RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH – OUARGLA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES POUR L'OBTENTION
D'UN DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE FONCTIONNELLE

Présenté par :

AIT-AMEDJKANE MED-SAID

Thème

FACTORISATION DES OPÉRATEURS SOUS LINAIRES p-SOMMANTS PAR CERTAINS ESPACES DE BANACH

Soutenue Publiquement le Juin 2019 devant le jury

Mr. TALLAB BRAHIM	MC B	UKM – OUARGLA	Président
Mr. BADIDJA SALIM	MC B	UKM – OUARGLA	Rapporteur
Mr. ASSILA MUSTAPHA	MC B	UKM – OUARGLA	Examinateur
Mr. AMARA ABDELKADER	MC B	UKM – OUARGLA	Examinateur

Année Universitaire 2018 / 2019

ملخص

تعتبر عملية التفكيك طريقة أساسية في نظرية المؤثرات و بها تتم دراسة الخصائص الطبولوجية و إيجاد الحلول لبعض المعادلات في التحليل الدالي .

في هذه المذكرة نقدم بعض الطرق و النظريات الأساسية في عملية التفكيك لمجموعة من المؤثرات و التي تعرف بـ :

Factorisation des opérateurs sous linéaires p−sommants par certains espaces de Banach

هذه النظريات تتمثل في متراجحات شهيرة وهي تعتبر الشروط اللازمة و الأساسية في عملية تفكيك المؤثرات.

الكلمات المفتاحية : فضاء بناخ ، فضاء ريز ، تفكيك المؤثرات ، نظرية موريي Théorème B. Maurey و نظرية Théorème de Pietcsh

Resumé

La factorisation est un procédé essentiel en théorie des opérateurs qui permet d'étudier les propriétés topologiques et de résoudre des questions fondamentales en théorie des fonctions et équations fonctionnelles.

Nous présentons dans ce mémoire les méthodes et théories principales de factorisation d'une classe d'opérateurs sous linéaires p−sommants par certains espaces de Banach. Nous avons commencé par les théorèmes principaux de Maurey de factorisations des opérateurs linéaires entre espaces de Banach et espaces réticulés. Les inégalités de Khintchine, les notions de p−convexité et q−concavité sont les clés de la factorisation, ensuite nous avons abordé les opérateurs p−sommants axe de notre recherche qui constituent une classe d'opérateurs bornés factorisables par des conditions affaiblies du théorème central de Pietsch.

Mots clés : Espaces de Banach , Espaces Réticulés , Espace de Köthe , Factorisation des Opérateurs , Théorème de Pietsch et Théorème de Maurey.

Abstract

Factoring is an essential process in the theory of operators that makes it possible to study topological properties and solve the fundamental questions in theory of functional functions and equations.

We present in the memories the methods and theories of factorization in class of sub linear operators p−summed by some Banach spaces.

The linear operators forming the basis and starting point of our work. Khintchin inequalities and notions of p−convexity and concavity are the keys to factorization.

P−summants form the sub linear operators and factorisables by weakened conditions of the central theorem of Pietsch equality.

Key words : Banach spaces, Riecz spaces, reticulated spaces, Köthe space, factoriza−tion of operators, Pietsch theorem and Maurey theorem.

Remerciements

Je remercie d'abord Dieu le tout puissant pour le destin qu'il m'a réservé et la volonté qu'il m'a accordé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur et enseignant de GEB (Géométrie des espaces de Banach) Monsieur **BADIDJA SALIM** pour l'accueil fraternel et l'aide précieuse qu'il m'a apporté durant toute l'année. Je le remercie vivement pour sa sympathie, sa confiance, sa disponibilité et ses précieux conseils ainsi que toutes ses discussions enrichissantes.

J'exprime mes sincères reconnaissances et remerciements à tous les membres de jury en l'occurrence Monsieur **TALLAB BRAHIM** président de jury , Monsieur **BADIDJA SALIM** mon encadreur, Monsieur **ASSILA MUSTAPHA** et Monsieur **AMARA ABDELKADER** examinateurs, je les remercie tous pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et leur contribution à la validation de ce mémoire.

