

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA**

**Faculté des Sciences de la Matière et Mathématiques**

**DEPARTEMENT DE :MATHÉMATIQUES**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en mathématiques**

**Spécialité : Modélisation et Analyse Numérique**

**Présenté Par :**

**Ben Slimane Rebiha**

**THÈME**

**Chaotification Des Systèmes Discrets Par les Applications S-unimodales**

Soutenu publiquement, le : 29/06/2019

devant le jury composé de :

Mr	A. B. Benchik	Maître de Conférences(A)	l'université de	Président.
Mr	A. Hocine	Maître de Conférences(A)	l'université de	Examineur
Mr	M.Mammeri	Maître de Conférences(A)	l'université de	Rapporteur

# Remerciements

Je tiens en premier lieu à rendre grâce à "Dieu" qui lui a été créé grâce à ce travail et remercier Monsieur M. Mammeri, qui a dirigé cette mémoire. Grâce à ces incessants conseils et son information et inaltérable motivation cette formation par et pour à la recherche a été des plus passionnantes.

Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur A. B. Benchikh, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le professeur A. Hocine pour la participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université d'Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à mes parents et toutes mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques.

# Table des matières

<b>Notations et conventions</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Application discrètes en 1-D</b>	<b>9</b>
1.1 Définition et représentation . . . . .	9
1.2 Notion d'orbites (ou trajectoire) . . . . .	10
1.2.1 Orbite positive . . . . .	10
1.2.2 Orbite négative : . . . . .	11
1.2.3 Représentation graphique de l'orbite de $x_0$ . . . . .	11
1.3 Points fixes et points périodiques . . . . .	12
1.4 Point critique : . . . . .	13
1.5 Stabilité . . . . .	13
1.6 Stabilité locale . . . . .	14
1.6.1 Stabilité du point fixe . . . . .	14
1.6.2 Stabilité des points périodiques . . . . .	15
1.7 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	16
1.8 Bifurcation (Route vers le chaos) . . . . .	16
1.8.1 Différents types de bifurcations régulières . . . . .	17
1.8.2 Diagramme de bifurcation . . . . .	17
1.8.3 Ensembles limites d'une trajectoire : . . . . .	18

1.8.4	Ensemble positivement invariant : . . . . .	18
1.9	Attracteurs . . . . .	19
1.9.1	Définitions d'attracteur . . . . .	19
1.10	Différents types d'attracteurs . . . . .	19
1.10.1	Attracteurs réguliers : . . . . .	20
1.10.2	Attracteurs chaotiques : . . . . .	20
1.11	Bassin d'attraction . . . . .	22
1.11.1	Définitions : . . . . .	22
1.11.2	Notes et remarques : . . . . .	22
1.12	Exposant de L'yapunov . . . . .	23
1.12.1	Exposant de L'yapunov d'une application en temps discret . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Applications unimodales et S-unimodales</b>	<b>26</b>
2.1	Fonctions réelles . . . . .	26
2.1.1	Définitions . . . . .	26
2.1.2	Fonctions majorées, minorées, bornées . . . . .	27
2.1.3	Fonctions croissantes, décroissantes . . . . .	27
2.1.4	Fonction périodique . . . . .	27
2.1.5	Optimum locaux d'une fonction . . . . .	28
2.2	Applications unimodales et S-unimodales : . . . . .	29
2.2.1	Applications unimodales . . . . .	30
2.2.2	Application régulière : . . . . .	30
2.2.3	Dérivée Schwarzienne . . . . .	30
2.2.4	Applications S-unimodales . . . . .	31
2.2.5	Chaos robuste et chaos fragile . . . . .	31
2.2.6	Quelques propriétés de l'application S-unimodale : . . . . .	32
2.2.7	Exemple sur l'application S-unimodale . . . . .	33
2.3	Caractéristique du phénomène chaotique . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité</b>	<b>35</b>
3.1	Chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité . . .	35
3.1.1	Le chaos robuste . . . . .	37
3.1.2	Ensemble des contrôleurs . . . . .	38

# Notations et conventions

- $1 - D$  : unidimensionnelles
- $\hat{S}(f, x)$  : La dérivée Schwartzienne
- $B(A)$  : Le bassin d'attraction
- $O_-^f$  : L'orbite négative
- $O_+^f$  : L'orbite positif

# Introduction générale

L'anti-contrôle du chaos est un processus inverse de suppression des comportements chaotiques dans un système dynamique. L'objectif principal de ce processus est de créer ou d'améliorer la complexité du système pour certaines applications spéciales du monde réel telles que les circuits et les dispositifs hautes performances, le mélange de liquides, les réactions chimiques, les systèmes biologiques, la gestion de crise, le traitement sécurisé des informations et la prise de décisions critiques, fabrication dans les domaines politique, économique et militaire. En d'autres termes, le chaos anti-contrôleur consiste à générer des comportements chaotiques à partir d'un système donné, pas nécessairement chaotique à l'origine.

Il existe de nombreuses méthodes de chaotique utilisées pour générer le chaos dans les systèmes à temps continu, par exemple le contrôle dit de la géométrie différentielle introduit [Tang, et al., (2001), Wang, et al., (2000), Wang & Chen (2000(a))], rétroaction différée donnée [Wang, et al.,(2000)], et commutation du contrôle linéaire par morceaux décrite [Lu, et al., (2002)], et une stratégie efficace de chaos anticontrôleur dans les systèmes à temps continu a été discutée [Ruoting, et al., (2005)], à partir d'une approche basée sur l'homogénéité utilisant les formes p-normales de systèmes non linéaires. [Lu, et al., (2002)], un contrôleur de commutation linéaire par morceaux a été présenté comme un générateur de chaos pouvant créer un chaos à partir d'un système linéaire tridimensionnel dans une large gamme de valeurs de paramètres.

Il existe également de nombreuses méthodes de chaotification utilisées pour générer le chaos dans des systèmes à temps discret, par exemple, [ Li, (2004), Lai & Chen (2003), Chen & Lai (1997-1998), Chen, et al., (1998), Lin , et al., (2002), Wang & Chen, (1999-2000(b)), Li, et al., (2002(a-b-c-d))]. Par exemple, ces schémas de chaotification ont été présentés pour des applications discrètes utilisant des exposants de Lyapunov ou plusieurs versions modifiées du théorème de Marotto [Marotto, (2005), Chen & Lai (1997), Li & Yorke, (1975), Li, et al., (2002(b))], ou par l'utilisation de la définition de chaos de Li-Yorke [Li, et al., (2002(d))]. [Li, (2004)] a donné un schéma d'hyper-chaotique en rendant

tous les exposants de Lyapunov d'un système dynamique contrôlé positifs via le contrôleur d'une fonction triangulaire simple.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une nouvelle méthode de chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité. Cette méthode n'est valable que pour les applications discrètes unidimensionnelles. Ce travail apporte une réponse pertinente au débat problèmes ouvert présentés [Zeraoulia & Sprott, (2011(a))].

**Ce travail réalisé dans le cadre de ce mémoire porte "Chaotification des systèmes discrets par les applications S-unimodales".** Et notre mémoire est organisée à travers trois chapitres comme suit :

**Dans le premier chapitre :** Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions et notions générales et spécifiques aux systèmes discrets, utilisés tout au long de ce manuscrit (mémoire) concernant, les points fixes et les points périodiques et leurs stabilités, bifurcation, diagramme de bifurcation, attracteurs, attracteurs chaotiques, bassin d'attraction, exposants de Lyapunov.

**Dans le deuxième chapitre :** On parle sur les fonctions réelles, les applications unimodales et S-unimodales, la dérivée Schwarzienne. Ensuite, on présente un exemple sur l'application S-unimodale (l'application logistique), Quelques propriétés d'application S-unimodale, Caractéristique du phénomène chaotique et le chaos robuste.

**Dans le troisième chapitre :** Toujours au cœur de l'objectif principal du travail réalisé, nous avons présenté dans ce chapitre des théorèmes et des propositions pour chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité.

# Chapitre 1

## Application discrètes en 1-D

### 1.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à l'application de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des applications discrètes, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Une application discrète est de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (1.1)$$

Où  $f$  est une application régulière d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui même.  $f^k$  désigne la  $k^{ime}$  itérée de  $f$ , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

Dans la pratique  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$  représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps 0, 1, 2...

