UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Azzaoui Bouchra

Thème

Quelques résultats de non-existence globale de solutions d'équations et de systèmes différentiels fractionnaires

Version de : 27/06/2019

Devant le jury composé de :

M. Mezabia Med El Hadi	MCA. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Badidja Salim	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

l'année universitaire : 2018/2019

Remerciements

En premier lieu, je tiens a remercier le Bon DIEU de m'avoir donner le courage et la volonté pour continuer et achever ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur **Dr. Brahim Tellab** d'avoir accepté de m'encadrer et aussi pour l'effort fournis, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier également **:Dr. Badidja Salim** et **Dr. Mezabia Med EL Hadi**.
Pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs remarques judicieuses.

Je voudrais remercier tous mes chers frères, mes chères sœurs, en particulier un grand merci à mes parents pour leur grande disponibilité, leurs gentillesses en toute circonstance.

Je tiens à remercier mes amis et tous les enseignants tous et les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla. Enfin, je voudrais exprimer mes sincères remerciements à notre distingué professeur Ali Mech , qu'Allah ait pitié de lui.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Les dérivées et les intégrales fractionnaires jouent un rôle important dans la modélisation mathématique de diverses situations scientifiques, en mécanique, physique, chimie, biologie et dans plusieurs autres domaines des sciences, voir par exemple [12, 20]. Des problèmes aux limites pour des équations et des systèmes fractionnaire ont été étudié dans plusieurs travaux en utilisant l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ voir [11, 21, 25].

Dans ce travail nous considérons le problème de Cauchy pour le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta_1/2}u = |u|^{p_1}|v|^{q_1}+f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\beta_2/2}v = |u|^{p_2}|v|^{q_2}+g(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

où $p_i, q_i, \beta_i, i = 1,2$ sont des constantes telles que :

$$p_1 > 1, q_1 \geq 0, p_2 \geq 0, q_2 > 1, 0 < \alpha_i < 1, 1 \leq \beta_i \leq 2, \tag{H1}$$

et

$$1 \leq N \leq \max\left\{\beta_1(p_1^{'} - \frac{1}{\alpha_1}), \beta_2(q_2^{'} - \frac{1}{\alpha_2})\right\} \tag{H2}$$

où $p_1^{'}$ et $q_2^{'}$ sont respectivement les exposants conjuguées de p_1 et q_2. $\mathbf{D}^{\alpha_i}_{0|t}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre arbitraire α_i au sens de Caputo voir [9, 23], $(-\Delta)^{\beta_i}$ est réservé pour le laplacien fractionnaire d'ordre β_i défini par :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta_i}\mathcal{F}(u)(\xi))(t,x),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse et f, g sont deux fonctions satisfaisant des conditions appropriées qui seront définies ultérieurement.

Le problème (1) a été traité par de nombreux auteurs, voir par exemple [15, 14, 16, 26, 24]. Kirane et al. [17] ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta_1/2}u = |v|^{q_1}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\beta_2/2}v = |u|^{p_2}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

Dans le cas $0 < \alpha_i < 1$ et $1 \leq \beta_i \leq 2$, ils ont prouvé que si $q_1 > 1$, $p_2 > 1$, $q_1 q_1' = q_1 + q_1'$, $p_2 p_2' = p_2 + p_2'$ et

$$1 \leq N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{q_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{q_1 p_2}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 q_1 p_2'} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}} \right\}$$

alors le problème (2) n'admet pas de solutions globales faibles non négatives non triviales.

Dans [14], Yamauchi a considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1} |u|^{p_1} |v|^{q_1}, \\ v_t - \Delta v = |x|^{\sigma_2} |u|^{p_2} |v|^{q_2}, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $p_i, q_i \geq 0$, $\sigma_i \geq \max\{-2, -N\}$, $i = 1, 2$ et $p_1, q_2 \neq 1$. Il a prouvé la non-existence des résultats sous certaines relations entre les exposants p_i, q_i, σ_i et les données initiales.

Ce travail améliore et étend un résultat obtenu dans [17] par Kirane et al.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés de base sur les dérivées et les intégrales fractionnaires et quelques théorèmes fondamentaux utiles à la suite de ce travail.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les définitions et quelques propriétés fondamentales des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov.

Chapitre 3 : Ce chapitre à pour but, l'étude de la non-existence globale de solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires non linéaires en utilisant des formulations variationnelles basées sur les fonctions tests à la recherche des exposants critiques de type Fujuta.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Cette fonction généralise la factorielle n ! et permet à n de prendre des valeurs non entières.

1.1.1 Définition de la fonction Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad z > 0, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0_+) = +\infty, \quad \Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

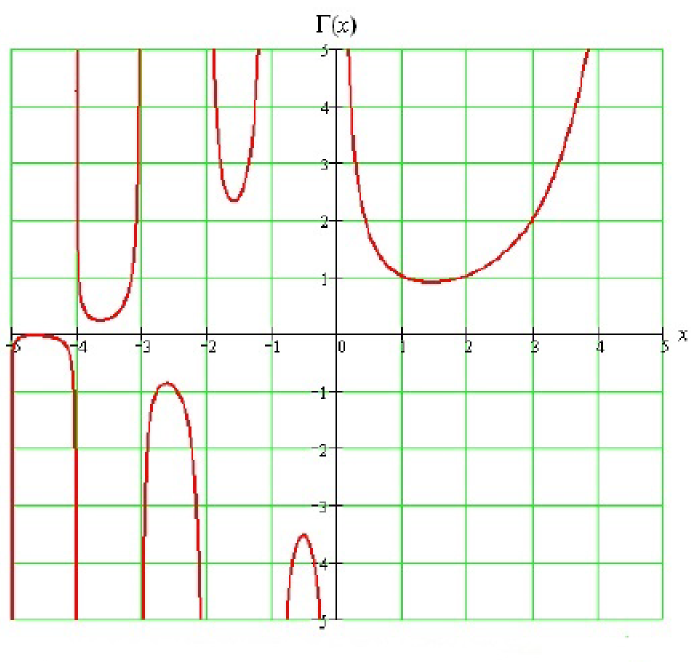


FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction Gamma

1.1.2 Quelques Propriétés de la fonction Gamma

Une propriété fondamentale de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} dt \\
&= [-e^{-t} t^{z}]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z). \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est obtenue par intégration par parties. Évidemment $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant la propriété ci-dessus, nous obtenons des valeurs pour $z = 1, 2, 3, ..., n \quad , n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1! \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2! \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3! \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

La propriété ci-dessus est valide pour les valeurs positives de z. Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle a des pôles simples à $z = 0, -1, -2, -3...$. La preuve s'explique en scindant la fonction en deux intervalles, comme indiqué ci-dessous :

$$\Gamma(z) = \int_0^{1} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \qquad (1.4)$$

La première intégrale peut être évaluée en utilisant l'extension en série pour fonction l'exponentielle. Si $Re(z) = x > 0$, alors $Re(z + k) = x + n > 0$ et ensuite $t^{z+k} \mid_{t=0} = 0$. Donc,

$$\int_0^{1} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{1} t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}. \qquad (1.5)$$

La deuxième intégrale peut être représentée comme une " fonction entière".

Fonctions pour le calcul fractionnaire :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
\Gamma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \varphi(z) \\
&= \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} + ..., \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

indiquant ainsi clairement les pôles simples à 0, -1, -2, -3. . ., cela signifie qu'aux points entiers négatifs, la fonction Gamma approche asymptotiquement de l'infini et est discontinue à ces valeurs entières négatives.

Maintenant nous montrons que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Dans (1.1) , nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2e^{-y^2} dy. \tag{1.7}$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2e^{-x^2} dx. \tag{1.8}$$

Si nous multiplions l'équation (1.7) et (1.8) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi. \tag{1.10}$$

Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n (voir [13]) :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\
\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),
\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives :

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^2}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

Théorème 1.1.1 *[4] Soient U un ouvert dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, T un espace mesuré muni de la mesure de Lebesgue et $f : T \times U \to \mathbb{C}$.*
Soit f une fonction avec une paramètre x définie par :

$$\begin{aligned}
f : T &\to \mathbb{C} \\
t &\mapsto f(x,t),
\end{aligned}$$

on suppose qu'elle est intégrable. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F : U & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_T f(t,x)d\mu(t), \end{array}$$

où μ est la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.1.2 *(**La continuité**)[4]*
En considère les fonctions f et F définies précédement, si :

1. *pour presque tout t, la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} F : U & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,t), \end{array}$$

est continue sur U,

2. *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_k telle que :*

$$|f(x,t)| \leq g_k(t), \quad \forall t \in T, \quad \forall x \in K,$$

alors la fonction F est continue sur U.

