Etude générale d'un équation hyperbolique

Nom et Pénom

Amel Mohammedi* Karek.M (encadreur)

Département de Mathématiques

Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie

amelmath37@gmail.com

Résumé

Le travail discut dans cette mmoire est d'essayer de rsoudre l'quation hyperbolique de l'quation d'onde par la mthode de la formulation variationnelle pour prouver l'existence et l'unicit de la solution en utilisant la convergence de la srie des suites de Cauchy.

1. Préliminaires

Définition 1.1 *Soit X un espace vectoriel réel, une norme sur X est une application : $x \mapsto \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}^+$, telle que :*

(N1) $\|x\| = 0$, $x = 0$:
(N2) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ $\forall x \in X, \forall \lambda \in R$:
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,$\forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *Soit X un espace vectoriel réel, un espace normé est un couple $(X, \|.\|)$, o $\|.\|$ est une norme sur X.*

1.1 Espaces de Banache ses propriétes

Définition 1.3 *Un espaces $(X, \|.\|)$ est de Banach si et seulement si est complet pour la distance associe $\|.\|$*

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.4 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).On dit que E est muni d'un produit scalaire s'il existe une application*

$$h : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(u, v) \longmapsto h(u, v) = \langle u, v\rangle$$

vrifiant les propriétés suivantes.
Pour tous u, v et $w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ *(Hermitienne).*
2. $\langle \alpha u+\beta w, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle+\beta\langle w, v\rangle$;$\langle u, \alpha v+\beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle+ \overline{\beta}\langle u, w\rangle$ *(Sesquilinéaire).*
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$ et $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$ *(définie positive).*

Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Définition 1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associe.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{K} = \mathbb{C}$), H est dit espace de Hilbert réel (resp. complexe).

1.3 Théorie des distributions

Dans ce qui suit,Ω dsignera un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière Γ est régulière. Rappelons maintenant deux notions importantes pour la suite.

Définition 1.6 *Support*
Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$. On appelle support de f lensemble

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Le support de f est alors le plus petit ferm de $\mathbb{R}^n$ a lextérieure de quel la fonction f est nul.

Définition 1.7 *(Espace des fonctions test)*
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ on appeelle espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n | f \in \mathcal{C}_c^\infty\}.$$

1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.8 ***Les epaces** L^p*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq P < \infty$, on dfinit $L^P(\Omega)$ un espace de Lebesgue par :

$$L^P(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ , f est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pour $p = \mathbb{R}$ et $0 < P < \infty$ on dfinit $\|f\|_p$ par :

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Si $P = \infty$, nous avons :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ , f est mesurable,il existe une constante c telle que } \|f(x)\| \leq c \text{ p,p sur } \Omega \ \}$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{c, \|f(x)\| \leq c\}$$

2. Thorème de Lax-Milgram

Théorème 2.1 *Soit V un espace de Hilbert et soit l et a des formes linaire et bilinaire continues sur V et $V \times V$ respectivement $(l \in V')$. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel :*
trouver une fonction $u \in V$ telle que :

$$a(u, w) = l(w) \qquad \forall w \in V \tag{2.1}$$

Une forme linaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|.\|_V$, est dite continue s'il existe une constante C telle que :

$$l(w) \leq C\|w\|_V \qquad \forall w \in V \tag{2.2}$$

Définition 2.2 *Une forme bilinaire a est dite symtrique si :*

$$a(u, w) = a(w, u) \quad \forall u, w \in V$$

Définition 2.3 *Une forme bilinaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(u, w)| \leq C\|u\|_V\|w\|_V \quad \forall u, w \in V \tag{2.3}$$

Définition 2.4 *Une forme bilinaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :*

$$a(w, w) \geq \alpha\|w\|_V^2 \quad \forall w \in V \tag{2.4}$$

3. Ètude l'équation des ondes

Nous allons plus particulirement analyser une quation hyperbolique, par exemple cett qaution Ici on s'interres par une quation des ondes pour les conditions aux limites de Dirichlet suivante : :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \text{ avec } x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \text{ avec } x \in \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = u_1(x), \text{ avec } x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Formulation variationnelle

L'objectif dans cette action est de transformer l'quation aux derives partielles dans (3.1) une quation diffrentielle ordinaire.
L'ide est d'crire une formulation variationnelle qui ressemble une quation diffrentielle ordinaire du deuxime ordre.
Pour cela, nous multiplions l'quation des ondes (3.1) par une fonction test $v(x)$ qui ne dpend pas du temps t (dpend seulement de la variable spatiale x)

$$v(x)u_{tt}(x, t) - v(x)\Delta u(x, t) = v(x)f(x, t) \tag{3.2}$$

Intgrons (3.2) sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega v(x)u_{tt}(x, t) - \int_\Omega v(x)\Delta u(x, t) = \int_\Omega v(x)f(x, t)$$

Il est clair que l'espace faible "naturel" pour la fonction test $v(x)$ est $H_0^1(\Omega)$.
On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et la forme bilinaire $a(u, v)$ dfinis par

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

$$et$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx.$$

On utilise l'intgration par partie et le faite que

$$\int_\Omega v(x)u_{tt}(x, t)dx = \langle v(x), u_{tt}(x, t)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$et$$

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x, t)dx = \langle v(x), \Delta u(x, t)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

et comme v ne dpend que de x

$$\langle v(x), u_{tt}(x, t)\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle$$

Et a cause de la condition aux limites nous demandons ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω, aprs les calculs :

$$\begin{aligned}\langle v(x), \Delta u(x, t)\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\langle \nabla v(x), \nabla u(x, t)\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -a(v(x), u(x, t))\end{aligned}$$

on obtient,

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(x, t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x, t)\cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x, t)v(x)dx. \tag{3.3}$$

Soit un temps final $T > 0$ (ventuellement gal ∞), on se donne le terme source

$$f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)).$$

On se donne aussi des conditions initiales $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$.
La formulation variationnelle dduite (3.3) est donc : trouver une solution u dans

$$C([0, T]; H_0^1(\Omega) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)))$$

on étude l'existence et unicit

Références

[1] ***B.Said-Houari** et **N. Tatar**, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un probleme hyperbolique", 2003. Memoire de magister en mathmatiques, Universit de Annaba.*

[2] ***Andr Fortin** et **Andr Garon**, "Les éléments finis de la thorie la pratique", 1997-2011*

[3] ***G. Allaire**,"Analyse numrique et optimisation"*