Ainsi la valeur de la quantité aux temps  $k + 1$  est en fonction de sa valeur au temps  $k$ . L'application  $f$  est couramment appelée "*système dynamique discret*". [E. Zeraoulia]

**Exemple 1.1** Soit  $x_0$  un capital placé a un taux d'interet  $r$  composé annuellement et

pour  $n \geq 1$  désignons par  $x_n$  le capital après  $n$  années. Alors on a :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + rx_0 = (1+r)x_0 \\x_2 &= x_1 + rx_1 = (1+r)^2x_0 \\&\vdots \\x_n &= (1+r)^nx_0\end{aligned}$$

on obtient le système dynamique discret

$$\begin{aligned}R \times N &\rightarrow R \\(x, n) &\rightarrow (1+r)^nx\end{aligned}$$

Il est obtenu en itérant la fonction

$$\begin{aligned}f : R &\rightarrow R \\x &\rightarrow (1+r)x\end{aligned}$$

## 1.2 Notion d'orbites (ou trajectoire)

### 1.2.1 Orbite positive

L'orbite positive de  $x$  par le système dynamique  $f$  est définie par :

$$O_+^f = \{f^k(x), k \in N\}$$

Si  $f$  est bijective, on définit l'orbite de  $x$  par :

$$O^f = \{f^k(x), k \in Z\}$$

### 1.2.2 Orbite négative :

$$O_-^f = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

### 1.2.3 Représentation graphique de l'orbite de $x_0$

Dans  $\mathbb{R}$ , on représente couramment l'orbite issue d'un point  $x_0$  par la figure (Fig. 1-1) suivant :

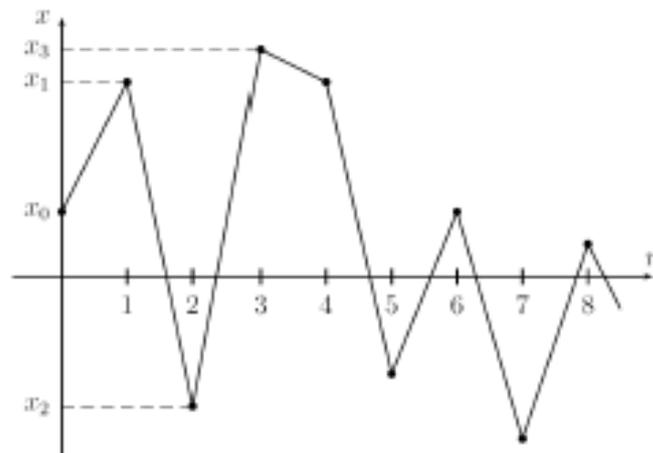


FIG. 1-1 -  $f(x) = (1 + r)x$

**Exemple 1.2** Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

On a deux points fixes :  $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Les orbites d'ordre 2 :

$$f^2(x) = x \iff (x^2 - 1)^2 - 1 = x$$
$$\iff (x + 1)((x + 1)(x - 1)^2 - 1) = 0$$

Qui a des solutions :

$$\left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, -1, 0 \right\}$$

Donc on a  $\{-1, 0\}$  orbite d'ordre 2.

### 1.3 Points fixes et points périodiques

**Définition 1.1** Soit  $(\mathbb{R}, N, f)$  un système dynamique. On appelle "point fixe " d'une application discrète tout point  $x_n$  tel que

$$f(x_n) = x_n$$

Parfois, ces points sont appelés aussi **points stationnaires** ou **points d'équilibre**.

En général, on trouve les points fixes en résolvant l'équation :

$$f(x) = x$$

L'étude de ces points se ramène donc à la théorie des points fixes des fonctions numériques.

**Exemple 1.3** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3$  alors  $0, 1, -1$  sont des points fixes de  $f$ .

**Définition 1.2** Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle périodique s'il existe un  $p > 0$  t.q.

$$x(n + p) = x(n), \forall n \tag{1.2}$$

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un  $p > 0$  et un  $N > 0$  tels que l'égalité (1.2) est vérifiée pour tout  $n > N$ . Une orbite périodique  $O(x_0)$  est toujours une suite de points périodique. Tous les points périodiques de période  $p$  sont solutions de l'équation

$$f^{(p)}(x) = x$$

où

$$f^{(p)}(x) = \underbrace{f(f(f(\dots f(x)\dots)))}_{p - \text{fois}}$$

Tous ces points s'appellent point périodique de période  $p$  du système. Le plus petit nombre  $p$  qui vérifie (1.2) s'appelle "période fondamentale" de l'orbite  $O(x_0)$ .

Dans la suite nous utiliserons souvent le terme abrégé "période" au lieu de "période fondamentale".

## 1.4 Point critique :

**Définition 1.3** Soit  $f(x)$ , une fonction qui est bien définie sur l'intervalle  $I$ . Le point  $c \in I$  est appelé point critique si la dérivée de  $f$  est nul en ce point, c'est à dire  $f'(c) = 0$

## 1.5 Stabilité

[A. Chenciner] et [A. Lyapunov-Based Approach]. Puisque les solutions de la plupart des applications ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des

quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des applications, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe.

Un point d'équilibre d'application continue correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte l'application de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore une petite perturbation, qui éloigne légèrement l'application de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

## 1.6 Stabilité locale

De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mathématiques et en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc.

### 1.6.1 Stabilité du point fixe

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, il existe un intervalle  $J$  contenu dans  $I$  pour lequel la suite  $(U_n)$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in J \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et la pente  $m = f'(\alpha)$  de la tangente au point fixe  $\alpha$  qui détermine le type du point fixe :

**Théorème 1.1** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le point fixe  $\alpha$  est :*

1-Attractif (ou stable) si  $|m| < 1$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$  converge vers  $\alpha$ .

2- Super attractif (super stable) si  $m = 0$ , la convergence de  $U_{n+1} = f(U_n)$  vers  $\alpha$  est très rapide, ce phénomène est appelé convergence quadratique,

3- Répulsif (ou instable) si  $|m| > 1$ , alors pour tout  $U_0 \neq \alpha, U_0 \in J$ , la suite récurrente associée à  $f$  de premier terme  $U_0$  ne converge pas vers  $\alpha$ .

4-Neutre (indifférent) si  $|m| = 1$ , car il peut être attractif ou répulsif (ou les deux, de part et d'autre)

$m$  s'appelle le multiplicateur de  $f$  au un point  $\alpha$ .

## 1.6.2 Stabilité des points périodiques

**Définition 1.4** Les points  $p$  périodiques d'ordre  $p$  sont des points fixes de  $f^p$

**Théorème 1.2** Si  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  est un cycle d'ordre  $p$ , les dérivées  $f^p(x_i)$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  sont égales. Et puisque  $x_0 = x_p$ . On en déduit que les dérivées  $(f^p)'(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  :

$$\begin{aligned} m_p &= (f'(x_{p-1}) \cdot f'(x_{p-2}) \dots f'(x_1) \cdot f'(x_0)) \\ &= (f_p)'(x_0) = \dots = f'(x_{p-1}) \end{aligned}$$

Cette valeur commune  $m_p$  est appelée le multiplicateur du cycle  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ , cette dernière détermine le type du cycle.

