Etude de quelques problème aux limites pour inclusions différentielles fractionnaires

Ayat Noura

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
imaniman@gmail.com

Résumé

Dans ce mémoire, on va étudier l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec des conditions non locales et intégrales.
Mots Clés : Dérivée fractionnaire, inclusion différentielle fractionnaire,point fixe.

1. Introduction

Premièrement, on va discuter l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour une équation différentielle semi-linéaire fractionnaire d'ordre $\alpha \in]1,2]$.

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)), & 0<t<1, \quad 1<\alpha\leq 2 \\ x(0)=x_0, \quad x(1)=aI^px(\eta), & 0<\eta<1 \end{cases} \tag{1.1}$$

${}^cD^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α , $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ qui vérifie certaine condition qui sera déterminée ultérieurement et I^P désigne l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Deuximement, nous étendons les résultats où nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) \in F(t,x(t)), & 0<t<1, \quad 1<\alpha\leq 2 \\ x(0)=x_0, \quad x(1)=aI^px(\eta), & 0<\eta<1 \end{cases} \tag{1.2}$$

$F:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow P(\mathbb{R})$ est une fonction multivoque ,$P(x)$ est la famille de tous les sous ensembles de $\mathbb{R}$.

2. Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions de base du calcul fractionnaire .

Définition 2.1 *Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$ la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \tag{2.1}$$

La relation de récurrence

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{2.2}$$

Définition 2.2 *Soit $x,y>0$ la fonction Bêta est donnée par :*

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Un autre définition

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{2.3}$$

Définition 2.3 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ est définie par :*

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds$$

Définition 2.4 *La Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction continue*
$f:]0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est définie par :

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{q-n+1}}ds$$

Définition 2.5 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha>0$ est définie par :*

$${}^cD^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds, \qquad n-1<q<n, \quad n=[\alpha]+1$$

Lemme 2.6 *pour $\alpha>0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire homogène ${}^cD^{\alpha}g(t)=0$ est donnée par*

$$g(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_{n-1}t^{n-1}$$

où $c_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,...n-1$ $(n=[\alpha]+1)$.

Lemme 2.7 *Soit $\alpha>0$ alors*

$$I^{\alpha}D^{\alpha}g(t)=g(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_{n-1}t^{n-1} \tag{2.4}$$

où $c_i\in R$, $i=0,1,...,n-1$ $(n=[\alpha]+1)$.

Lemme 2.8 *(Théorème du point fixe de Banach) Soit (U,d) un espace métrique non vide complet et $T:U\longrightarrow U$ une application contractante.Alors,il existe un point unique $u\in U$ tel que $T(u)=u$.*

Lemme 2.9

3. Énoncé des résultats

Lemme 3.1 *Pour $a\neq\dfrac{\Gamma(p+2)}{\eta^{p+1}}$la solution unique du problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = y(t), & 0<t<1, \quad 1<\alpha\leq 2 \\ x(0)=x_0, \quad x(1)=aI^p(\eta), & 0<\eta<1 \end{cases} \tag{3.1}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds \\ &- \frac{\Gamma(p+2)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds \\ &+ \frac{ap(p+1)t}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}]}\int_0^{\eta}\int_0^{s}(\eta-s)^{p-1}(s-r)^{\alpha-1}y(r)drds \\ &+ \left[1-\frac{\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p}{\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}}t\right]x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Théorème 3.2 *Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'hypothèse*
$(H_1):|f(t,x)-f(t,y)|\leq L|x-y|, \quad \forall t\in[0,1], \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$
Si $LA<1$ telque

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha+1)|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}|}+\frac{|a|\eta^{p+\alpha}\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+\alpha+1)|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}|} \\ &+ \frac{|\Gamma(p+2)-a(p+1)\eta^p|}{|\Gamma(p+2)-a\eta^{p+1}|}+1 \end{aligned}$$

alors le problème 1.1 admet une solution unique

Références

[1] K. Diethelm and N. J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002), 229248.

[2] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[3] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[4] A.A. Stanislavsky, Hamiltonian formalism of fractional systems, Eur. Phys. J. B, 49(2006), 93-101.