Je présente également mes sincères reconnaissances et remerciements à tout l'encadrement de l'université **KASDI MERBAH D'OUARGLA (département et administration)** pour l'accueil continu, la prise en charge et les moyens mis à notre disposition pour achever notre formation.

Je remercie tout le personnel de la bibliothèque pour l'accueil et la documentation mise à ma disposition pour achever mon travail.

J'exprime mes sincères et vifs remerciements à Monsieur NAKMOUCHE Rabah du Département d'électronique de l'Université AMAR TELIDJI DE LAGHOUAT et Chef de Service au niveau de la Direction de Maintenance (DML) de Laghouat pour son aide particulière en matière de Latex.

Je n'oublierai jamais les étudiants de ma promotion qui m'ont accompagné durant ce pénible parcours, je les remercie tous pour leur soutien moral et encouragement.

Table des matières

Sommaire des abréviations

$\mathcal{L}(X,Y)$: espace vectoriel des opérateurs linéaires de X dans Y
$L(X,Y)$: espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans Y
$C([a,b])$: l'espace vectoriel des fonctions continues sur$[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$
$C([0,1]\,\mathbb{R}) = \{f\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\}$
$C_b^{\infty}(\mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R})\ , \exists M \geq 0$ et $\lvert f(t)\rvert \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}\}$ C'est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiable et bornées sur $\mathbb{R}$
$C(K) = \{f\ :\ K \longrightarrow \mathbb{R},$ f continue et $\mathbb{K}$ compact $\}$
Espace mesurable : le couple (E,M) avec M une Tribu sur E
Espace Mesuré : le triplet (E,M,μ), M tribu sur E et μ une mesure positive
$L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ espace de fonctions localement intégrables sur Ω à valeurs réelles
$L_E^0(\mu) = \{f\ :\ E \longrightarrow F$, mesurable avec f un classe d'équivalence de fonctions $\}$
$L_p(\mu) = \left\{ f \in L_E^0\ ,\ \left\lVert f \right\rVert_p = \left(\int_E \left\lvert f \right\rvert^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$
$L_\infty(\mu) = \ \left\{ f \in L_E^0\ ,\ \exists M > 0\ ;\ \lvert f(x)\rvert\ \leq M\ \ pp \right\}$: c'est l'espace de fonctions essentiellement bornées
B_{X^*} : la boule unité du dual topologique de X
$SL(X,Y) = \{\ T\ :\ \ X\ \ \longrightarrow Y$, application sous linéaires $\}$ muni d'une relation d'ordre induit par Y, $T_1 \leq T_2 \iff T_1(x) \leq T_2(x)\ \ x \in X$.
$\nabla T\ =\ \{u\ :\ \ X\ \ \longrightarrow Y$ linéaire tel que $u(x) \leq T(x)$ pour tout $x \in X\}$. ∇T : ensemble des opérateurs linéaires bornés $\leq T$
$\pi_p(X\ ,Y) = \{T$ Sous lineaires P- sommants$\}$ $\pi_p(T) = inf\ \{C > 0$ verifiant la definition $\}$

X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$, on note par :

$$X\left(l_p^n\right) = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \ldots.., x_n\right) \subset X, \ \left\|x\right\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\{ \begin{array}{lll} \left\| \sum_1^n \left(\left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\| & \text{si} & p < \infty \\ \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} \left|x_i\right| \right\| & \text{si} & p = \infty \end{array} \right\} \right.$$

L'espace $X\left(l_p^n\right)$ est doté d'un ordre naturel $x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i$.