**Théorème 1.3** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le cycle  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  est :

- (1)-Super stable, si  $m_p = 0$  ;
- (2)-Stable, si  $0 < |m_p| < 1$  ;
- (3)-Neutre, si  $|m_p| = 1$  ;
- (4)-Instable si  $|m| > 1$  ;

## 1.7 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables. (Fig. 1-2)

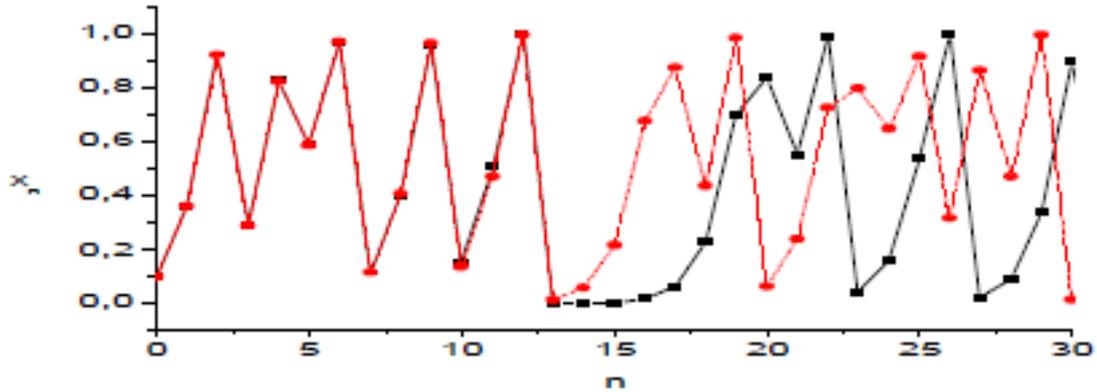


FIG. 1-2 – Diagramme explique la sensibilité aux conditions initiales.

## 1.8 Bifurcation (Route vers le chaos)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus donc la bifurcation signi...e un changement dans le comportement qualitatif d'une application (un système), suite à une variation d'un paramètre de l'application. Ce changement se produit à des points particuliers appelés points de bifurcation. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur.

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que

l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcation. [G. Chen ]

### 1.8.1 Différents types de bifurcations régulières

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : La bifurcation de doublement de période, la bifurcation point selle (ou nœud-col) et la bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à  $|\lambda_i| = 1$  (où  $\lambda_i$  représente les multiplicateurs).[Avila, A.]

#### **Bifurcation flip ou doublement de période ( $\lambda = -1$ )**

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à  $-1$ . Un cycle d'ordre  $k$  qui subie cette bifurcation va changer de nature et créer un cycle d'ordre  $2k$  de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

#### **Bifurcation fould ou nœud-col ( $\lambda = 1$ )**

La bifurcation  $\lambda = +1$  correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à  $+1$ . Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

#### **Bifurcation de Neimark ( $\lambda = \exp \pm i\theta$ )**

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjuguées  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  et de plus  $|\lambda_{i=1,2}| = 1$ .

### 1.8.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle (ou bifurcation). Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul

paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée. Voir (Fig. 1.3)

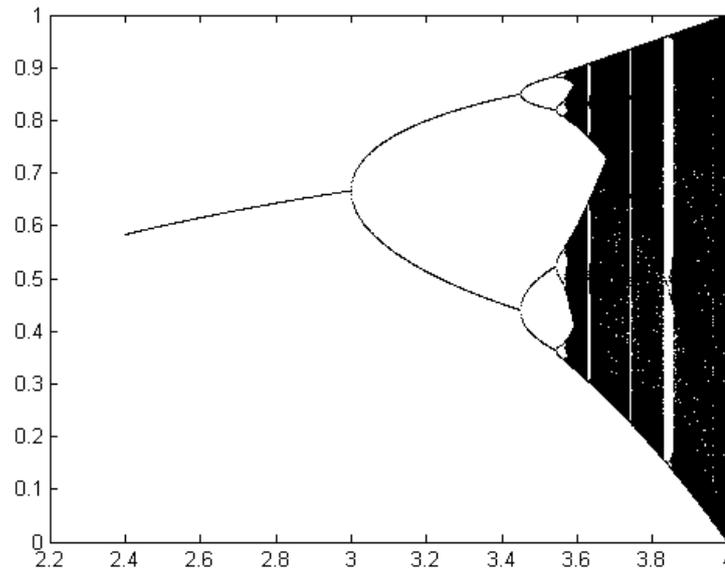


FIG. 1-3 – Diagramme de bifurcation de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  et  $2,4 \leq \lambda \leq 4$

### 1.8.3 Ensembles limites d'une trajectoire :

L'ensemble  $\omega$ -limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points d'accumulation de cette trajectoire quand le temps tend vers  $+\infty$ .

### 1.8.4 Ensemble positivement invariant :

Soit  $(\mathbb{R}, N, f)$  un système dynamique discret, l'ensemble  $\omega$ -limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points de sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit

positivement invariant ( resp. strictement positivement invariant ) si et seulement si  $f(A) \subseteq A$  ( resp.  $f(A) = A$  ).

Si  $A$  est un ensemble positivement invariant alors on a évidemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(A) \subseteq A$$

## 1.9 Attracteurs

### 1.9.1 Définitions d'attracteur

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne une seule définition possible d'attracteur :

**Définition 1.5** Soit  $\langle \mathbb{R}, f \rangle$  un système discret, une sous-partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

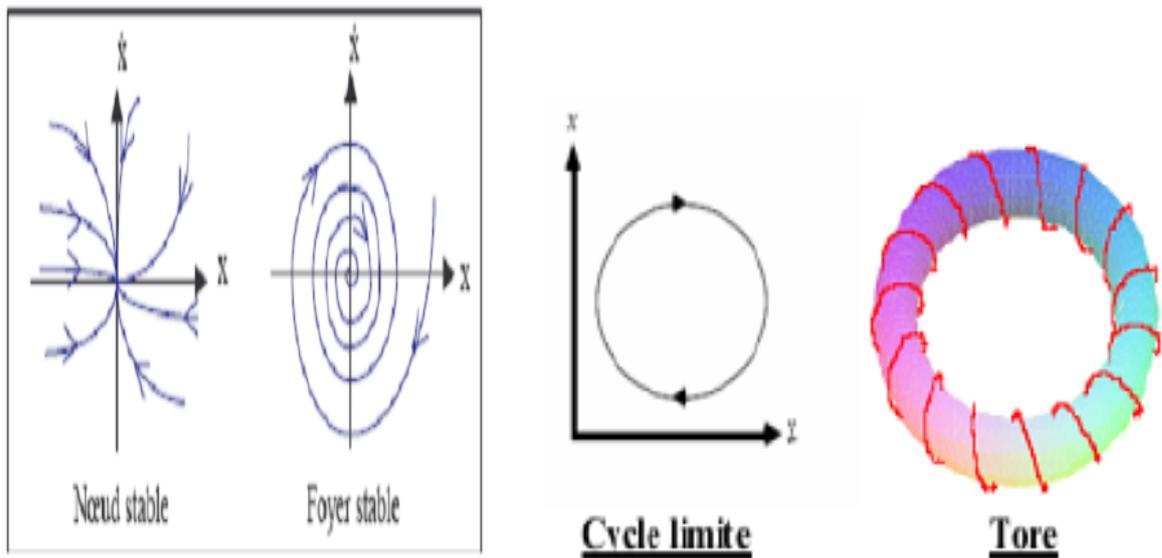
1.  $A$  est fermée ;
2.  $A$  est positivement invariante ;
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - (a)  $U$  est positivement invariant ;
  - (b)  $U$  est attiré par  $A$  :  $\forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(u), A) = 0$ .

## 1.10 Différents types d'attracteurs

Comment distinguer un phénomène chaotique d'un phénomène aléatoire ? C'est la question que se posent les physiciens lorsqu'ils sont confrontés au comportement chaotique d'un système. Il existe deux types d'attracteurs :

### 1.10.1 Attracteurs réguliers :

caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et ils peuvent être de trois sortes : Les points fixes, les cycles limites (orbites périodiques) et les cycles limites (quasi-périodiques).



Points fixes attracteurs

Cycle limite périodique et pseudo-périodique

### 1.10.2 Attracteurs chaotiques :

Jusqu'en 1963 on ne connaissait que trois types d'attracteurs : le point fixe, le cycle limite et le tore. Le tracé représentant l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière «étrange» par rapport aux attracteurs des systèmes simples comme nous l'avons vu plus haut. C'est pourquoi D. Ruelle l'a nommé «attracteur étrange». Un attracteur est dit étrange ou chaotique lorsque les points le constituant génèrent des trajectoires sensibles aux conditions initiales. Un attracteur chaotique est généralement associé à l'existence d'une infinité de trajectoires

instables de tous ordres. (Fig. 1-4) présente quelques attracteurs étranges

**Définition 1.6** Soit  $A$  est un attracteur de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $A$  est un attracteur étrange s'il est chaotique ( $A$  vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), un lecteur intéressé pourra consulter.

