+1)}{|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}p(r)drds\Bigg]. \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B} = 1 + \frac{|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p|}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}.$$

Alors le probléme (3.11) admet au moins une solution sur $[0,1]$

Preuve : On transforme le problème (3.11) en un probléme de point fixe. On considère l'opérateur $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
N(x) &= \Big\{ h \in (C[0,1],\mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
& -\frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
& +\frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^\eta \int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f(r) dr ds \\
& +\Big[1 - \frac{\Gamma(p+2) - a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}} t\Big] x_0, \quad 0 \leq t \leq 1. \Big\}
\end{aligned}$$

pour $f \in S_{F,x}$.
Maintenant, on définit deux opérateurs de la manière suivant : $\mathcal{A} : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}x(t) = \Big[1 - \frac{\Gamma(p+2) - a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}} t\Big] x_0$$

et l'opérateur multivoque $\mathcal{B} : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(C[0,1],\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(x) &= \Big\{ h \in (C[0,1],\mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
& -\frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
& +\frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2) - a\eta^{p+1}]} \int_0^\eta \int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f(r) dr ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \Big\}
\end{aligned}$$

Donc $N = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ on va montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les hypothèses du théorème $(3.2.1)$ sur $[0,1]$
La preuve se fera en quelques étapes

Etape 1 : On montre que $\mathcal{A}$ est une contraction sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Soient $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$. alors :

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = 0 < \frac{1}{2}|x-y|$$

donc

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$$

Ceci implique que A est contraction.

Etape 2 : Nous montrons que l'opérateur $\mathcal{B}$ a une valeur compacte, et convexe et il est complétement continue cela sera donné des plusieurs revendicateurs.

Revendication 1 : on montre que l'opérateur $\mathcal{B}$ envoie les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C([0,1],\mathbb{R})$. pour cela on considére $B_\rho = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \quad \|x\| \leq \rho\}$. un ensemble

borné dans $C([0,1],\mathbb{R})$, où ρ un nombre réel positive.
Alors pour tout $h \in \mathcal{B}$, $x \in B_\rho$, il existe $f \in S_{F,x}$ telle que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\
&\quad -\frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\
&\quad +\frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f(r)drds \\
&\quad +\left[1-\frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0, \quad 0\le t\le 1.
\end{aligned}$$

Donc pour $t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
|h(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s)|ds \\
&\quad +\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|f(s)|ds \\
&\quad +\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}\big|f(r)\big|drds \\
&\le \psi(\|x\|)\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|p(s)|ds + \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|p(s)|ds \\
&\quad +\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\Gamma(\alpha)\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}|p(r)|drds\Bigg].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|h(t)\| &\le \frac{\psi(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1}p(s)ds + \frac{\Gamma(p+2)}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\
&\quad +\frac{\big|a\big|p(p+1)}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}p(r)drds\Bigg].
\end{aligned}$$

Revendication 2 : maintenant, nous montrons que $\mathcal{B}$ est un ensemble borné et équi-continue. Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$ et $x \in B_\rho$. Pour chaque $h \in \mathcal{B}(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|h(t_2)-h(t_1)| &\le \left|\psi(\|x\|)\int_0^{t_1}\left[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]p(s)ds + \psi(\|x\|)\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(s)ds\right| \\
&\quad +\psi(\|x\|)\frac{\Gamma(p+2)|t_2-t_1|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\
&\quad +\psi(\|x\|)\frac{\big|a\big|p(p+1)|t_2-t_1|}{\big|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\big|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}p(r)drds.
\end{aligned}$$

Evidemment, quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par conséquent des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzelà -Ascoli, nous peuvons conclure que $\mathcal{B}$: $C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C[0,1],\mathbb{R})$ est complètement continue.

Revendication 3 : Ensuite, prouvons que $\mathcal{B}$ a un graphe fermé. Soit $x_n \longrightarrow x_*, h_n \in \mathcal{B}(x_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$. Il suffit de montrer que $h_* \in \mathcal{B}(x_*)$.
On a $h_n \in \mathcal{B}(x_n)$, il existe $f_n \in S_{F,x_n}$ telle que pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_n(s)ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f_n(s)ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f_n(r)drds \end{aligned}$$

Il suffit de montrer qu'il existe $f_* \in S_{F,x_*}$ tel que, pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_*(s)ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f_*(s)ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f_*(r)drds \end{aligned}$$

On considère l'opérateur linéaire $\theta : L^1([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$. donné par :

$$\begin{aligned} f \mapsto \Theta(f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f(r)drds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|h_n(t)-h_*(t)\| &= \Bigg\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f_n(s)-f_*(s))ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}(f_n(s)-f_*(s))ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}(f_n(r)-f_*(r))drds \Bigg\| \mapsto 0, \end{aligned}$$

quand $n \mapsto \infty$
Ainsi, d'après le lemme (3.2.1), $\theta o S_F$ est un opérateur de graphe fermé. De plus, on a $h_n(t) \in \Theta(S_{F,x_n})$ puisque $x_n \to x_*$, donc on obtient :

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_*(s)ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f_*(s)ds \\ &\quad + \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f_*(r)drds \end{aligned}$$