Théorème 1.1.3 *(**Dérivabilité**) [4] Si :*

1. *pour presque tout t, la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} F : U & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,t), \end{array}$$

est dérivable sur U,

2. *pour tout compact $K \subset U$ il existe une fonction g_k intégrable et positive de plus, $x \longmapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ continue, on a :*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| \leq g_k(t), \quad \forall x \in K,$$

alors la fonction F est dérivable sur U avec :

$$F'(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)d\mu.$$

1.1.3 Fonction Gamma en tant que limite

La fonction Gamma peut également être représentée par la limite :

$$\gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}. \tag{1.11}$$

Ici, on suppose initialement le demi-plan de droite $Re(z) > 0$ ou en cas de valeurs positives en nombre réel.

Nous introduisons une fonction auxiliaire pour prouver cette partie :

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{z-1} dt. \tag{1.12}$$

Maintenant nous passons $\tau = \dfrac{t}{n}$, nous intégrons par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la limite connue :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}. \tag{1.13}$$

Nous arrivons à ce qui suit :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-1} t^{z-1} dt = \Gamma(z). \tag{1.14}$$

La fonction Gamma incomplète est définie de deux manières. Dans les deux définitions, l'intégrale est identique, mais des limites de l'intégration sont différentes. La fonction Gamma incomplète supérieure est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z,x) = \int_x^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.15}$$

et la fonction Gamma incomplète inférieure est définie par :

$$\gamma(z,x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \tag{1.16}$$

et dans les deux cas, x est réel et $x \geq 0$, et z est complexe avec $Re(z) > 0$. Certaines propriétés des fonctions Gamma inachevées sont :

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \Gamma(z,x) + \gamma(z,x) \\ \Gamma(z+1,x) &= z\Gamma(z,x) + x^z e^{-x} \\ \gamma(z+1,x) &= z\gamma(z,x) - x^z e^{-x}. \end{aligned}$$

Pour entier $n = z$:

$$\begin{aligned} \Gamma(n,x) &= (n-1)! e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \\ \Gamma(n,0) &= \Gamma(n) = (n-1)! \\ \gamma(n,x) &\to \Gamma(n), \lim x \to \infty \\ \Gamma(1,x) &= 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1 *:*

1. $\Gamma(5) = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

2. $\dfrac{\Gamma(4)}{3\Gamma(3)} = \dfrac{3!}{3 \times 2!} = \dfrac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 1.$

3. $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

1.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.
La courbe de la fonction Bêta est donnée par la forme :

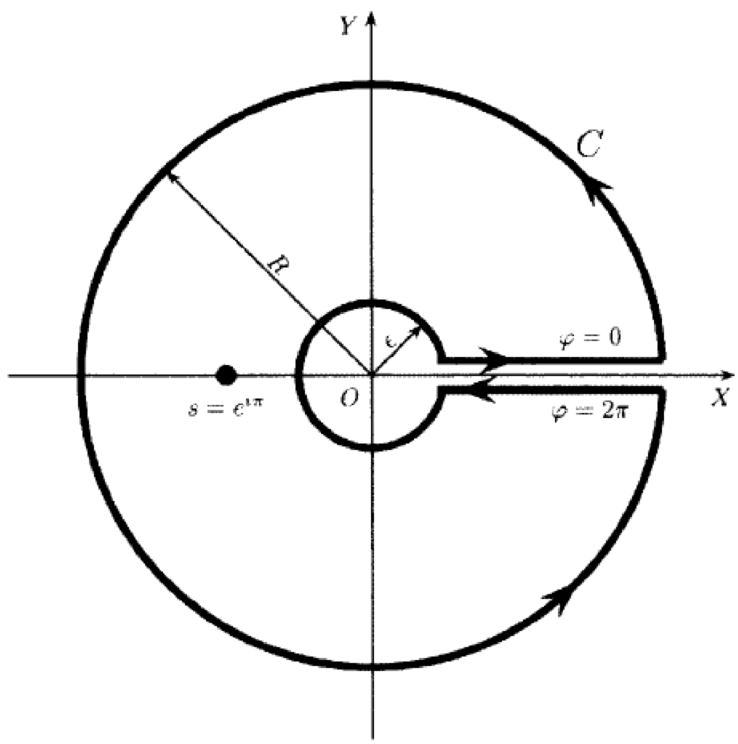


FIGURE 1.2 – Contour L

Définition 1.2.1 *[9] : La fonction Bêta est définie par :*

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad (Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0). \tag{1.17}$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.1) et la fonction Bêta (1.17), nous allons utiliser la transformation de Laplace. Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1} d\tau. \tag{1.18}$$

Évidemment, $h_{z,w}(t)$ est une convolution des fonctions τ^{z-1} et τ^{w-1} et $h_{z,w}(1) = B(z,w)$.
Puisque la transformée de Laplace de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, nous obtenons :

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}.\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}, \tag{1.19}$$

où $H_{z,w}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $h_{z,w}(t)$.

D'autre part, puisque $\Gamma(z)\Gamma(w)$ est une constante, il est possible de restaurer la fonction initiale $h_{z,w}(t)$ par la transformation inverse de Laplace du côté droit de (1.19) . En raison de l'unicité de la transformée de Laplace, nous obtenons donc :

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}, \tag{1.20}$$

et en prenant $t = 1$, on obtient l'expression suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \tag{1.21}$$

d'où il résulte que :

$$B(z,w) = B(w,z). \tag{1.22}$$

1.2.1 Quelques Propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1.2.1 *: Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$: Re$(p) > 0$ et Re$(q) > 0$. On a :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.
3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$.

Démonstration :
1.$B(p,q) = B(q,p)$

$$B(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^{p-1}\tau^q d\tau = B(q,p)$$

.
2.$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{q}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{q}{p+q}B(p,q). \end{aligned}$$

On obtient :

$$(p+q)B(p,q+1) = qB(p,q),$$

et ceci implique :

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \frac{p}{q}B(p,q+1) + B(p,q+1)\\ &= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1)\\ &= \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1).\end{aligned}$$

Donc

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1).$$

3.

$$B(p,q+1) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$
$$= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q}{p}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$
$$= \frac{q}{p}B(p+1,q).$$

D'où :

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+1}B(p,q).$$

Proposition 1.2.2 *[6]*

1. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{C}$
$$aB(a,b+1) = B(a+1,b).$$
2. *Si* $n = b+1$ *est un entier, cela donne une relation de récurrence :*
$$B(a,b) = \frac{n-1}{a}B(a+1,n-1)$$
3. $$B(a,1) = \frac{1}{a}.$$
4. $$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans le calcul fractionnaire, elle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [22]) et désignée par la fonction suivante :

1.3.1 La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est une généralisation de la fonction exponentielle $exp(z)$ et déterminé par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad (\alpha \in \mathbb{C}). \tag{1.23}$$

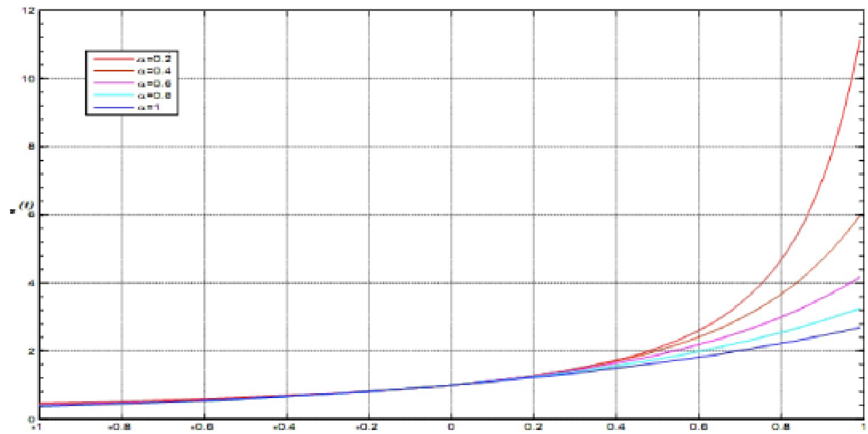


FIGURE 1.3 – La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre

1.3.2 La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

Une fonction à deux paramètres du type Mittag-Leffler est définie par le développement en série suivant [3] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0). \tag{1.24}$$

La définition (1.24) implique que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \tag{1.25}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)} = \frac{e^z - 1}{z}, \tag{1.26}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \tag{1.27}$$

et en général :

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} = \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \tag{1.28}$$

