Quelques résultats de non-existence globale de solutions d'équations et de systèmes différentiels fractionnaires

BOUCHRA Azzaoui

BRAHIM Tellab(encadreur)

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
bouchraa740@gmail.com

Résumé

Le but de ce travail est la recherche des conditions nécessaires de non-existence globale de solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire en utilisant des formulations variationnelles basées sur les fonctions tests. .

Mots Clés : Dérivée fractionnaire de Caputo, Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. formulation variationnelle, fonction test.

1. Introduction

Kirane et al. [1] ont considéré le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta_1/2}u = |v|^{q_1}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\beta_2/2}v = |u|^{p_2}, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $0 < \alpha_i < 1$ et $1 \leq \beta_i \leq 2$.
ils ont prouve que, si $q_1 > 1, \quad p_2 > 1, \quad q_1q_1^{'} = q_1 + q_1^{'}, \quad p_2p_2^{'} = p_2 + p_2^{'}$ et
$1 \leq N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2}+\alpha_1-(1-\frac{1}{p_2q_1})}{\frac{\alpha_2}{\beta_2p_2q_1'}+\frac{\alpha_1}{\beta_1p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{q_1}+\alpha_2-(1-\frac{1}{q_1p_2})}{\frac{\alpha_1}{\beta_1q_1p_2'}+\frac{\alpha_2}{\beta_2q_1'}} \right\}$, où $q_1^{'}$ et $p_2^{'}$ sont les exposants conjugués de q_1 et p_2, respectivement, alors le problème (1.1) n'admit pas de solution globale non négative.

Dans [4], Rebiai et Haouam ont établi des résultats de non-existence plus généraux que le résultat intéressant obtenu dans [1].

Dans ce travail, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta_1/2}u = |u|^{p_1}|v|^{q_1}+f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\beta_2/2}v = |u|^{p_2}|v|^{q_2}+g(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $p_i, q_i, \beta_i, i = 1, 2$ sont des constantes telles que :
$p_1 \geq 0, q_2 \geq 0, p_2 \geq 1, q_1 > 1, 0 < \alpha_i < 1, 1 \leq \beta_i \leq 2,$
$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}$ (resp. $\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}$) désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre α_1 (resp. α_2) au sens de Caputo

$(-\Delta)^{\beta_1/2}$ (resp. $(-\Delta)^{\beta_2/2}$) sont les Laplaciens fractionnaires d'ordre $\frac{\beta_1}{2}$ (resp. $\frac{\beta_2}{2}$)
pour cela nous utilisons :

2. Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions de base sur le calcul fractionnaire qui peuvent être trouvés dans [5] [1] [4]

Définition 2.1 *La dérivée fractionnaire à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemann-Liouville pour $\phi \in L^1(0,T)$ et $0 < \alpha < 1$ sont définies respectivement par :*

$$D^{\alpha}_{0|t}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\phi(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma,$$

et

$$D^{\alpha}_{t|T}\phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^T \frac{\phi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma,$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler

Définition 2.2 *La dérivée fractionnaire à gauche et la dérivée à droite au sens de Caputo pour $\phi^{'} \in L^1(0,T)$ et $0 < \alpha < 1$ sont définies respectivement par :*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\phi^{'}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma,$$

et

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{t|T}\phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T \frac{\phi^{'}(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma,$$

La relation entre les dérivés de Caputo et de Riemann-Liouville s'écrit comme suit :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}u(t) = D^{\alpha}_{0|t}[u(t) - u(0)]. \tag{2.1}$$

La formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville est donnée par :

$$\int_0^T \varphi(t)(D^{\alpha}_{0|t}u(t))(t)dt = \int_0^T (D^{\alpha}_{t|T}\varphi)(t)u(t)dt \tag{2.2}$$

3. Énoncé des résultats

Dans cette section, on établit des conditions nécessaires de non-existence globale de solutions de problème de Cauchy (1.2)

Théorème 3.1 *Soit $p_1, q_1 \geq 0$ et $p_2, q_1 \geq 1$. Supposons que $\int_{R_+\times\mathbb{R}^N} f(t,x)dtdx > 0$ et $\int_{R_+\times\mathbb{R}^N} g(t,x)dtdx > 0$. Si*

$$N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2}+\alpha_1-\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2p_2q_1'}+\frac{\alpha_1}{\beta_1p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{p_1}+\alpha_2-\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1p_2'q_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2p_1'}} \right\},$$

alors le problème (1.2) n'admit pas de solution globale faible.

Idée de la démonstration :

- La démonstration se fait par contradiction

- Grâce aux formules (2.1) et (2.2), et pour toutes fonctions tests $\varphi_i \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T)$ telles que $\varphi_i(T,x) = 0$, $i = 1, 2$, et après intégrations sur Q_T avec quelques manipulations on trouve les formulations variationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_0(x)D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1(t,x)dtdx + \int_{Q_T}|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1(x,t)dtdx + \int_{Q_T}\varphi_1(x,t)f(t,x)dtdx \\ = \int_{Q_T} u\varphi_1(-\Delta)^{\beta_1/2}dtdx + \int_{Q_T} uD^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1(t,x)dtdx, \end{aligned} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} v_0(x)D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2(t,x)dtdx + \int_{Q_T}|v|^{p_1}|u|^{q_1}\varphi_2(x,t)dtdx + \int_{Q_T}\varphi_2(x,t)g(t,x)dtdx \\ = \int_{Q_T} v\varphi_2(-\Delta)^{\beta_1/2}dtdx + \int_{Q_T} vD^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2(t,x)dtdx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

- En utilisant des changements de variables sur les fonctions φ_i on trouve un exposant critique $N^{\star}$, ceci nous permet de distinguer deux cas : $N = N^{\star}$ et $N < N^{\star}$.

- Finalement, on arrive à une contradiction dans chaque cas ce qui nous permet de conclure notre résultat de non-existence.

Références

[1] M. Kirane,Y. Laskri and N.E.Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 312(2)(2005), 488501.

[2] M. Kirane and N.E.Tatar, Nonexistence of solutions to a hyperbolic equation with a time fractional damping. J. anal. Appl. 25(2006), 131-142.

[3] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, New York,1999.

[4] B. Rebiai and K. Haouam, Nonexistence of global solutions to a nonlinear fractional reaction-diffusion system, IAENG Int. J. Appl. Math., 45(4)(2015), 259262.

[5] I. Podlubny, Fractional Differential Equations,Academic Press, San Diego-Boston-NewYork-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[6] S. Zhang, Global existence and global nonexistence of solution to a reaction-diffusion system, Nonlinear Anal. 39(3)(2002),327-340.