X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$, on note par :

$l_p(X)\left(\text{ respectivement } l_p^n(X)\right)$: l'espace des suites $\left(x_i\right)$ $\left(\text{ resp } \left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}\right)$ dans X muni de la norme.

$$l_p(X) = \left\{ \left(x_i\right) \subset X, \left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p(X)} = \left(\sum_1^\infty \left\|x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$l_p^n(X) = \left\{ \left(x_i\right) \subset X, \left\|\left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_p(X)} = \left(\sum_1^n \left\|x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$l_p^w(X)$ *et* $l_p^{w,n}(X)$ l'espace des suites $\left(x_i\right)$ $\left(\text{ resp } \left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}\right)$ dans X muni de la norme :

$$\left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p^w(X)} = sup_{\|\xi\|_{X^*}} \left(\sum_1^\infty \left|< x_i, \xi >\right|^p\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p^{w,n}(X)} = sup_{\|\xi\|_{X^*}} \left(\sum_1^n \left|< x_i, \xi >\right|^p\right)^{\frac{1}{P}}$$

Introduction

La théorie des espaces vectoriels semi ordonnés ou lattis vectoriels développée par L. Kantorovitch et G. Akilov dans les années trente (1935- 1937) occupe une place importante dans le domaine de l'analyse fonctionnelle , elle a permis de résoudre des questions fondamentales de l'analyse classique et appliquée.

Les travaux de F. Riesz en 1929 au congré mathématique de Bologne sur les treillis fonctionnels a fortement contribué au développement de la théorie des lattis vectoriels.

Au cours des années quarante, le mathématicien japonais Nakano a bâti une théorie systématique des espaces semi ordonnés renfermant de nouvelles voies de recherches.

D'autres mathématiciens japonais , américains , français et hollandais (K. Yosida, G. Birkhoff, S. Bochner, M. Stone, J. Dieudonné et B. Maurey) ont joué un rôle important dans le développement de la théorie des lattis vectoriels.

Nous présentons dans ce mémoire les méthodes et théories principales de factorisation d'une classe d'opérateurs sous linéaires p-sommants permettant l'étude de leurs propriétés topologiques et les diverses applications à la théorie des fonctions et des équations fonctionnelles. Notre travail est subdivisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre nous avons détaillé les opérateurs linéaires et les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. ces opérateurs linéaires constituent la base et le point de départ de notre travail qui consiste en la factorisation de ces opérateurs par les espaces de Hilbert et les espaces L_P.

Nous avons consacré le deuxième chapitre aux espaces de Riesz et opérateurs sous linéaires et les relations existantes entre cette classe d'opérateurs et les opérateurs linéaires étudiés dans le précédant chapitre .

Le troisième chapitre axe de notre recherche porte sur une étude détaillée d'une classe d'opérateurs sous linéaires bornés : les opérateurs p-sommants.

Dans le quatrième chapitre nous avons énoncé plusieurs définitions et théorèmes à savoir les inégalités de Khinchine , les opérateurs p- convexes et q-concaves qui constituent les conditions nécessaires de factorisation d'opérateurs linéaires et sous linéaires entre espaces de Banach et espaces réticulés , différents théorèmes à savoir théorème sur les opérateurs linéaires qui se factorisent par un espace de Hilbert , théorème de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L_P, théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés, théorème central de Pietsch et le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs sous linéaires p-sommants.

On termine par une conclusion avec comparaison entre les différents procédés de factorisation et les limites de leurs applications.

Chapitre I

Opérateurs Linéaires sur un espace normé

1 Opérateurs Linéaires sur un espace normé

Définition 1-1 :
Soient X ,Y deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$ et une application $T : X \longrightarrow Y$. On dira que T est un opérateur linéaire si :
1 - $\forall x, y \in X$ on a $T(x+y) = T(x) + T(y)$
2 - $\forall\, x \in X$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ alors $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

2 Opérateurs linéaires continus sur un espace normé

Définition 2-1 :
Soient $(X, \|\|_1)$ et$(Y, \|\|_2)$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$
L'opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est continu en $x_0 \in X$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que$\|x - x_0\|_1 < \delta \Longrightarrow \left\|T(x) - T(x_0)\right\|_2 < \varepsilon$.

La continuité de l'opérateur T peut être caractérisée par les suites,

T est continu en $x_0 \in X$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que :

$$x_n \xrightarrow{\|\|_1} x_0 \text{ on a } T(x_n) \xrightarrow{\|\|_2} T(x_0)$$

On note par :

$\mathcal{L}(X, Y)$: espace vectoriel des opérateurs linéaires de X dans Y

$L(X, Y)$: espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans Y

Définition 2-2 :
L'opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$ tel que $\|Tx\|_2 \leq M\, \|x\|_1$

La linéarité de l'opérateur T entraine l'équivalence des deux définitions.