Le sinus hyperbolique et le cosinus sont également des cas particuliers de la fonction Mittag-leffler (1.24) :

$$E_{1,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

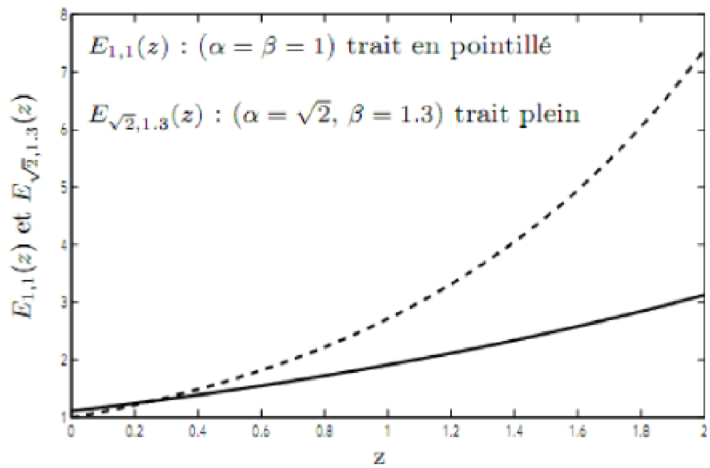


FIGURE 1.4 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

1.3.3 La transformation de Laplace de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

De la relation (1.24) la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ est une généralisation de la fonction exponentielle e^z .
Nous expliquons comment obtenir une transformation de Laplace pour la fonction de Mittag-Leffler en utilisant la mesure entre cette fonction et la fonction e^z. Pour cela, obtenons la transformation de Laplace de la fonction $t^k e^{\alpha t}$ de manière non traditionnelle.
Premier, prouvons que :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{\pm zt} = \frac{1}{1 \mp z}, \quad |z| < 1, \tag{1.29}$$

en utilisant l'extension en série pour e^z, on obtient :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{zt} dt = \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm z)^k = \frac{1}{1 \mp z}. \tag{1.30}$$

Deuxièmement, nous différencions les deux côtés de l'équation (1.29) par rapport à z. Le résultat est :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^k e^{\pm zt} dt = \frac{k!}{(1 - z)^{k+1}}, \quad (|z| < 1), \tag{1.31}$$

et après des substitutions évidentes, nous obtenons la paire bien connue de transformées de Laplace de la fonction $t^k e^{\pm \alpha t}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^k e^{\pm \alpha t} dt = \frac{k!}{(p \mp \alpha)^{k+1}}, \quad (Re(p) > |\alpha|). \tag{1.32}$$

1.4 Fonction Agarwal

En 1953, Agarwal a fait circuler la fonction Mittag-Leffler. Cette fonction revêt une importance particulière pour la théorie du système d'ordre fractionnaire en raison de sa conversion de Laplace par Agarwal. La fonction est définie par :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{(m+\frac{\beta-1}{\alpha})}}{\Gamma(\alpha.m+\beta)},$$

$$L\{E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-1}.$$

1.5 Fonction d'Erdelyi

Erdelyi (1954) a étudié la généralisation de la fonction Mittag-Leffler en tant que :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{m}}{\Gamma(\alpha.m+\beta)}, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Où les puissances de t sont des entiers.

1.6 Fonction Miller-Ross

En 1993, Miller et Ross ont introduit une fonction comme base de la solution du problème de la valeur initiale d'ordre fractionnaire. Il est définie comme l'intégrale de la fonction exponentielle, c'est-à-dire :

$$E_t(v,a) = t^{v} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(at)^{k}}{\Gamma(v+k+1)}.$$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue [5]
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que :

a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω,

b) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω [1]
Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Théorème (Inégalité de Hölder) [5]

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}. \tag{1.33}$$

Démonstration :

La conclusion est évidente si $p=1$ et si $p=\infty$. Supposons donc que $1<p<\infty$. Rappelons l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall a \geq, \forall b \geq 0, \tag{1.34}$$

1. On dit que g est une majorante intégrable des fontions (f_n)

la démonstration de (1.34) est évidente : la fonction log étant concave sur $]0,\infty[$, on a :

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'}\right)\geq\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{p'}\log b^{p'}=\log ab.$$

Donc

$$|f(x)||g(x)|\leq\frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{p'}|g(x)|^{p'}\quad p.p\quad x\in\Omega.$$

II en résulte que $fg\in L^1$ et que :

$$\int|fg|\leq\frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p+\frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'},\tag{1.35}$$

remplaçant dans (1.35) par $\lambda f(\lambda>0)$, il vient :

$$\int|fg|\leq\frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p+\frac{1}{\lambda p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}.\tag{1.36}$$

On choisit $\lambda=\|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^{p'}}^{p'/p}$ (de manière à minimiser le membre de droite dans (1.36)) . On obtient alors (1.33).

Thoéorème (l'inégalité de Young) [5]

Soient $a\in L^p$ et $b\in L^{p'}$ Où $a\geq 0$ et $b\geq 0$:

$$ab\leq\varepsilon a^p+C(\varepsilon)b^{p'}.$$

Notation :
Soit $1\leq p\leq\infty$ on déigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. ■

Chapitre 2

Dérivées et intégrales fractionnaires

2.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous présentons quelques définitions relatives au calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.1.1 Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 2.1.1 *[1, 23]*
Soit $f \in L^1[a,b]$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.1}$$

où $n - 1 < [Re(\alpha)] < n$ et $x > a$.
En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(D_a^0 f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t)dt = f(t), &(2.2)\\ (D_a^m f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right) \int_a^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x). &(2.3)\end{aligned}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Définition 2.1.2 *[19] Soient $0 < \alpha < 1$ et $\phi \in L^1(0,T)$. Les dérivées de Riemann-Liouville à gauche et à droit de l'ordre α pour ϕ sont définis respectivement par :*

$$D_{0|t}^{\alpha_1}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma,$$

et

$$D_{t|T}^{\alpha_1}\phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\phi(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha} d\sigma,$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

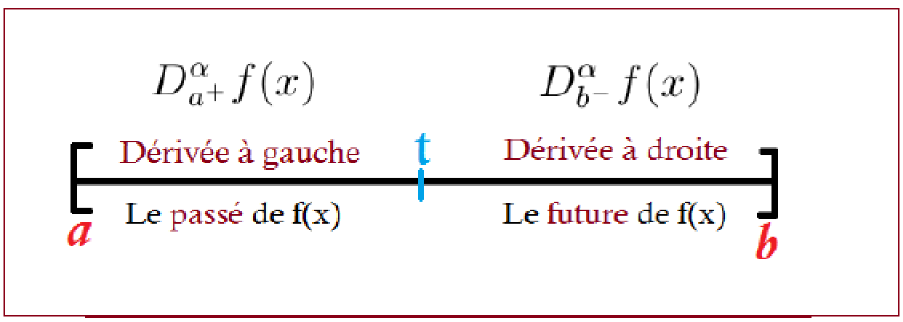
Définition 2.1.3 *[2]*
Les dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville $D^{\alpha}_{a^+}f$ et $D^{\alpha}_{b^-}f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a. \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b^-}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b^-}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b. \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.



Les dérivées à droite et à gauche de f(x)

2.1.2 Propriétés de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Théorème 2.1.1 *[1, 23]* ***(linéarité)***
Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D^{\alpha}_a(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D^{\alpha}_a(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D^{\alpha}_a f)(x) + \mu(D^{\alpha}_a g)(x).$$

Proposition 2.1.1 *[1, 23]*
Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta < m$.

1. *Pour $f \in L^1([a,b])$, on a :*
$$D^{\alpha}_a(I^{\alpha}_a f(t)) = f(t),$$
est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$
2. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$, la relation :*
$$D^{\beta}_a(D^{\alpha}_a f)(x) = (I^{\alpha-\beta}f)(x),$$
est vrai presque partout sur $[a,b]$.
3. *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D^{\beta-\alpha}_a f$ existe, alors on a :*
$$D^{\beta}_a(I^{\alpha}f)(x) = (D^{\beta-\alpha}_a f)(x).$$

2.1.3 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (Intégrales d'ordre arbitraire)

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω. Nous avons :

$$\begin{aligned}
I^1_{a^+} f(x) &= \int_a^x f(t)dt. \\
I^2_{a^+} f(x) &= I^1_{a^+}(I^1_{a^+} f(x)) = \int_a^x I^1_{a^+} f(t)dt = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt.
\end{aligned}$$

On pose $g(t) = \displaystyle\int_a^t f(s)ds$, par intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}
I^2_{a^+} f(x) &= \left[t \int_a^t f(s)ds \right]_a^x - \int_a^x tf(t)dt \\
&= x \int_a^x f(s)ds - \int_a^x tf(t)dt \\
&= x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Donc, pour la n-ième intégrale, on obtient :

$$I^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

D'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons :

$$I^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Définition 2.1.4 *[2] [10]*
Soient $\Omega = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$, une fonction intégrable, les intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ sont données par les formules :

$$I^\alpha_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \tag{2.6}$$

$$I^\alpha_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b. \tag{2.7}$$

Théorème 2.1.2 *:*
Soient $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$, les intégrales à gauche et à droite au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :

1 $I^{\alpha}_{a^+}\left[I^{\beta}_{a^+}f(x)\right] = I^{\alpha+\beta}_{a^+}f(x).$