**Définition 1.7** Un attracteur étrange est caractérisé par la non linéarité de système et la sensibilité aux conditions initiales.

[J. D. Farmer, and J. J. Sidorowich] défini un attracteur étrange comme suit :

**Définition 1.8** Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov strictement positif ( $\lambda_k > 0$ ).

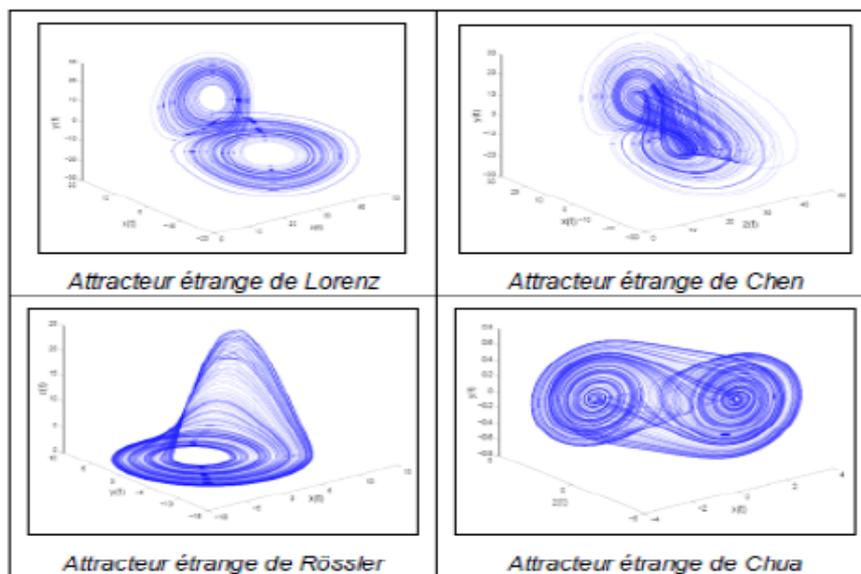


FIG. 1-4 – Quelques attracteurs étranges

### **Caractéristique d'attracteur étrange :**

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique)
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

## **1.11 Caractéristique du phénomène chaotique**

Caractériser le chaos est un sujet vaste, et les tests les plus utiles pour ce type de comportement sont les suivants :

1. Les mouvements chaotiques sont plus compliqués que stationnaire, périodique ou quasi-périodique, et ils ont des formes très complexes, appelés attracteurs étranges
2. Il existe une dépendance sensible aux conditions initiales, c'est à dire, les solutions proches divergent exponentiellement vite.
3. Il y a un phénomène de coexistence, c'est à dire, les orbites chaotiques coexistent avec une infinité des orbites périodiques instables(cycles répulsifs).
4. L'absence de cycles attractifs(stables) d'ordre fini.
5. La dimension fractale.
6. La non linéarité du système.

## **1.12 Bassin d'attraction**

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition (1.4) est appelée voisinage attiré par  $A$ . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré  $U$ , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet  $A$  peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même.

### 1.12.1 Définitions :

On donne quelques définitions du bassin d'attraction :

**Définition 1.9** *On appelle bassin d'attraction  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire  $B(A) = \cup\{U \in P(\mathbb{R}) : U \text{ est un voisinage attiré } A\}$ .*

**Définition 1.10** *[Zeraoulia et Sprott] Le bassin d'attraction  $B(A)$  d'un attracteur  $A$  est l'ensemble des conditions initiales (l'ensemble des tous états initiaux des orbites) est à long-temps un comportement approche vers  $A$  :*

### 1.12.2 Notes et remarques :

Voici quelque notes et remarques intéressant sur le bassin d'attraction [E. Zeraoulia and J. C. Sprott] :

- Le comportement qualitatif d'un système dynamique dépend fondamentalement du bassin d'attraction.
- La frontière du bassin peut être lisse ou fractale, la fractalité est une conséquence du mouvement chaotique des orbites sur la frontière.
- Les frontières du bassin peut avoir de types qualitativement différents. Par exemple la nature d'un bassin peut changer à partir d'une courbe simple lisse à une fractale. Ce phénomène est appelé la métamorphose.

## 1.13 Exposant de L'yapunov

[J. P. Eckmann, and D. Ruelle (1985), M. Mammeri (2015), G. Chen, and D. Lai (1997), D. Lai, and G. Chen (2003), I. Shimada, and T. Nagashima (1979)].

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'une application est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de Lyapunov qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'une application. Le chaos déterministe se

reconnait essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente.

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. On peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposant de Lyapunov mesure l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

### 1.13.1 Exposant de L'ypunov d'une application en temps discret

$f$  un'application unidimensionnelle,  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tell que  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  deux point initiaux poroches après  $n$  itérations on aura :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \quad (1.3)$$

Quand  $n$  tend vers l'infini et  $\varepsilon$  aussi

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (1.4)$$

Notons  $x_i = f^i(x_0)$  et on sait que

$$f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) \quad (1.5)$$

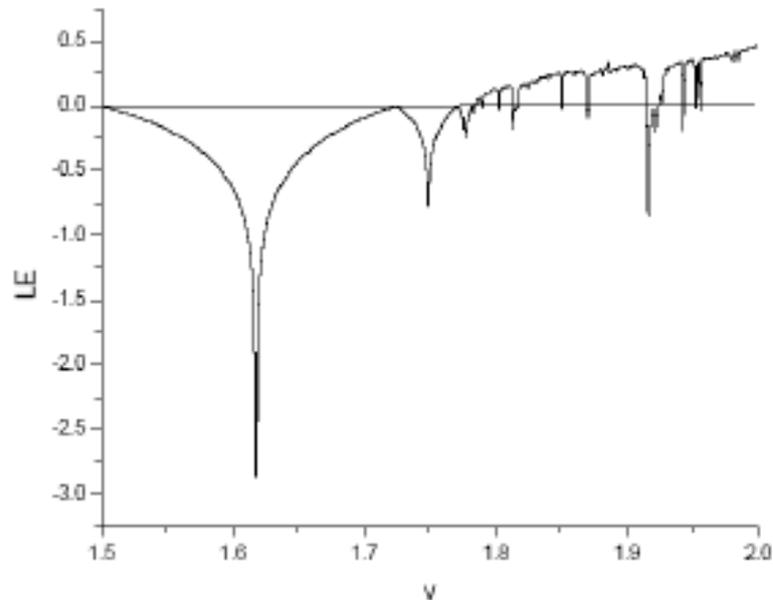
Par la règle de chaîne on obtient :

$$\frac{df^n(x_0)}{dx} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\dots f'(x_1)f'(x_0) \quad (1.6)$$

Alors l'exposant de Lyapunov égale à

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \quad (1.7)$$

**Exemple 1.4** L'exposant Lyapunov de l'application  $\varphi_v = -2vx^2 + (\frac{-1}{2}v - \frac{1}{2})$  est montré à la figure suivante . Nous prenons ici  $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{2}$  et  $v = \lambda \in [1.5, 2)$



L'exposant Lyapunov de l'application  
 $\varphi_v = -2vx^2 + (\frac{-1}{2}v - \frac{1}{2})$  pour  $v \in [1.5, 2)$

Dans ce cas, cet exposant de Lyapunov est strictement positif dans une large gamme de paramètres de bifurcation  $v$ .

# Chapitre 2

## Applications unimodales et S-unimodales

### Introduction

Dans cette partie, On rappellera les principales définitions et notions générales et spécifiques aux fonctions réelle et applications unimodales et S-unimodales. En plus nous étudions quelques propriétés des applications S-unimodales

## 2.1 Fonctions réelles

### 2.1.1 Définitions

**Définition 2.1** *On appelle fonction numérique de variable réelle toute application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On notera plus souvent  $I = D(f)$ , appelé le domaine (ou l'ensemble) de définition de  $f$ .*

*Si  $A \subset D(f)$ , on appellera image de  $A$  par  $f$  l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ .*

**Exemple 2.1** *Par exemple, on notera  $x \rightarrow 3x$*

*où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = 3x$  la fonction qui à un réel  $x$  associe 3 fois ce réel.*

## 2.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

**Définition 2.2** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$  si  $\forall x \in I \quad f(x) \geq g(x)$  ;
- $f \geq 0$  si  $\forall x \in I \quad f(x) \geq 0$  ;
- $f > 0$  si  $\forall x \in I \quad f(x) > 0$  ;
- $f$  est dite constante sur  $I$  si  $\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad f(x) = a$  ;
- $f$  est dite nulle sur  $I$  si  $\forall x \in I \quad f(x) = 0$ .