Théorème 2-1 :
L'opérateur linéaire T est continu sur X si et seulement si il est borné

Théorème 2-2 :
Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ les énoncés suivants sont équivalents :
I - T est continu sur X
II - T est uniformément sur X
III - T est continu à l'origine
IV - si $A \subset X$ tel que A borné alors $T(A)$ est borné dans Y

Théorème 2-3 :
Tout opérateur linéaire défini sur un espace normé de dimension algébrique finie est continu

L'espace Normé $(L(X,Y), \| \|)$:

Soit $(X, \| \|_1)$ et $(Y, \| \|_2)$ deux espaces normés

et $L(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ tel que T opérateur linéaire et continu $\}$.

On introduit une norme sur $L(X,Y)$

Théorème 2-4 :
L'application $\| \| : L(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$\|T\| = sup\{ \|T(x)\|_2 \ ; x \in X$ et $\|x\|_1 \leq 1\}$ est une norme pour $L(X,Y)$

Théorème 2-5 :
Soit $(X, \| \|_1)$ un espace vectoriel normé et $(Y, \| \|_2)$ un espace de Banach , alors $L(X,Y)$ est un espace de Banach.

Théorème 2-6 :
Soit $T \in L(X,Y)$, l'opérateur T^{-1} existe et est continu sur $T(X) \subset Y$ si et seulement si il existe un nombre $k \geq 0$ tel que $k \|x\|_1 \leq \|T(x)\|_2$ pour tout $x \in X$.

Théorème 2-7 : Théorème de prolongement
Soit $T \in L(X,Y)$
Soient $(X, \|\|_1)$ *et* $(Y, \|\|_2)$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$
Soient $(\tilde{X}, \|\|_1)$, $(\tilde{Y}, \|\|_2)$ deux espaces de Banach complétés de $(X, \|\|_1)$ et $(Y, \|\|_2)$ respectivement. Alors
il existe $\widetilde{T} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ tel que $\tilde{T} \in L\left(\widetilde{X}, \tilde{Y}\right)$, $\tilde{T}/X = T$ et $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

3 Opérateurs Linéaires réguliers (Inversibles)

3- Opérateurs Linéaires réguliers
Dans ce paragraphe nous étudierons les opérateurs linéaires continus qui sont des homéomorphismes d'un espace de Banach sur lui-même.

Définition 3-1 : soit $(X, \|\|)$ un espace de Banach , un opérateur $T \in L(X)$ est régulier si

a- $T(X) = X$

b- T^{-1} *existe sur* X *et* $T^{-1} \in \mathrm{L}(X)$.

L'ensemble des opérateurs réguliers sur X est noté $L_r(X)$

Théorème 3-1 :

Soient $T_1, T_2 \in L_r(X)$ Alors

1. $T_1 \circ T_2 \in L_r(X)$ et
2. $\lambda T \in L_r(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Théorème 3-2 :

Soit $T \in \mathrm{L}(X)$ tel que $(X, \|\|)$ est un espace de Banach.

Si $\|T\| < 1$ alors $I - T \in L_r(X)$ et $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

Théorème 3-3 :

Soient $T_1, T_2 \in \mathrm{L}(X)$ et $T_1 \in L_r(X)$, $si \left\|T_1 - T_2\right\| \le \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$ Alors

$T_2 \in L_r(X)$, de plus $T_2^{-1} = T_1^{-1} + T_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(T_1 - T_2\right) - T_1^{-1}\right)^k$.

Théorème 3-4 : $L_r(X)$ est un ouvert de $L(X)$

Théorème 3-5 :

l'application $\psi : L_r(X) \longrightarrow L_r(X)$ telle que $T \longrightarrow T^{-1}$ est continue.

4 Opérateurs Linéaires compacts

Définition 4-1 : Ensemble Relativement Compact
Soit E un espace topologique séparé et A une partie de E. A est relativement compact si $\bar{A}$ est compact.