2 $I^{\alpha}_{b^-}\left[I^{\beta}_{b^-}f(x)\right] = I^{\alpha+\beta}_{b^-}f(x).$

prouve *: voir ([2], page 73) .*

Remarque 2.1.1 *Les deux formules* (2.6) *et* (2.7) *sont généralisées de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation* α *non entier.*

2.1.4 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Considérons la n-ième dérivée de Riemann-Liouville d'ordre réel p. En utilisant la définition (2.1) de la dérivée de Riemann-Liouville, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{k-\alpha}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau && (2.8) \\ &= {}_aD_t^{n+k-\alpha}f(t), && (2.9) \end{aligned}$$

avec :

$$0 < \alpha \leq 1.$$

Si on pose $p = k - \alpha$, on trouve :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p}f(t)\right) = {}_aD_t^{p}\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{n+p}f(t) = {}_aD_t^{p+n}f(t). \tag{2.10}$$

2.1.5 Composition avec les dérivées fractionnaires

Passons maintenant à la composition de deux opérateurs de dérivations fractionnaires de Riemann-Liouville : ${}_aD_t^p, (m-1 \leq p < m)$, et ${}_aD_t^q, (n-1 \leq q < n)$:

$${}_aD_t^p\left({}_aD_t^qf(t)\right) = {}_aD_t^{p+q}f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \tag{2.11}$$

en échangeant p et q (et donc m et n), on peut écrire :

$${}_aD_t^q\left({}_aD_t^pf(t)\right) = {}_aD_t^{p+q}f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{p-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \tag{2.12}$$

La comparaison les relations (2.11) et (2.12) indique que, dans le cas général, les opérateurs de dérivations fractionnaires de Riemann-Liouville ${}_aD_t^p$ et ${}_aD_t^q$ ne pe permtest pas, à une seule exception près (sauf le cas trivial p = q) : à savoir $p \neq q$, nous avons :

$${}_aD_t^p\left({}_aD_t^qf(t)\right) = {}_aD_t^q\left({}_aD_t^pf(t)\right) = {}_aD_t^{p+q}f(t). \tag{2.13}$$

2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

Bien que la dérivation de Riemann-Liouville joue un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, il s'avère que ses dérivées présentent certains inconvénients pour tenter de modéliser des phénomènes du monde réel avec des équations différentielles fractionnaires.

De nombreux auteurs, y compris Caputo (1967-1969), ont compris que cette définition devait être révisée car les problèmes posés en viscoélasticité, en mécanique des solides et en rhéologie exigent que les conditions initiales soient physiquement interprétées par des dérivées classiques. Au cours de l'approche de Riemann, ce qui nécessite une connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 2.2.1 *[1, 23]*
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < Re(\alpha) < n$ et $f \in C^n([a,b])$.
La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée $\mathbf{D}_a^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_a^\alpha f(x) &:= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt.\end{aligned}$$

Définition 2.2.2 *[19] Soient $0 < \alpha < 1$ et $\phi' \in L^1(0,T)$. Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Caputo respectivement pour α et ϕ' comme suit :*

$$\boldsymbol{D}_{0|t}^{\alpha_1} \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\phi'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma,$$

et

$$\boldsymbol{D}_{t|T}^{\alpha_1} \phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{\phi'(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha} d\sigma.$$

Remarque 2.2.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$, s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre m, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 2.2.1 *Pour $f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$, on a :*

$$\mathbf{D}_a^\alpha f(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad \beta \in \{0,1,2,...,m-1\} \\ \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-\alpha)^{\beta-\alpha} \quad si \quad \beta > n-1. \end{cases} \tag{2.14}$$

En particulier, si f est constante sur $[a,b]$, alors :

$$\mathbf{D}_a^\alpha f = 0.$$

Définition 2.2.3 *[2]*
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $f^{(n)} \in L^1[a,b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α de f sont définies par :

$$\mathbf{D}_{a^+}^\alpha f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \tag{2.15}$$

et

$$\mathbf{D}_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt. \tag{2.16}$$

2.2.1 Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

Proposition 2.2.1 *(linéarité) :*
• *Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire :*

$$\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} f)(x) + \mu(\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} g)(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

et

$$\mathbf{D}_{b^-}^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(\mathbf{D}_{b^-}^{\alpha} f)(x) + \mu(\mathbf{D}_{b^-}^{\alpha} g)(x). \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

• *Les relations entre les dérivées au sens de Caputo* (2.15) , (2.16) *et les dérivées au sens de Riemann-Liouville* (2.4), (2.5) *sont données par :*

$$\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = D_{a^+}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right), \tag{2.17}$$

et

$$\mathbf{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) = D_{b^-}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k\right). \tag{2.18}$$

Proposition 2.2.2 *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et la dérivée usuelle* $f^{(n)}(t)$ *existe, alors la dérivée frationnaire* $\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} f(t)$ *de Caputo d'ordre n coïncide avec* $f^{(n)}(t)$ *c'est-à-dire :*

$$\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t).$$

2.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.3.1 *[1, 23]*
Soient $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. *Si f possède* $(n-1)$ *dérivée en a et si* $D_a^{\alpha} f$ *existe, alors :*

$$(\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(x) = D_a^{\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k],$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 2.3.1 *Le résultat du théorème* $(2.3.1)$ *signifie que la dérivée au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.*

Proposition 2.3.1 *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad (n = [\alpha] + 1)$ *, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coïncide avec la dérivée fractionnaire de R-L comme suite :*

$$\mathbf{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = D_{a^+}^{\alpha} f(t).$$

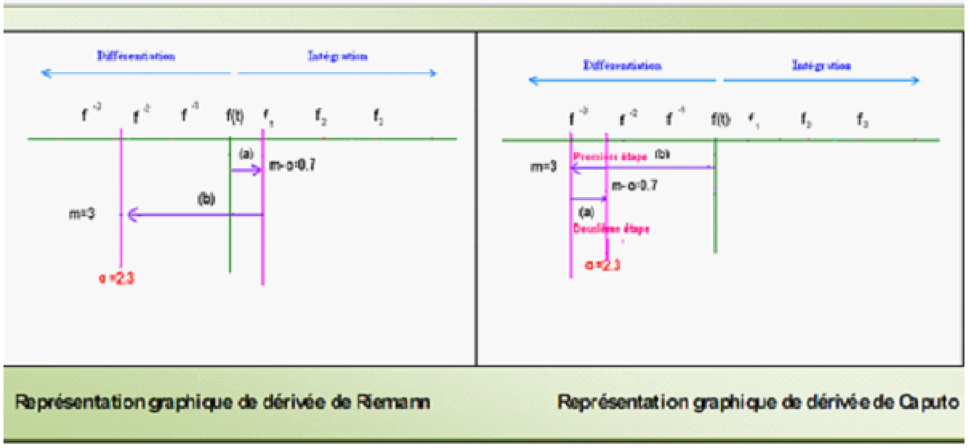


FIGURE 2.1 – Courbe de représentations graphiques des derivées de Rimann-Liouville et Caputo

2.4 Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Dans cette partie, nous montrons l'approche de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de "dérivée d'ordre entier". répétée n-fois.

2.4.1 Dérivées d'ordre arbitraire

Considérons une fonction continue $y = f(t)$. Selon la définition bien connue, la dérivée de premier ordre de la fonction f , f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, t]$, il est définie par :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Par dérivation répétée de la fonction f, on obtient une généralisation à l'ordre n (n est un entier) :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rt), \tag{2.19}$$

où :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}.$$

La formule (2.19) représente la dérivée d'ordre entier n, si n est positif et l'intégrale répétée n fois.
Si n est négatif,

$$(-1)^r \binom{n}{r} = \frac{-n(1-n)...(r-n-1)}{r!} = \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)}. \tag{2.20}$$

Après la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!$.
On définie la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}^{G}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) &= \lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.21}$$

La formule (2.21) définie la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f.