**Définition 2.3** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction. On dit que :

- $f$  est majorée sur  $I$  si  $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad f(x) \leq M$  ;
- $f$  est minorée sur  $I$  si  $\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad f(x) > m$  ;
- $f$  est bornée sur  $I$  si  $f$  est à la fois majorée et minorée sur  $I$ , c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad |f(x)| \leq M$$

## 2.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

**Définition 2.4** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction. On dit que :

- $f$  est croissante sur  $I$  si  $\forall x, y \in I \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si  $\forall x, y \in I \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- $f$  est décroissante sur  $I$  si  $\forall x, y \in I \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si  $\forall x, y \in I \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- $f$  est monotone (resp. strictement monotone) sur  $I$  si  $f$  est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur  $I$ .

## 2.1.4 Fonction périodique

**Définition 2.5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $T$  un nombre réel,  $T > 0$ .

La fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$$

### 2.1.5 Optimum locaux d'une fonction

- **Maximum local**

**Définition 2.6** Soit  $f(x)$  une fonction. Le point  $c$  est appelé maximum local si et seulement s'il existe  $I$ , un intervalle ouvert contenant  $c$ , tel que  $f(c) \geq f(x)$  pour tout  $x$  dans  $I$ .

- **Minimum local**

**Définition 2.7** Soit  $f(x)$  une fonction. Le point  $c$  est appelé minimum local si et seulement s'il existe  $I$ , un intervalle ouvert contenant  $c$ , tel que  $f(c) \leq f(x)$  pour tout  $x$  dans  $I$ .

**Exemple 2.2** Le graphique suivant (Fig. 2-1 -), présente une fonction qui possède un maximum local ainsi qu'un minimum local

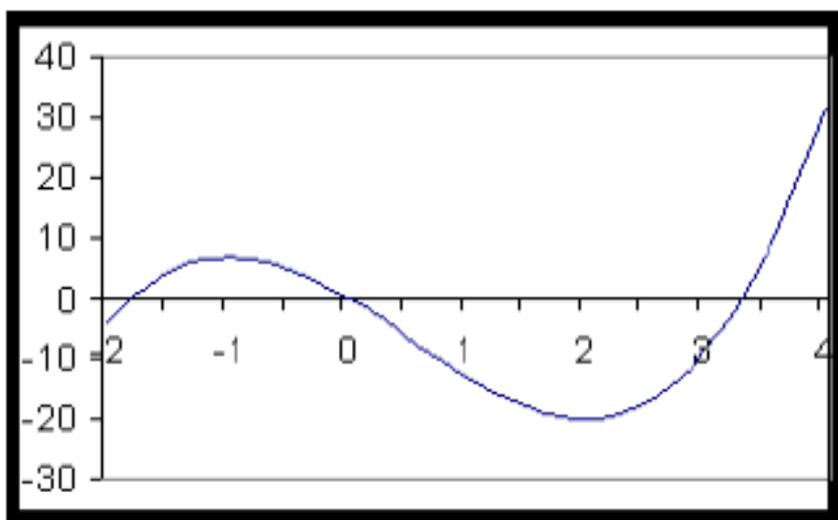


FIG. 2-1 - .

*Au point  $x = -1$  se trouve un maximum local puisqu'il existe un intervalle ouvert  $I_1$  contenant  $x = -1$  sur lequel  $f(-1) \geq f(x)$  pour tout  $x$  dans  $I_1$ .*

*Au point  $x = 2$  se trouve un minimum local puisqu'il existe un intervalle ouvert  $I_2$  contenant  $x = 2$  sur lequel  $f(2) \leq f(x)$  pour tout  $x$  dans  $I_2$ .*

## 2.2 Applications unimodales et S-unimodales :

Nous présentons quelques définitions et résultats utiles concernant les applications unidimensionnelles :

$$x_{k+1} = f(x_k), k \geq 1 \tag{2.1}$$

où  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , tel que  $[a, b]$  est un intervalle fermé.

**Définition 2.8** *Un point  $x$  est un périodique avec de période  $p$  si  $f^p(x) = x$  et  $p$  est le plus petit entier positif de cette propriété.*

## 2.2.1 Applications unimodales

**Définition 2.9** Une application continue  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est unimodale sur l'intervalle  $[a, b]$  si :

- (1)-  $a$  est un point fixé avec  $b$ , c'est-à-dire que  $f(a) = f(b) = a$
- (2)- il existe un maximum unique en  $c \in (a, b)$ , tel que :
  - $f(x)$  est strictement croissante sur  $x \in [a, c)$
  - $f(x)$  strictement décroissante sur  $x \in (c, b]$ .

Dans ce cas, la seule valeur maximale de  $f(x)$  est  $f(c)$ . Et il n'y a pas des autres valeurs maximums locaux. Si  $c$  est un point périodique pour l'application  $f$ , alors elle attire un soi-disant *super attracteur*.

## 2.2.2 Application régulière :

On dit que l'application  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est régulière si l'ensemble  $\omega$ -Limite de son point critique  $c$  ne contient pas de points périodiques neutres ou que l'ensemble  $\omega$ -Limite de  $c$  coïncide avec l'orbite d'un point périodique neutre

## 2.2.3 Dérivée Schwarzienne

La dérivée Schwarzienne de la fonction  $f$  est définie par :

$$\hat{S}(f, x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Cette dérivée a été formulée pour la première fois par H.A. Schwarzian. Elle a trouvé une application importante dans l'étude de la bifurcation d'application dans l'étude de la bifurcation d'orbites périodiques, la dérivée Schwarzienne est utilisée pour étudier le comportement limitant des systèmes dynamique [G., Denny] .

Si un'application  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a une dérivée Schwarzienne négative sur  $[0, 1]$ , alors elle tourne il doit y avoir un nombre  $c$  dans  $(0, 1)$  tel que  $f'(c) = 0$ , c'est-à-dire que

$f$  a un point critique. Nous disons que  $f$  est un'application S-unimodale [Collet,P. and Eckmann, D. Sands].

## 2.2.4 Applications S-unimodales

**Définition 2.10** Une application  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est S-unimodale sur l'intervalle  $[a, b]$  si :

- (a) la fonction  $f(x)$  est de la classe  $C^3$ ,
- (b) Le point  $a$  est un point fixé avec  $b$ , c-à-d,  $f(a) = f(b) = a$ ,
- (c) Il existe un maximum unique en  $c \in (a, b)$  tel que  $f(x)$  strictement croissante sur  $x \in [a, c)$  et strictement décroissante sur  $x \in (c, b]$ ,
- (d) La fonction  $f$  a une dérivée Schwarzienne négative, c'est-à-dire

$$\hat{S}(f, x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 < 0 \quad (2.2)$$

pour tout  $x \in I - \{y, f'(y) = 0\}$ . On peut utiliser le produit :

$$\hat{S}(f, x) = 2f'(x)f'''(x) - 3(f''(x))^2 < 0 \quad (2.3)$$

## 2.2.5 Chaos robuste et chaos fragile

Certains systèmes dynamiques chaotiques donnent deux types d'attracteurs chaotiques.

Le premier est appelé **le chaos fragile**, les attracteurs disparaissent avec des perturbations d'un paramètre, ou coexister avec d'autres attracteurs.

La seconde est appelée **le chaos robuste**, ce type se caractérise par l'absence d'orbites périodiques et ne accepte coexistence dans le voisinage de l'espace des paramètres.

L'existence de ces orbites dans certaines régions chaotiques signi. . . e qu'un petit changement dans les paramètres détruire le chaos, ce qu'implique la fragilité de ce type de

chaos.

On sait cependant que pour les systèmes chaotiques les plus lisses, il ya un ensemble dense de fenêtres périodiques pour tout intervalle de valeurs de paramètres. Par conséquent, dans des systèmes pratiques de travail en mode chaotique, de faibles fluctuations accidentelles d'un paramètre peut prendre le système à partir du chaos.