Pour certains $f_*(t) \in S_{F,x_*}$, donc $\mathcal{B}$ a un graphe fermé (et a des valeurs fermées).
par conséquent, $\mathcal{B}$ est compacte.
Revendication 4 : N(x) est convexe pour toute $x \in (C[0,1], \mathbb{R})$.
En effet, si $h_1, h_2 \in N(x)$, alors il esiste $f_1, f_2 \in S_{F,x}$ telle que pour toute $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_i(s)ds \\ &- \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f_i(s)ds \\ &+ \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f_i(r)drds, \quad i=1,2 \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in]0,1[$. Alors pour toute $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda f_1(s) + (1-\lambda) f_2(s)]ds \\ &- \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}[\lambda f_1(s) + (1-\lambda) f_2(s)]ds \\ &+ \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}[\lambda f_1(r) + (1-\lambda) f_2(r)]drds \\ &+ \left[1 - \frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0 \end{aligned}$$

comme $S_{F,x}$ est convexe (car F convexe), on a

$$(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2) \in N(x)$$

Par conséquent, les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont à toutes les conditions de théorème $(3.2.1)$, alors l'une des condition (a) ou (b) du théorème $(3.2.1)$ est vérifiée.
Pour cela il suffit montrer que la condition (b) ne peut pas être vérifiée. Si $x \in \lambda\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x)$ pour $\lambda \in (0,1)$ il existe $f \in S_{F,x}$ tel que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &- \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &+ \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1} f(r)drds \\ &+ \left[1 - \frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0, \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} |x(t)| &\le \frac{\psi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 (t-s)^{\alpha-1}p(s)ds + \frac{\Gamma(p+2)}{\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\ &+ \frac{|a|p(p+1)}{\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|}\int_0^\eta\int_0^s (\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}p(r)drds\Bigg] \\ &+ \left[1 + \frac{\left|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p\right|}{\left|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}\right|}\right]|x_0| \end{aligned}$$

Si la condition (ii) du théorème $(3.2.1)$ est vérifiée, il existe alors $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial B_r$ avec $x = \lambda N(x)$. Alors, x est une solution de 3.11 avec $\|x\| = M$.
Donc, l'inégalité précédent implique :

$$\frac{M}{A\psi(M) + \beta|x_0|} \leq 1$$

ce qui contredit 3.13. Donc, N a un point fixe dans $[0,1]$ du théorème $(3.2.1)$, par conséquent, le problème aux limite 3.11 admet aux moins une solution dans $[0,1]$

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour l'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec condition intégrales et non locales.
Ces résultats ont été obtenus en utilisant de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach et le théorème d'Ascoli-Arzéla .

Bibliographie

[1] B. Ahmad and J. R. Graef, Coupled systems of nonlinear fractional differential equations with nonlocal boundary conditions, Panamer. Math J. 19 (2009), 29-39.

[2] B. Ahmad and J. J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 1838-1843.

[3] B. Ahmad and V. Otero-Espinar, Existence of solutions for fractional differential inclusions with anti-periodic boundary conditions, Bound. Value Probl. 2009, Art.

[4] V. Daftardar-Gejji and S. Bhalekar, Boundary value problems for multi-term fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008), 754-765.

[5] M. A. Darwish and S. K. Ntouyas, On initial and boundary value problems for fractional order mixed type functional differential inclusions, Comput. Math. Appl. 59 (2010), 1253-1265.

[6] K. Diethelm and A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[7] V. Gafiychuk, B. Datsko and V. Meleshko, Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems, Comput. Math. Appl. 59 (2010), 1101-1107.

[8] S. Hamani, M. Benchohra and J.R. Graef, Existence results for boundaryvalue problems with nonlinear fractional differential inclusions and integral conditions, Electron. J. Differential Equations 2010, No. 20, 16 pp.

[9] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[10] A. Ouahab, Some results for fractional boundary value problem of differential inclusions, Nonlinear Anal. 69 (2008), 3877-3896.

[11] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[12] Y. Zhou, Basic theory of fractional differential equations, 6, Singapore : World Scientifc, (2014).

[13] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter De Gruyter, Berlin-New York,1992.

[14] . Hu, N. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Theory I, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[15] A. Lasota, Z. Opial, An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 781-786.

[16] W.V. Petryshyn, P.M. Fitzpatric, A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact maps, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), 1-25.

[17] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech. Systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.

[18] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, Biophys. J. 68 (1995), 46-53.

[19] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[20] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, J. Chem. Phys. 103 (1995), 7180-7186.

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[22] L. Schwartz, Theorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

[23] G. M. Mittag-Leffler.Sur la nouvelle fonction Ea(x). C. R. Académie des Sciences. 137,554-558 (1903).

[24] G. M. Mittag-Leffler.Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogéne. Acta Mathematica . 29,101-182 (1905).

[25] B. ROSS, The development of fractional calculus, University of new Haven, conn, 06516-1695. 1900.

[26] A. Loverro, Fractional Calculus : History, Definitions and Applications for the Engineer, Notre Dame, IN 46556, U.S.A. May 8, 2004.

[27] F. MAINARDI and R. GORENFLO, Fractional calculus and special functions, Lecture Notes on Mathematical Physics , Department of Physics, University of Bologna, Italy.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence des solutions du problème aux limites pour l' inclusions différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.

Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation des théorèmes de point fixe.

Mots-clés : Dérivée fractionnaire de Caputo, inclusions différentielle fractionnaire, point fixe.

Abstract

In this paper, we present existence results of solutions for fractional order differential inclusions in the sense of Caputo, for boundary value problems.

These results were obtained by using the fixed point theorem .

Keywords : Fractional derivative of Caputo, Fractional differential inclusion, fixed point.

ملخص

في هذه المذكرة نقدم بعض نتائج وجود حلول للمسائل الحدية للادراج التفاضلي الكسري بمفهوم كابوتو . تم الحصول على هذه النتائج بتطبيق نظريات النقطة الثابتة .

الكلمات المفتاحية :المشتقات الكسرية لكابوتو, الادراج التفاضلي الكسري, النقطة الصامدة.