Maintenant nous allons à la dérivée fractionnaire d'ordre $-\alpha$:

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(+\alpha)} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si f est de classe C^k, alors en utilisant l'intégrale par parties de (2.21) et (2.22), on obtient :

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f^k(\tau) d\tau,$$

et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{k+\alpha-1} f^k(\tau) d\tau.$$

2.4.2 Dérivée fractionnaire d'une constante

Soit $0 < \alpha < 1$, nous concluons que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Latnikov d'une constante C, est donnée par :

$${}_a^G D_t^{\alpha}(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\alpha)^{-\alpha}.$$

2.4.3 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $\alpha > 0$ et f une fonction continue , l'intégrale fractionnaire au sens de Grünwald-Latnikov est définie par :

$${}^{GL} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{r=0}^{n} \binom{\alpha}{r} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau) d\tau.$$

Si f est de classe C^{n+1}, on a :

$${}^{GL} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}(a)}{\Gamma(\alpha+r+1)} (t-a)^{\alpha+r} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+r+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+n} f^{(n+1)}(\tau) d\tau. \tag{2.23}$$

2.5 Dérivée fractionnaire de $f(t) = (t-a)^{\beta}$

2.5.1 La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann Liouville ${}_a D_t^p f(t)$ de la fonction de puissance :

$$f(t) = (t-a)^{\nu},$$

où ν est un nombre réel .
Supposons que $n-1 \leq p < n$ et rappelons que par la définition de la dérivée de Riemann-Liouville :

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-p)} f(t)\right), \quad (n-1 \leq p < n). \tag{2.24}$$

En remplaçant par la formule (2.24) l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha = n-p$ de cette fonction.

$$ {}_aD_t^{-\alpha}\big((t-a)^\nu\big) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)}(t-a)^{\nu+\alpha},$$

on obtient :

$$ {}_aD_t^{p}\big((t-a)^\nu\big) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\nu-p}, \tag{2.25}$$

et la seule restriction pour$f(t) = (t-a)^\nu$ est son intégrabilité, à savoir $\nu > -1$.

2.5.2 La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Grünwald-Letnikov

Laissez-nous évaluer la dérivée fractionnelle de Grünwald-Letnikov ${}_aD_t^p f(t)$ de la fonction de puissance :

$$f(t) = (t-a)^\nu,$$

où ν est un nombre réel.
Nous commencerons par considérer les valeurs négatives de p, ce qui signifie que nous commencerons par l'évaluation de l'intégrale fractionnaire de l'ordre -p.
Utilisons la formule suivante :

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau,$$

on trouve :

$$ {}_aD_t^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\nu d\tau. \tag{2.26}$$

Supposons $\nu > -1$ convergence d'intégration. Nous remplaçons : $\tau = a + \xi(t-a)$ dans (2.26) . Ensuite, en utilisant la définition de la fonction Bêta (1.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{p}(t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{\nu-p}\int_0^1 \xi^\nu (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p,\nu+1)(t-a)^{\nu-p} \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-p+1)}(t-a)^{\nu-p}, \quad (p<0, \nu>-1). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Considérons maintenant le cas $0 \leq m \leq p < m+1$. Nous appliquons la formule suivante :

$$ {}_aD_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{2.28}$$

Nous devons exiger $\nu > m$ pour la convergence de l'intégrale dans(2.28) . Ensuite, nous avons :

$$ {}_aD_t^p(t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\nu}{d\tau^{m+1}}d\tau, \tag{2.29}$$

parce que tous les ajouts non-intégraux sont égaux à 0.
Compte tenu de :

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\nu}{d\tau^{m+1}} = \nu(\nu-1)...(\nu-m)(\tau-a)^{\nu-m-1} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu-m}(\tau-a)^{\nu-m-1}$$

et en effectuant la substitution $\tau = a+\xi(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p(t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}(\tau-a)^{\nu-m-1}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)B(-p+m-1,\nu-m)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\nu-p} \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)}(t-a)^{\nu-p}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

En notant que l'expression (2.30) est formellement identique à l'expression (2.27), nous concluons que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov dérivée fractionnaire de la fonction de puissance $f(t) = (t-a)^\nu$ est donnée par la formule :

$$ {}_aD_t^p(t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)}(t-a)^{\nu-p}, \tag{2.31}$$

$$(p<0, \nu>-1)\, ou\, (0 \le m \le p < m+1, \quad \nu > m)\,.$$

Nous reviendrons à la formule (2.31) pour la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov et fractionnaire dérivée de la fonction de puissance plus tard. Lorsque nous examinons d'autres moyens de différenciation fractionnaire. La formule sera la même, mais les conditions pour son applicabilité seront différentes.

2.6 Propriétés des dérivées fractionnaires

2.6.1 linéarité

De la même manière que la dérivation d'ordre entier, la différenciation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t), \tag{2.32}$$

ou D^α désigne la dérivée fractionnaire.

La linéarité de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Latnikov définie par la formule (2.21) , on a :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big) &= \lim_{h\to0} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r}(\lambda f(t-rh)+\mu g(t-rh)) \\ &= \lambda\lim_{h\to0} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r}f(t-rh) + \mu\lim_{h\to0} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{\alpha}{r}g(t-rh) \\ &= \lambda_a D_t^\alpha f(t) + \mu_a D_t^\alpha g(t). \end{aligned} \tag{2.33}$$

2.6.2 Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires :

Prenons deux fonctions $\varphi(t)$ et $\phi(t)$, et commencer par le savoir Leibniz pour évaluer le n-ème (n est entie) du produit de deux fonctions $\varphi(t)\phi(t)$:

$$\frac{d^n}{dt^n}\big(\varphi(t)\phi(t)\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(k)}(t)\phi^{(n-k)}(t), \tag{2.34}$$

où

$\dfrac{d^n}{dt^n}$ Cela signifie que la dérivée d'ordre entier.
En remplaçant l'entier n par un paramètre réel α dans le membre à droite de (2.34) à la formule :

$$_aD_t^{\alpha}\big(\varphi(t)\phi(t)\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\varphi^{(k)}(t)\,_aD_t^{\alpha-k}\phi(t) - R_n^{\alpha}(t), \tag{2.35}$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1}\phi(\tau)d\tau\int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi.$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} R_n^{\alpha}(t) = 0.$$

Si φ et ϕ avec toutes ses dérivées sont continues sur [a, t], la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$_aD_t^{\alpha}\big(\varphi(t)\phi(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\varphi^{(k)}(t)\,_aD_t^{\alpha-k}\phi(t).$$

D^{α} désigne la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov ou Riemann-Liouville. ■

Chapitre 3

Résultats de non-existence de solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires

Dans ce chapitre, on établit des conditions nécessaires de non-existence globale de solutions de problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta_1/2}u = |u|^{p_1}|v|^{q_1}+f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\beta_2/2}v = |u|^{p_2}|v|^{q_2}+g(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $p_i, q_i, \beta_i, i = 1,2$ sont des constantes telles que :

$$p_1 > 1, q_1 \geq 0, p_2 \geq 0, q_2 > 1, 0 < \alpha_i < 1, 1 \leq \beta_i \leq 2, \tag{A1}$$

Et

$$1 \leq N \leq \max\left\{\beta_1(p_1^{'} - \frac{1}{\alpha_1}), \beta_2(q_2' - \frac{1}{\alpha_2})\right\}. \tag{A2}$$

Escobedo et Herrero [15] prouvé que si $p_2q_1 > 1, p_1 = q_2 = 0$ et $(\gamma+1)/(p_2q_1-1) \geq N/2$ avec $\gamma = \max(p_2, q_1)$, alors la seule solution du problème (3.1) est le trivial, c'est à dire. $u \equiv v \equiv 0.$ Plus tard dans [14] Escobedo et Levine ont montré que si $p_1 \geq 1$ et $p_2 + q_2 \geq p_1 + q_1 > 0,$ alors le problème (3.1) se comporte comme le problème de Cauchy pour la seule équation $u_t - \Delta u = u^{p_1+q_1}$, par rapport aux théorèmes de éventuel d'explosion de type Fujita [7].

Les dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville sont liées par la relation (voir [19]) :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}u(t) = D^{\alpha}_{0|t}[u(t) - u(0)]. \tag{3.2}$$

Enfin, en tenant compte de la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_0^T \varphi(t)(D^{\alpha}_{0|t}u)(t)dt = \int_0^T (D^{\alpha}_{t|T}\varphi)(t)u(t)dt. \tag{3.3}$$

Nous multiplions la première équation par la fonction test φ_1 et effectuons l'intégration sur

(0,T) on trouve :

$$\int_0^T \varphi_1 \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u dt + \int_0^T \varphi_1 (-\Delta)^{\beta_1/2} u dt = \int_0^T \varphi_1 |u|^{p_1} |v|^{q_1} dt + \int_0^T \varphi_1 f(t,x) dt.$$

On utilise la relation (3.2) alors :

$$\int_0^T \varphi_1 D_{0|t}^{\alpha_1} [u(t) - u(0)] dt + \int_0^T \varphi_1 (-\Delta)^{\beta_1/2} u dt = \int_0^T \varphi_1 |u|^{p_1} |v|^{q_1} dt + \int_0^T \varphi_1 f(t,x) dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi_1 D_{0|t}^{\alpha_1} u(t) dt - \int_0^T \varphi_1 D_{0|t}^{\alpha_1} u(0) dt + \int_0^T \varphi_1 (-\Delta)^{\beta_1/2} u dt \\ = \int_0^T \varphi_1 |u|^{p_1} |v|^{q_1} dt + \int_0^T \varphi_1 f(t,x) dt.\end{aligned}$$

Définition :
Soit l'ensemble $Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N, 0 < T < +\infty$. On dit que (u,v) $\in (L^1_{loc}(Q_T))^2$ est une solution locale faible du problème (3.1) sur Q_T si $u^{p_i} v^{q_i} \in L^1_{loc}(Q_T), i = 1, 2$.