Nous disons un attracteur chaotique est robuste si, par ses valeurs de paramètres, il existe un voisinage dans l'espace des paramètres sans attracteur périodique et l'attracteur chaotique est unique dans ce voisinage.

Le chaos robuste à plusieurs applications dans le monde réel, comme les applications d'ingénierie, le chiffrement d'image, le cryptage,...un chaos robuste a été introduit dans la littérature actuelle comme suit :

**Définition 2.11** *Le chaos robuste est défini par l'absence de fenêtres périodiques et d'attracteurs coexistant dans un voisinage de l'espace paramétrique .*

*La raison principale de cette définition est que l'existence de ces fenêtres dans certaines régions chaotiques implique que de petits changements des paramètres détruiraient le comportement chaotique. Voir plus de détails sur le chaos robuste [Wang, X., Chen, G., Yu, X].*

## 2.2.6 Quelques propriétés de l'application S-unimodale :

Les applications S-unimodales ont une importance dans la théorie du chaos en raison du théorème donné [Singer, (1978)], selon lequel chaque orbite périodique attractif (stable) attire au moins un point critique ou une point limite. Ainsi, une application S-unimodale peut avoir au plus un attracteur périodique qui attirera le point critique.

**Théorème 2.1** *Soit  $f : I \rightarrow I$  une application S-unimodale sur l'intervalle  $I = [a, b]$ , puis chacune orbite périodique attractif (stable) attire au moins un point critique ou une point limite. De plus, chaque orbite périodique neutre est attractif.*

**Corollaire 2.2** *Un'application S-unimodale peut avoir au plus un attracteur périodique qui attire le point critique.*

Les conditions d'apparition d'un chaos robuste dans un système unidimensionnel sont données [Andrecut, M. & Ali, M. K] comme suit :

**Théorème 2.3** *Soit*

$$\varphi_v(x) : I = [a, b] \rightarrow I$$

*une application paramétrique S-unimodale avec le maximum unique en  $c \in (a, b)$  et  $\varphi_v(c) = b, \forall v \in (v_{\min}, v_{\max})$ , alors  $\varphi_v(x)$  génère le chaos robuste pendant  $v \in (v_{\min}, v_{\max})$ .*

Ici,  $v_{\min}$  et  $v_{\max}$  sont définis comme étant les valeurs minimales et maximales du paramètre  $v$  dans lequel  $\varphi_v(x)$  génère le chaos robuste.

Une procédure générale pour la construction d' applications S-unimodales générant le chaos robuste a été réalisée sur la base [Andrecut & Ali, (2001)].

### 2.2.7 Exemple sur l'application S-unimodale

On présente ici un modèle de classe de systèmes dynamiques non linéaires à temps discret. Ce modèle est appelé application quadratique (ou logistique). Nous allons suivre la démarche de [Feigenbaum], qui s'est intéressé tout particulièrement à la cascade de doublement de période, dans le cadre des itérations d'une fonction mathématique  $f$  à valeurs réelle :

$$f(x) = \lambda x(1 - x), x \in [0, 1]$$

est une application S-unimodale sur l'intervalle  $[0, 1]$ , puisque vérifiant les hypothèses suivantes :

- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est continue et différentiable.
- $f$  a un maximum  $c = \frac{1}{2}$  avec  $f'(c) \neq 0$ .
- $f$  est monotone dans  $[0, c]$  et  $[c, 1]$ .

- $f$  a une dérivée Schwartzienne  $\hat{S}(f, x) < 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Il peut exister au plus une orbite périodique attractif avec le point critique dans son bassin d'attraction, pour tout  $\lambda \in [2.4, 4]$ . Si  $\lambda = 4$ , l'orbite de valeur initiale  $x_0 = c$  correspond en deux itérations au point fixé de  $x = 0$ , ce qui est instable car  $|f'_4(0)| = 4 > 1$ . Alors  $f_4(x)$  n'a pas d'orbite périodique stable et il y a un attracteur chaotique unique.

Cependant, si le paramètre  $\lambda = 4$  est légèrement modifié, des orbites périodiques stables apparaissent. Par conséquent, nous disons que cette application génère le chaos. voir (Fig. 1-3).

# Chapitre 3

## Chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité

### 3.1 Chaotification d'applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité

#### Introduction

Il existe nombreuses méthodes de chaotification utilisées pour générer le chaos dans des applications à temps discret. Nous avons choisie une nouvelle méthode de chaotification d'applications discrètes unidimensionnelles à l'aide de la notion S-unimodalité :

**Condition 3.1** *Soit  $a < b$  deux nombres réels. Considérons une fonction  $g_v$  qu'est un' application de l'intervalle  $[a, b]$  à lui-même, c'est-à-dire  $g_v : [a, b] \rightarrow [a, b]$  tell que  $g_v$  est de classe  $C^3$ .*

*Considérons les applications discrètes unidimensionnel (1-D) arbitraires (pas nécessairement chaotiques) donnés par :*

$$x_{k+1} = g_v(x_k), v \in (v_{\min}, v_{\max}) \quad (3.1)$$

Considérons l'application unidimensionnel contrôlée donnée par :

$$x_{k+1} = g_v(x_k) + u(x_k) = \varphi(x_k), v \in (v_{\min}, v_{\max}) \quad (3.2)$$

où

$$u : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

est le contrôleur inconnu à choisir afin de créer le chaos robuste dans le système (3.1).

Définir le contrôleur :

$$u : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

Par les conditions suivantes :

(1) Le contrôleur  $u(x)$  de la classe  $C^3$ .

(2) Le contrôleur  $u(x)$  a les valeurs spéciales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(a) = a - g_v(a) \\ u(b) = a - g_v(b) \\ \text{Il existe un point } c \in (a, b) : u'(c) = -g'_v(c) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

(3)

$$a - g_v(x) \leq u(x) \leq b - g_v(x) \quad (3.4)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ .

(4)

$$u'(x) > -g'_v(x) \quad (3.5)$$

pour tout  $x \in [a, c]$ .

(5)

$$u'(x) < -g'_v(x) \quad (3.6)$$

pour tout  $x \in (c, b]$

(6)

$$2(g'_v(x) + u'(x))(g'''_v + u'''(x)) - 3(g''_v(x) + u''(x))^2 < 0 \quad (3.7)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ .

Nous avons prouvé le résultat suivant :

### 3.1.1 Le chaos robuste

**Théorème 3.2** *L'application contrôlée (3.2) génère le chaos robuste pour tous les  $v \in (v_{min}, v_{max})$ .*

**Proof.** *Nous allons prouver que  $\varphi_v(x)$  est une application  $S$ -unimodale.*

*En effet, la condition (3.4) implique que  $g_v(x) + u(x)$  sont des applications l'intervalle  $[a, b]$  à lui-même.*

*Comme indiqué, la fonction :*

$$\varphi_v(x) = g_v(x) + u(x)$$

*est de la classe  $C^3$ .*

*Selon la première et la deuxième condition de (3.3), le point  $a$  est un point fixé avec  $b$  son autre préimage, c'est-à-dire :*

$$\varphi_v(a) = \varphi_v(b) = a.$$

*Les conditions (3.5) et (3.6) impliquent*

$$\varphi_v(x) \leq \varphi_v(c), \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

ce qui signifie que  $c$  est un maximum global de  $\varphi_v$  dans l'intervalle  $[a, b]$ .

La troisième équation de (3.3) résulte du fait que tout minimum est un point critique.

La dérivée schwarzienne de  $\varphi_v$  est donné par :

$$\hat{S}(\varphi_v, x) = 2\varphi'_v(x)\varphi'''_v(x) - 3(\varphi''_v(x))^2$$

pour tout  $x \in [a, b] - \{y, \varphi'_v(y) = 0\}$ .

Selon la condition (3.7), nous avons :

$$\hat{S}(\varphi_v, x) < 0$$

■

Généralement, le contrôleur  $u$  dépend de la fonction  $g_v$  et de ses dérivées. Il n'a pas de formule explicite. Mais son existence garantit que l'application contrôlée (3.2) génère le chaos robuste pour tous les  $v \in (v_{\min}, v_{\max})$ .