Nous utilisons l'intégrales par parties (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} u_0(x) D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1(t,x) dt dx + \int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1(x,t) dt dx + \int_{Q_T} f(t,x) \varphi_1(x,t) dt dx \\ = \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\beta_1/2} \varphi_1(x,t) dt dx + \int_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1(t,x) dt dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

De la même manière pour la deuxième équation :

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} v_0(x) D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2(t,x) dt dx + \int_{Q_T} |v|^{p_2} |u|^{q_2} \varphi_2(x,t) dt dx + \int_{Q_T} g(t,x) \varphi_2(x,t) dt dx \\ = \int_{Q_T} v(-\Delta)^{\beta_2/2} \varphi_2(x,t) dt dx + \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2(t,x) dt dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour toutes les deux fonctions tests $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ vérifiant $\varphi_1(x,T) = \varphi_2(x,T) = 0$.

Remarque :
Si $T = +\infty$, on dit que (u,v) est une solution faible globale de problème (3.1).
Théorème :
Soient $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tels que $u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$. Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) ont lieu $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} f(t,x) dt dx > 0$ et $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} g(t,x) dt dx > 0$.
Alors le problème (3.1) n'admet pas de solution globale faible.
Preuve :
La preuve se fait par contradiction. Supposons que (u,v) est une solution globale faible au problème (3.1). Puisque $u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$, puis $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} f(t,x) dt dx > 0$, $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} g(t,x) dt dx > 0$.

pour tout $t \in (0, T^*)$ où T^* désigne le temps éventuel d'explosion.

Soit T et θ deux nombres réels tels que $0 < T < T^*$ et $\theta = \min\left\{\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}, \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$. Soit $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$, une fonction régulière non croissante et non négative telle que :

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 2, \end{cases}$$

et $0 \leq \Phi(r) \leq 1$ pour tous $r \geq 0$, et

$$\Psi(s) = \begin{cases} (1-s)^\gamma & \text{si } 0 \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{si } s \geq 1, \end{cases}$$

où γ est un nombre réel positif si :

$$\max(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1) \leq 0.$$

Système de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires et $\gamma > \max(\alpha_1 p_1', \alpha_2 q_2' - 1)$ si :

$$\min(\alpha_1 p_1' - 1, \alpha_2 q_2' - 1) > 0,$$

où p_1' et q_2' sont les valeurs conjuguées de p_1 et q_2.
On choisit :

$$\varphi_i(t,x) = \phi^l(x)\psi(t), \quad i = 1, 2, \tag{3.6}$$

avec $\phi(x) = \Phi\left(\dfrac{|x|}{T^\theta}\right), \psi(t) = \Psi\left(\dfrac{t}{T}\right)$ et $l \geq \max\{p_1', q_2'\}$. On a :

$$D_{t|T}^{\alpha_i}\varphi_i(t,x) = \frac{\Gamma(1+\gamma)T^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_i)}\phi^l(x)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_i}. \tag{3.7}$$

On utilise l'inégalité Young , pour estimer le membre à droite de (3.4) sur

$$\Sigma = (0,T) \times \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2T^\theta\}$$

et pour les exposants conjugués p_1 et p_1' , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Sigma u D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 &= \int_\Sigma u v^{\frac{q_1}{p_1}} \varphi_1^{\frac{1}{p_1}} D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1 v^{\frac{-q_1}{p_1}} \varphi_1^{\frac{-1}{p_1}} \\ &\leq \varepsilon \int_\Sigma |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 + C(\varepsilon)\int_\Sigma |D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} \varphi_1^{\frac{-p_1'}{p_1}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Sigma u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1 &= \int_\Sigma u v^{\frac{q_1}{p_1}} \varphi_1^{\frac{1}{p_1}} ((-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1) v^{\frac{-q_1}{p_1}} \varphi_1^{\frac{-1}{p_1}} \\ &\leq \varepsilon \int_\Sigma |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 + C(\varepsilon)\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} \varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donc, à partir des équations, (3.4), (3.8), (3.9), nous obtenons :

$$\int_\Sigma f(t,x)\varphi_1 dtdx + (1-2\varepsilon)\int_\Sigma |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx \leq C.A_1 \tag{3.10}$$

avec

$$A_1=\int_\Sigma |D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{-p_1'}{p_1}}+\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx.$$

Pour qu'ils convergent

$$1-2\varepsilon>0$$

c'est-à-dire :

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

D'une manière analogue, Pour estimer le membre (3.5) alors :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma vD^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2(t,x)dtdx &= \int_\Sigma vu^{\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{\frac{1}{q_2}}D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2u^{-\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{1}{q_2}}dtdx\\ &\le \varepsilon\int_\Sigma |v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2+C(\varepsilon)\int_\Sigma |D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx \qquad (3.11)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Sigma v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2dtdx &= \int_\Sigma vu^{\frac{p_2}{q_2}}(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2u^{-\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{1}{q_2}}dtdx\\ &\le \varepsilon\int_\Sigma |v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2+C(\varepsilon)\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx \qquad (3.12)\end{aligned}$$

à partir des équations (3.5), (3.11), (3.12), on obtient :

$$\int_\Sigma g(t,x)\varphi_2dtdx+(1-2\varepsilon)\int_\Sigma |v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx\le C.A_2 \qquad (3.13)$$

avec

$$A_2=\int_\Sigma |D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx+\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx.$$

Qui converge pour :

$$1-2\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire :

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

Considérons le changement de variables suivant :

$$t=T\tau,\quad x=T^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\xi,\quad dt=Td\tau,\quad dx=T^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}N}d\xi,$$

et utilisons (3.7) et l'inégalité $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi^l\le l\phi^{l-1}(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi$ (voir [18]).
Maintenant, nous estimons les deux intégrales dans le membre à droite de (3.10) , nous utilisons la relation (3.6)

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx &= \int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi^l(x)\psi(t)|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx\\ &\le \int_\Sigma |l\phi^{l-1}(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

On sait que :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_N^2}$$

et

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \times \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{T^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} \times \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial\xi_1} \times \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \times \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)\\ &= \frac{1}{T^{\frac{2\alpha_1}{\beta_1}}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_1^2}\\ &= T^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_1^2},\end{aligned}$$

il vient :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = T^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_2^2}, ..., \frac{\partial^2\phi}{\partial x_N^2} = T^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_N^2}$$

donc :

$$\Delta\phi = T^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_2^2} + ... + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_N^2}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\phi = T^{-\frac{2\alpha_i}{\beta_i}}\Delta_\xi\phi \quad i, j = \{1, 2\}.$$

Alors :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi = T^{-\alpha_i}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi.$$

Par substitution, dans (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx &\leq \int_\Sigma |l\phi^{l-1}T^{-\alpha_1}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}T^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N+1}d\tau d\xi\\ &= T^{-\alpha_1 p_1' + \frac{\alpha_1}{\beta_1}N+1}\int_\Sigma |l\phi^{l-1}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}d\tau d\xi.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Maintenant, nous estimons l'intégrale suivante :

$$\int_\Sigma |D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{-p_1'}{p_1}}.$$

Dans (3.7), nous avons :

$$\begin{aligned}D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_1(t,x) &= \frac{\Gamma(1+\gamma)T^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_1)}\phi^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_1}\\ &= \frac{\Gamma(1+\gamma)T^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_1)}\Phi^l\left(\frac{|x|}{T^\theta}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_1}\end{aligned}$$

et pour

$$\Sigma = (0,T) \times \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2T^\theta\},$$

on a :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1(t,x) &\leq \frac{\Gamma(1+\gamma)T^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_1)}\Phi^l\left(\frac{2T^\theta}{T^\theta}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_1} \\
&= \frac{\Gamma(1+\gamma)T^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha_1)}\Phi^l(2)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-\alpha_1} \\
&= 0. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

De (3.15) et (3.16), on trouve :

$$\int_\Sigma f(t,x)\varphi_1 dtdx + (1-2\varepsilon)\int_\Sigma |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx \leq CT^{-\gamma_1}. \qquad (3.17)$$

Où

$$\gamma_1 = \alpha_1 p_1' - \frac{\alpha_1}{\beta_1}N - 1.$$

De la même manière , nous estimons les deux intégrales dans le membre à droite de (3.13) :

$$\int_\Sigma g(t,x)\varphi_2 dtdx + (1-2\varepsilon)\int_\Sigma |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx \leq CT^{-\gamma_2}, \qquad (3.18)$$

avec

$$\gamma_2 = \alpha_2 q_2' - \frac{\alpha_2}{\beta_2}N - 1.$$

Maintenant, Dans le cas $\gamma_i > 0, i = 1,2.$ $(N < N^*)$ Passons à la limite dans (3.17) et (3.18) quand T tend vers l'infini, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi_1 dtdx + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx = 0$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} g(t,x)\varphi_2 dtdx + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx = 0.$$

En utilisant le théorème de convergence dominé et la continuité en temps et en espace de u et v, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} f(t,x)dtdx + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_1}|v|^{q_1} = 0, \qquad (3.19)$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} g(t,x)dtdx + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_2}|v|^{q_2} = 0. \qquad (3.20)$$

De l'équation (3.19) on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} f(t,x) = 0 \qquad (3.21)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_1}|v|^{q_1} = 0$$

et de l'équation (3.20) on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} g(t,x) = 0 \tag{3.22}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_2}|v|^{q_2} = 0.$$

Cela implique que (3.21) ou (3.22) est une contradiction.

Dans le cas $\gamma_i = 0, i = 1,2.$ ($N = N^*$) On modifie la fonction précédente ϕ en introduisant un nouveau membre $R, 0 < R < T$, tel que :

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{(T/R)^\theta}\right)$$

et nous fixons :

$$\Sigma_R = (0,T) \times \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2(T/R)^\theta\},$$
$$\Delta_R = (0,T) \times \{x \in \mathbb{R}^N : (T/R)^\theta \leq |x| \leq 2(T/R)^\theta\}.$$

Puisque, à partir de (3.17) et (3.18) on constate que :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi_1 + \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 \leq C,$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} g(t,x)\varphi_2 + \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 \leq C.$$

Ensuite nous avons :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Delta_R} f(t,x)\varphi_1 dtdx + \int_{\Delta_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx = 0 \tag{3.23}$$

ou

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Delta_R} g(t,x)\varphi_2 dtdx + \int_{\Delta_R} |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx = 0. \tag{3.24}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Hölder, respectivement dans la première et la deuxième intégrales de la partie droite de la formulation (3.4) sur Σ_R, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_R} u|D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|dtdx &= \int_{\Sigma_R} uv^{\frac{q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{1}{p_1}}|D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|v^{\frac{-q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{-1}{p_1}}dtdx \\ &\leq \varepsilon\int_{\Sigma_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx + C(\varepsilon)B_1,\end{aligned} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_R} u|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|dtdx &= \int_{\Sigma_R} uv^{\frac{q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{1}{p_1}}|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|v^{\frac{-q_1}{p_1}}\varphi_1^{\frac{-1}{p_1}}dtdx \\ &\leq \left(\int_{\Sigma_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx\right)^{\frac{1}{p_1}}.C_1,\end{aligned} \tag{3.26}$$

où
$$B_1=\int_{\Sigma_R}|D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}|\varphi_1|^{\frac{-p_1'}{p_1}}dtdx,$$
et
$$C_1=\left(\int_{\Delta_R}|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}|\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx\right)^{\frac{1}{p_1'}}.$$
Donc, à partir des équations,(3.4) , (3.25) et (3.26), nous obtenons :
$$\int_{\Delta_R}f(t,x)\varphi_1dtdx+(1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1dtdx\leq C.B_1+\left(\int_{\Delta_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.C_1, \tag{3.27}$$
qui converge pour :
$$1-\varepsilon>0,$$
c'est-à-dire :
$$\varepsilon<1.$$
De la même manière, on obtient via la formulation (3.5) la prochaine estimation :
$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_R}v|D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2(t,x)|dtdx &= \int_{\Sigma_R}vu^{\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{\frac{1}{q_2}}|D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2|u^{-\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{1}{q_2}}dtdx\\ &\leq \varepsilon\int_{\Sigma_R}|v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx+C(\varepsilon)B_2\end{aligned} \tag{3.28}$$
et
$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_R}v|(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2|dtdx &= \int_{\Sigma_R}vu^{\frac{p_2}{q_2}}(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2u^{-\frac{p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{1}{q_2}}dtdx\\ &\leq \left(\int_{\Sigma_R}|v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx\right)^{\frac{1}{q_2}}.C_2,\end{aligned} \tag{3.29}$$
où
$$B_2=\int_{\Sigma_R}|D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx,$$
et
$$C_2=\left(\int_{\Delta_R}|(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2|^{q_2'}|u|^{-\frac{q_2'p_2}{q_2}}\varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}}dtdx\right)^{\frac{1}{q_2'}}.$$
Donc, à partir des équations,(3.5) , (3.28) et (3.29), on obtient :
$$\int_{\Delta_R}g(t,x)dtdx+(1-\varepsilon)\int_{\Sigma}|v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx\leq C.B_2+\left(\int_{\Delta_R}|v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx\right)^{\frac{1}{q_2}}.C_2 \tag{3.30}$$
qui converge pour :
$$\varepsilon<1.$$
Nous introduisons le changement de variables :
$$t=T\tau,\quad x=(T/R)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\xi,\quad dt=Td\tau,\quad dx=(T/R)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}N}d\xi$$

dans B_i et $C_i (i = 1, 2)$. Maintenant, nous estimons les deux intégrales dans le membre à droite de (3.27) :

nous estimons l'intégrale suivant :

$$B_1 = \int_{\Sigma_R} |D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} |\varphi_1|^{\frac{-p_1'}{p_1}} dtdx,$$

donc

$$B_1 = T(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N} \int_{\Sigma_R} |D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} |\varphi_1|^{\frac{-p_1'}{p_1}} d\tau d\xi,$$

alors :

$$B_1 = T(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N} C. \tag{3.31}$$

Maintenant, nous estimons l'intégrale suivant :

$$C_1 = \left(\int_{\Delta_R} |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_1'}}.$$

Nous utilisons la relation (3.6) :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_R} |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} \varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}} dtdx &= \int_{\Delta_R} |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \phi^l(x)\psi(t)|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} \varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}} dtdx \\ &\leq \int_{\Delta_R} |l\phi^{l-1}(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \phi\psi|^{p_1'} |v|^{\frac{-p_1' q_1}{p_1}} \varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}} dtdx. \end{aligned} \tag{3.32}$$

On sait que :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_N^2}$$

et

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{\partial\phi}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} \times \frac{\partial\phi}{\partial \xi_1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right) \\ &= \frac{1}{(T/R)^{\frac{2\alpha_1}{\beta_1}}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_1^2} \\ &= (T/R)^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_1^2}, \end{aligned}$$

il vient :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = (T/R)^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \times \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_2^2}, ..., \frac{\partial^2\phi}{\partial x_N^2} = (T/R)^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_N^2}$$

donc :

$$\Delta\phi = (T/R)^{-\frac{2\alpha_1}{\beta_1}} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_2^2} + ... + \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi_N^2} \right),$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\phi = (T/R)^{-\frac{2\alpha_i}{\beta_i}}\Delta_\xi\phi \quad i,j=\{1,2\}.$$

Alors :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi = (T/R)^{-\alpha_i}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi.$$

Par substitution, dans (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_R}|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1}{p_1}}dtdx &\leq \int_{\Delta_R}|l\phi^{l-1}(T/R)^{-\alpha_1}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1^{'}q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1^{'}}{p_1}}(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}Td\tau d\xi\\ &= (T/R)^{-\alpha_1p_1'+\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}T\int_{\Delta_R}|l\phi^{l-1}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}d\tau d\xi\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}C_1=\left(\int_{\Delta_R}|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}dtdx\right)^{\frac{1}{p_1'}} &\leq \left((T/R)^{-\alpha_1p_1'+\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}T.C'\right)^{\frac{1}{p_1'}}\\ &= \left((T/R)^{\frac{1}{p_1'}\left(-\alpha_1p_1'+\frac{\alpha_1}{\beta_1}N\right)}T^{\frac{1}{p_1'}}.C'\right) \qquad (3.33)\end{aligned}$$

avec :

$$C' = \int_{\Delta_R}|l\phi^{l-1}(-\Delta_\xi)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi\psi|^{p_1'}|v|^{\frac{-p_1'q_1}{p_1}}\varphi_1^{-\frac{p_1'}{p_1}}d\tau d\xi.$$

par substitution de (3.31) et (3.33) dans (3.27) , il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_R}f(t,x)\varphi_1dtdx &+ (1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1dtdx\\ &\leq \left((T/R)^{\frac{1}{p_1'}\left(-\alpha_1p_1'+\frac{\alpha_1}{\beta_1}N\right)}T^{\frac{1}{p_1'}}.C'\right)\left(\int_{\Delta_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1\right)^{\frac{1}{p_1}}+T(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}C.\end{aligned}$$

En appliquant (3.23) à la dernière expression :