### 3.1.2 Ensemble des contrôleurs

**Proposition 3.1** *L'ensemble des contrôleurs  $u$  vérifiant les conditions 1-6 n'est pas vide.*

**Proof. Le premier cas :**

En prenant

$$g_v(x) = vx$$

avec  $v, x \in [0, 1]$ , ainsi,  $g_v(x) \in [0, 1]$ .

On définit le contrôleur :

$$u(x) = -vx^2$$

Par conséquent

$$\varphi_v(x) = vx(1 - x)$$

Les conditions 1-6 pour le contrôleur  $u$  sont les suivantes :

(1) Le contrôleur

$$u(x) = -vx^2$$

est de classe  $C^3$ .

(2) Les conditions (3.3) sont :  $0 = 0 - 0, -v = 0 - v$  et  $-2vc = -v$   
impliquant que  $c = \frac{1}{2}$  est le seul élément point critique.

(3) Nous avons

$$-vx \leq -vx^2 \leq 1 - vx$$

pour tout  $x \in [0, 1]$ , puisque

$$-vx + vx^2 = vx(x - 1) \leq 0$$

et

$$-vx^2 - (1 - vx) = vx(1 - x) - 1 \leq 0$$

(4) Nous avons

$$u'(x) = -2vx > g'_v(x) = -v$$

pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2})$ , parce que

$$-2vx + v = v(1 - 2x) > 0$$

pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2})$ .

(5) Nous avons

$$u'(x) = -2vx < -g'_v(x) = -v$$

pour tout  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ , parce que

$$-2vx + v = v(1 - 2x) < 0$$

pour tout  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

**(6)** La dérivée Schwarzienne est :

$$\hat{S}(\varphi_v, x) = -12v^2 < 0.$$

Ici,  $v_{min} = 0$  et  $v_{max} = 1$ .

Alors, l'ensemble des contrôleurs  $u$  vérifiant les conditions **1-6** n'est pas vide

**Le deuxième cas :**

Plus généralement, en prenant

$$g_v(x) = vx$$

avec  $v, x \in [0, 1]$ , ainsi,  $g_v(x) \in [0, 1]$ .

Définir le contrôleur :

$$u(x) = -(v + \beta + \gamma)x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq v < \frac{1}{2} \\ 0 \leq v < \gamma < 1 - v \\ v + \beta + \gamma < 1 \\ \beta < \min \left\{ 1 - (\gamma + v), \frac{1}{6} \sqrt{13v^2 + 30v\gamma + 21\gamma^2} - \frac{1}{2}\gamma - \frac{5}{6}v \right\} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Par conséquent

$$\varphi_v(x) = (-v - \beta - \gamma)x^3 + \beta x^2 + (v + \gamma)x \quad (3.9)$$

Les conditions 1-6 pour le contrôleur  $u$  sont les suivantes :

(1) Le contrôleur  $u(x)$  de la classe  $C^3$ .

(2) Les conditions (3.3) sont :  $0 = 0$  et  $0 = 0$  et

$$0 < c = \frac{\beta + \sqrt{3v\beta + 6v\gamma + \beta^2 + 3\gamma^2 + 3\beta\gamma + 3v^2}}{3(v + \beta + \gamma)} < 1 \quad (3.10)$$

est le seul point critique. L'autre point critique est

$$c^* = \frac{\beta - \sqrt{3v\beta + 6v\gamma + \beta^2 + 3\gamma^2 + 3\beta\gamma + 3v^2}}{3(v + \beta + \gamma)} < 0$$

Les deux points  $c$  et  $c^*$  existent depuis

$$(3v\beta + 6v\gamma + \beta^2 + 3\gamma^2 + 3\beta\gamma + 3v^2) > 0$$

les conditions  $0 < c < 1$  et  $c^* < 0$  sont vérifiées , c'est-à-dire que  $c$  donné par (3.10) est le seul point critique de la intervalle  $[0, 1]$ .

(3) Nous avons :

$$-vx \leq -(v + \beta + \gamma)x^3 + \beta x^2 + \gamma x \leq 1 - vx$$

pour tout  $x \in [0, 1]$

depuis

$$x > 0 > \frac{-(v + \gamma)}{v + \beta + \gamma}$$

car

$$\gamma > 0, v \geq 0$$

et

$$-(v + \beta + \gamma)x^3 + \beta x^2 + \gamma x \leq 1 - vx$$

car

$$\begin{aligned} & -(v + \beta + \gamma)x^3 + \beta x^2 + (v + \gamma)x - 1 \\ \leq & \beta x + (v + \gamma)x - 1 \\ \leq & \beta + v + \gamma - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

parce que

$$x^2 < x$$

pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $v + \gamma > 0$  et  $v + \beta + \gamma < 1$ .

(4) Nous avons

$$u'(x) = \gamma + 2x\beta - 3vx^2 - 3x^2\beta - 3x^2\gamma > -g'_v(x) = -v$$

pour tout  $x \in [0, c)$

parce que

$$(-3v - 3\beta - 3\gamma)x^2 + 2\beta x + (v + \gamma) > 0$$

pour tout  $x \in (c^*, c)$  et  $[0, c) \subset (c^*, c)$  puisque  $c^* < 0$ .

(5) Nous avons

$$u'(x) = \gamma + 2x\beta - 3vx^2 - 3x^2\beta - 3x^2\gamma < -g'_v(x) = -v$$

pour tout  $x \in (c, 1]$ , car

$$(-3v - 3\beta - 3\gamma)x^2 + 2\beta x + (v + \gamma) < 0$$

pour tout  $x \in (c, 1]$ .

(6) La dérivée Schwarzienne est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{S}(\varphi_v, x) &= -72(v + \beta + \gamma)^2 x^2 + 48\beta(v + \beta + \gamma)x + 12(v\beta - \beta^2 - \gamma^2 - \beta\gamma + v^2) \\ &< 48\beta(v + \beta + \gamma)(1) + 12(v\beta - \beta^2 - \gamma^2 - \beta\gamma + v^2) \\ &< 12(3\beta^2 + (5v + 3\gamma)\beta + (v^2 - \gamma^2)) < 0\end{aligned}$$

depuis

$$3\beta^2 + (5v + 3\gamma)\beta + v^2 - \gamma^2 < 0$$

si

$$0 < \beta < \frac{1}{6}\sqrt{13v^2 + 30v\gamma + 21\gamma^2} - \frac{1}{2}\gamma - \frac{5}{6}v.$$

Ceci est possible si

$$\frac{1}{6}\sqrt{13v^2 + 30v\gamma + 21\gamma^2} - \frac{1}{2}\gamma - \frac{5}{6}v > 0,$$

c'est-à-dire

$$-12(v - \gamma)(v + \gamma) > 0$$

c'est  $v < \gamma$  puisque les trois premiers conditions de (3.8).

Ici  $v_{\min} = 0$ ,  $v_{\max} = \min\{\frac{1}{2}, \gamma, 1 - (\beta + \gamma)\}$ .

Alors, l'ensemble des contrôleurs  $u$  vérifiant les conditions **1-6** n'est pas vide. ■

**Remarque 3.1** Dans certains cas, les contrôleurs n'ont pas de formules explicites. Mais leur existence est régie par un ensemble de conditions réalisables.

# Conclusion général

Nous avons présenté dans ce mémoire une nouvelle méthode de chaotification d'applications discrètes unidimensionnelles à l'aide de la notion de S-unimodalité.

Pour les perspectives, il serait intéressant d'étudier la chaotification d'applications discrètes unidimensionnelles à l'aide de la condition de Collet-Eckmann .