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_R}f(t,x)\varphi_1dtdx+(1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1dtdx &\leq T(T/R)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}.C\\ &= C.T^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}N+1}\times R^{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}N}\end{aligned}$$

donc :

$$\int_{\Delta_R}f(t,x)\varphi_1dtdx+(1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1dtdx \leq C.R^{-\gamma_1^{'}}. \qquad (3.34)$$

De la même manière , nous estimons les deux intégrales dans le membre à droite de (3.30) :

$$\int_{\Delta_R}g(t,x)dtdx+(1-\varepsilon)\int_{\Sigma}|v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2dtdx \leq C.R^{-\gamma_2^{'}} \qquad (3.35)$$

où

$$\gamma_i^{'}=\frac{\alpha_i}{\beta_i}N \quad i=1,2.$$

On fait tendre R vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_{\Delta_R} f(t,x)\varphi_1 dtdx + (1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx \leq 0, \tag{3.36}$$

et

$$\int_{\Delta_R} g(t,x)\varphi_2 dtdx + (1-\varepsilon)\int_{\Sigma} |v|^{q_2}|u|^{p_2}\varphi_2 dtdx \leq 0. \tag{3.37}$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée et la continuité en temps et en espace de u et v, on en déduit que :

$$\int_{\Delta_R} f(t,x) dtdx + (1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1} dtdx \leq 0, \tag{3.38}$$

et

$$\int_{\Delta_R} g(t,x) dtdx + (1-\varepsilon)\int_{\Sigma_R} |v|^{q_2}|u|^{p_2} dtdx \leq 0. \tag{3.39}$$

De l'équation (3.38), on arrive :

$$\int_{\Delta_R} f(t,x) dtdx = 0, \tag{3.40}$$

et

$$\int_{\Sigma_R} |u|^{p_1}|v|^{q_1} = 0.$$

Et de l'équation (3.39) on arrive :

$$\int_{\Delta_R} g(t,x) dtdx = 0, \tag{3.41}$$

et

$$\int_{\Sigma_R} |v|^{q_2}|u|^{p_2} = 0.$$

L'une des inégalités (3.40) ou (3.41) est une contradiction avec les hypothèses. C'est-à-dire que le système (3.1) n'admet pas de solution globale. ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la non-existence globale de solutions d'équations différentielles d'ordre non entier pour un problème de Cauchy basées sur les fonctions tests et les changements de variables.

On peut étendre notre travail à un problème plus général de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\big(|u|^{m-1}u\big) = |u|^{p_1}|v|^{q_1} + f(t,x), \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\beta_2/2}\big(|v|^{m-1}v\big) = |u|^{p_2}|v|^{q_2} + g(t,x), \end{cases}$$

avec des conditions appropriées sur les fonctions f et g.

Annexe

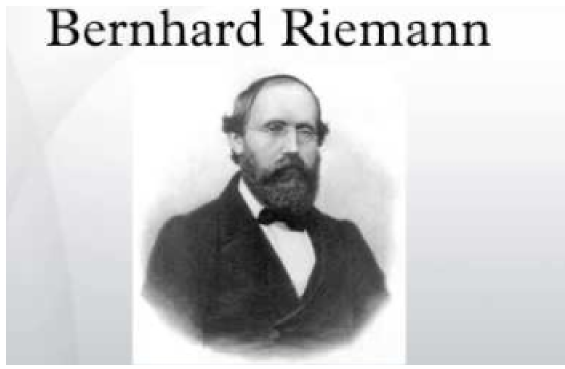


FIGURE 3.1 – Georg Friedrich Bernhard Riemann

Né le 17 septembre 1826 à Breselenz
État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca

Riemann est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Riemann a tenu ses premières conférences en 1854, qui ont fondé le domaine de la géométrie riemannienne et ont ainsi mis en scène la théorie de la relativité général d'Albert Einstein. Il y eut en 1857 une tentative de promouvoir Riemann au statut de professeur extraordinaire à l'Université de Göttingen. Bien que cette tentative ait échoué, Riemann a finalement obtenu un salaire régulier. En 1859, à la suite de la mort de Dirichlet, il a été promu à la tête du département de mathématiques de l'Université de Göttingen. Il fut également le premier à suggérer d'utiliser des dimensions supérieures à trois ou quatre pour décrire la réalité physique.
Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de Riemann. Il approfondira cette théorie en 1857, en faisant progresser la théorie des fonctions abéliennes.

FIGURE 3.2 – Joseph Liouville

Né le 24 mars 1809 et est décédé le 8 septembre 1882. Il est un mathématicien français.
Joseph est diplômé de l'École polytechnique en 1827. Après avoir travaillé pendant plusieurs années dans plusieurs institutions, telles que l'école centrale de Paris, il est retourné à l'École polytechnique en tant que professeur en 1838.
Liouville fut le premier à lire les travaux inédits d'Évariste Galois, en reconnut l'importance et les publia dans son journal en 1846. Le mathématicien Olry Terquem fut l'un des célèbres auteurs de son journal.

Bibliographie

[1] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujllo. Elements of Function Theory and Functional Analysis. Bysshaya Shkola, Moscow, 1970

[3] A. Erdélyi (ed.), Higher Transcendental Functions, vol.3, McGraw-Hill, New York, 1955.

[4] A.Ouahab, Calcul fractionnaire, Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbès.

[5] B.H. (2010). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science Business Media.

[6] E.A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[7] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I(13)(1966), $109\breve{}124.$

[8] H, M et al. "Serial diffusion tensor imaging to characterize radiation-induced changes in normal-appearing white matter following radiotherapy in patients with adult low-grade gliomas." Radiation medicine$26.3(2008) : 140.$

[9] I. Podlubny, FractionalDifferentialEquations,Academic Press, San Diego-BostonNew York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[10] J.W. Thomas. Numerical partial differential equations. Springer-Verlag, 2010.

[11] K. Hayakawa. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. Proc Japan Acad $49(1973), 503 - 505.$

[12] K. S. Cole, Electric conductance of biological systems, Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, 1 (1993), 107-116.

[13] M. Benchohra and F. Ouaar, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Bullten Of Mathematical analysis and Applications,Vol. 2 issue4, pp.$7 - 15, (2010).$

[14] M. Escobedo and H.A. Levine, Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Arch. Rational. Mech. Anal. $129(1)(1995), 47 - 100.$

[15] M. Escobedo and M.A. Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion equation, J. Diff. Equ. 89(1)(1991), 176-202.

[16] M. Fila, H.A. Levine and Y. Uda, A Fujita-type global existence - global nonexistence theorem for a system of reaction diffusion equations with differing diffusivities, Math. Methods Appl. Sci. 17(1)(1994), 807-835.

[17] M. Kirane,Y. Laskri and N.E.Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 312(2)(2005), 488-501.

[18] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasigeostrophic equations, Comm. Math. Phys.$255(1)(2005), 161\breve{}181.$

[19] B.Rebiai, S.Rouar, and K.Haouam. "Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives." Global Journal of Pure and Applied Mathematics 12.6 (2016) : 5343-5351

[20] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA, 2000.

[21] R. Ikehata and K.Tanizawa. Global existence of solution for semilinear damped wave equation in RN with noncompactly supported initial data. Nonlinear Anal TMA. $61(2005), 1189-1208.$

[22] R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.

[23] S.G, Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[24] S. Zheng, Global existence and global non-existence of solutions to a reactiondiffusion system, Nonlinear Anal. 39(3)(2000), 327-340.

[25] T. F. Nonnenmacher and R. Metzler. On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications. Fractals.$3(1995), 557-666.$

[26] Y. Yamauchi, Blow-up results for a reaction-diffusion system, Methods Appl. Anal. 13(4)(2006), 337-350.

بعض نتائج لعدم وجود الحلول الشاملة والجمل التفاضلية الكسرية

ملخص

الهدف من هذا العمل هو البحث عن الشروط اللازمة لعدم وجود حلول العالمية لمشكلة كوشي لمعادلة التفاضلية كسرية الغير خطية باستخدام الصيغ الضغيفة

الكلمات المفتاحية:

مشتق كسور كابيتو, مشتق كسور ريمان ليوفيل, صيغ الضعيفة, دوال اختبار.

Some results of global non-existence of solutions of equations and differential systems fractional

Abstract

The aim of this work is the search for the necessary conditions of global non-existence of solutions of a Cauchy problem for a nonlinear fractional differential equation by using variational formulations based on the test functions.

***Keywords*:**

Fractional Derivative of Caputo, Fractional Derivative of Riemann-Liouville,Variational formulation, Test function.

Quelques résultats de non-existence globale de solutions d'équations et de systèmes différentiels fractionnaires

Résumé

Le but de ce travail est la recherche des conditions nécessaires de non-existence globale de solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire en utilisant des rmulations variationnelles basées sur les fonctions tests.

***Mots clés*:**

Dérivée fractionnaire de Caputo, Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. Formulation variationnelle, fonction test.