# Bibliographie

- [1] A. Chenciner (1978), "Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure)", Journal de Physique.
- [2] G. Chen (1999). "Controlling chaos and Bifurcations in Engineering systems". London CRC Press.
- [3] E. Zeraouia (2006). "Etude de Quelques Types de Systemes Chaotique : Generalisation d'un Modele Issu du Modele de Chen".
- [4] Andrecut, M. & Ali, M. K. [2001] "On the occurrence of robust chaos in a smooth system," Modern Physics Letters B 15(12-13), 391-395.
- [5] Avila, A. [2002] "Bifurcations of unimodal maps," C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, 483-488.
- [6] Chen, G. & Lai, D. [1997] "Making a discrete dynamical system chaotic : Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical system," IEEE Trans. Circ. Syst.-I 44, 250-253.
- [7] Chen, G. & Lai, D. [1997] "Anticontrol of chaos via feedback," In Proc. of IEEE Confence on Decision and Control, San Diego, CA, pp. 367-372.
- [8] Chen, G. & Lai, D. [1998] Feedback anticontrol of chaos,"Int. J. Bifur. Chaos 8, 1585-1590.
- [9] Chen, G., Hsu, S. and Zhou, J. [1998] Snap-back repellers as a cause of chaotic vibration of the wave equation with a van der Pol boundary condition and energy injection at the middle of the span,"J. Math. Phys 39(12), 6459-6489.

- [10] Lai, D. & Chen, G. [2003] "Making a discrete dynamical system chaotic : Theoretical results and numerical simulations," *Int. J. Bifur. Chaos* 13(11), 3437-3442.
- [11] Li, T. Y. & Yorke, J. A. [1975] "Period three implies chaos," *Amer. Math. Monthly* 82, 481-485.
- [12] Li, X., Chen, G., Chen, Z. and Yuan, Z. [2002(a)] "Chaotifying linear Elman networks," *IEEE Trans. Neural Networks* 13, 1193-1199.
- [13] Li, Z., Park, J. B., Joo, Y. H., Choi, Y. H. and Chen, G. [2002(b)] "Anticontrol of chaos for discrete TS fuzzy systems," *IEEE Trans. Circ. Syst.-I.* 49, 249-253.
- [14] Li, Z., Park, J. B., Chen, G. and Joo, Y. H. [2002(c)] "Generating chaos via feedback control from a stable TS fuzzy system through a sinusoidal nonlinearity," *Int. J. Bifur. Chaos* 12, 2283-2291.
- [15] Li, Z., Park, J. B., Joo, Y. H., Choi, Y. H. and Chen, G. [2002(d)] "Anticontrol of chaos for discrete TS fuzzy systems," *IEEE Trans. Circ. Syst.-I.* 49, 249-253.
- [16] Li, C. [2004] "On super-chaotifying discrete dynamical systems," *Chaos, Solitons and Fractals* 21,855-861.
- [17] Lin , W., Ruan, J. and Zhou, W. [2002] "On the mathematical clarification of the snapback repeller in high-dimensional systems and chaos in a discrete neural network model," *Int. J. Bifur. Chaos* 12(5), 1129-1139
- [18] Lu, J., Zhou, T., Chen, G., Yang, X., [2002] "Generating chaos with a switching piecewise-linear controller," *Chaos* 12(2), 344-349.
- [19] Marotto, F. R. [2005] "On redefining a snap-back repeller," *Chaos, Solitons and Fractals* 25, 25-28.
- [20] Nowicki, T.& Przytycki, F. [1998] Topological invariance of the Collet{Eckmann property for S-unimodal maps, *Fundamenta Mathematicae* 155 33-43.
- [21] Ruoting, Y., Yiguang, H., Huashu, Q., Chen, G., [2005] "Anticontrol of chaos for dynamic systems in p-normal form : A homogeneity-based approach," *Chaos, Solitons and Fractals* 25, 687-697.

- [22] Singer, D. [1978] "Stable orbits and bifurcation of maps of the interval," SIAM J. Appl. Math 35, 260-267.
- [23] Tang, K. S., Man, K. F., Zhong, G. Q., and Chen, G. [2001] "Generating chaos via  $x \mapsto x^2$ ," IEEE Trans. Circuits Syst., I : Fundam. Theory Appl 48, 636.
- [24] Wang, X. and Chen, G. [1999] "On feedback anticontrol of discrete chaos," Int. J. Bifur. Chaos 9,1435-1441.
- [25] Wang, X., Chen, G., [2000(a)] "Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control," IEEE Trans. Circuits Syst., I : Fundam. Theory Appl 47, 410.
- [26] Wang, X. and Chen, G. [2000(b)] "Chaotifying a stable map via smooth small amplitude high-frequency feedback control," Int. J. Circ. Theory Appl. 28, 305-312.
- [27] Wang, X., Chen, G., Yu, X., [2000] "Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delayed feedback," Chaos 10, 771.
- [28] Zeraoulia, E. & Sprott, J. C. [2011(a)] "Some open problems in chaos theory and dynamics," Int. J. Open Problems Compt. Math 4(2), 1-10.
- [29] Zeraoulia, E. & Sprott, J. C. [2011(b)] "Robust chaos and its applications," World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, no 79.
- [30] J. D. Farmer, and J. J. Sidorowich, [1987] "Predicting chaotic time series," Phys. Rev. Lett. 59, 845.
- [31] M. Mammeri (2018), A Trivial Dynamics in 2-D Square Root Discrete Mapping, Applied Mathematical Sciences, Vol. 12 no. 8, 363- 368, 2018.
- [32] E. Zeraoulia and J. C. Sprott (2008), On the robustness of chaos in dynamical systems :Theories and applications. Front. Phys. China , 3, 195-204, .
- [33] J. P. Eckmann, and D. Ruelle (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Mod. Phys. 57, 617 .
- [34] M. Mammeri (2015), Hyperchaotic Behavior in a New 3-D Discrete-Time Systems, International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. Vol. 25. no. 2, 41-43 .

- [35] G. Chen, and D. Lai (1997), Making a discrete dynamical system chaotic : feedback control of lyapunouv exponents for discrete-time dynamical system, IEEE Trans. Circ. Syst.-I, 44, 250-253.
- [36] D. Lai, and G. Chen (2003), Making a discrete dynamical system chaotic : Theoretical results and numerical simulations, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13(11), 3437-3442 .
- [37] I. Shimada, and T. Nagashima (1979), A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. Prog. Theor. Phys, 61, 1605-1616.
- [38] G., Denny (1992) "Encounters with Chaos" McGraw-Hill, Inc.
- [39] Collet,P. and Eckmann (1997),J-P." Iterated Maps on the Interval as Dynamical System", Birkhauser ,Boston, Mass. 5th Printing,
- [40] D. Sands (1993), "Topological conditions for Positive Lyapunov exponent in Unimodal maps" Ph.D thesis ,St. John's College, Cambridge

## Résumé:

Ce mémoire a pour but de chaotification des systèmes discrets unidimensionnels par les applications S-unimodales. Au début, nous avons fait quelque préliminaire (Définitions, notion générales et spécifiques aux les applications discrètes) comme: stabilité, bifurcation etc. Ensuite, on présente les fonctions réelles et les applications unimodales et S-unimodales. Puis le chaos robuste et les caractéristiques du phénomène chaotique. Enfin, nous avons présenté des théorèmes et des propositions pour chaotification des applications discrètes en 1-D utilisant S-unimodalité.

**Mots-clés :** Système discret, attracteur, orbite, chaos, applications S-unimodales.

## Abstract:

The aim of this thèse is to chaotify one -dimensional discrete mappings using S-unimodality. Firstly, we presented some preliminary (Definitions, general concept and specific to the piecewise maps) like: stability and bifurcation.... Then, we presented the real functions and unimodal and S-unimodal maps, also the robust chaos and the characteristics of the chaotic phenomenon. Finally, we presented theorems and propositions for chaotifying one-dimensional discrete mappings using S-unimodality.

**Key words:** piecewise map, attractor, orbit, chaos, S-unimodal maps.

## الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو إحداث فوضى في الأنظمة المنفصلة أحادية البعد بواسطة تطبيقات S-unimodales فمننا أولاً بعرض المفاهيم الأساسية للتطبيق المتقطع منها: الاستقرار، التشعب و غيرها، ثم تطرقنا لعرض الدوال الحقيقية والتطبيقات unimodales و S-unimodales، ثم الفوضى القوية وخصائص الظاهرة الفوضوية، وفي الأخير قدمنا نظريات ومقترحات لخلق فوضى في التطبيقات المنفصلة أحادية البعد باستخدام S-unimodality.

**الكلمات المفتاحية :** نظام متقطع، جانب، مدار، فوضى، تطبيقات S-unimodales.