Définition 4-2 :
Soient $\left(X, \ \|\|_1 \right)$ un espace vectoriel normé et $\left(Y, \|\|_2 \right)$ un espace de Banach un opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si l'image de chaque ensemble borné de X est relativement compact dans Y.
On note par :
$L_c(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ L'ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y

Théorème 4-1 :
Si $T \in L_c(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ Alors $T \in L(X,Y)$.
(ie : tout opérateur linéaire compact est continu .)

Théorème 4-2 :
$L_c(X,Y)$ est un ensemble fermé dans $L(X,Y)$.

Théorème 4-3 :
$L_c(X)$ est un ensemble fermé dans $L(X)$.

5 Les grands Théorèmes d'analyse fonctionnelle

5-1 Théorème de Hahn- Banach

A) Théorème de Hahn - Banach (Forme Analytique Réelle)

B) Théorème de Hahn - Banach (Forme Analytique Complexe)

C) Théorème de Hahn - Banach (Formes Géométriques)

C-1 Première Forme Géométriques

C-2 Deuxième Forme Géométriques

5.1 Théorème de Hahn-Banach

<u>Définition 5-1-1 :</u>
Soit X un espace vectoriel et soient $X_1 \subset X_2 \subset X$ deux sous espaces de X.Une fonctionnelle linéaire $x_2^{'} \in \mathcal{L}\left(X_2, \mathbb{K}\right)$ est un prolongement de $x_1^{'} \in \mathcal{L}\left(X_1, \mathbb{K}\right)$ si la restriction de $x_2^{'}$ à X_1 est égale à $x_1^{'}$ $\left(ie : x_2^{'}/X_1 = x_1^{'}\right)$

<u>Définition 5-1-2 :(Fonctionnelle convexe).</u>
Une fonctionnelle convexe est une application $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
2. $p(\alpha x) = \alpha\, p(x)$ pour tout $x, y \in X$ et $\alpha \geq 0$.

<u>Lemme 5-1-1 :</u>
Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: X_1 un sous-espace propre de X ,
$p : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une Fonctionnelle Convexe. $x^{'} \in \mathcal{L}\left(X_1, \mathbb{R}\right)$ satisfaisant

$$x^{'}(x) \leq p(x) \ldots\ldots (1) \text{ pour tout } x \in X_1$$

Fixons $x_0 \in X \setminus x_1$ et posons $X_2 = X_1 \oplus [x_0]$ alors existe un prolongement $y' \in \mathcal{L}\left(X_2, \mathbb{R}\right)$ de x' telle que la relation (1) soit satisfaite sur X_2

$$(\text{ie : } y'(x) \leq p(x) \text{ sur } X_2)$$

A - Théorème de Hahn – Banach (Forme Analytique Réelle)

Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, $X_1 \subset X$ un sous espace propre de X, P une fonctionnelle convexe sur X et $x' \in \mathcal{L}\left(X_1, \mathbb{R}\right)$ telle que

$$x'(x) \leq p(x) \text{ pour tout } x \in X_1$$

Alors il existe $y' \in \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ telle que :

1. $y'/X_1 = x'$
2. $y'(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in X$

Théorème A – 1 :

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un élément fixé et $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Une fonctionnelle convexe. Alors il existe $x' \in \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ telle que :

(i) $x'\left(x_0\right) = p\left(x_0\right)$

(ii) $x'(x) \leq p(x)$ *pour tout* $x \in X$

Définition 5-1-3 : (semi norme).

Soit X un espace vectoriel **complexe,** et $p : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi norme si :

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout x et $y \in X$
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

B - Théorème de Hahn - Banach (Forme Analytique complexe)

Soit X un espace vectoriel **complexe** , $X_1 \subset X$ un sous espace vectoriel propre de X . P une semi norme sur X et $x' \in \mathcal{L}\left(X_1, \mathbb{C}\right)$ telle que $\left|x'(x)\right| \leq p(x)$ pour tout $x \in X_1$, Alors il existe $y' \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ telle que :

1. $y'/X_1 = x'$
2. $\left|y'(x)\right| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$.

C - Théorème de Hahn - Banach (Formes Géométriques)

C -1 Première Forme Géométriques
Soient A et B deux parties convexes disjointes non vides d'un espace normé .
On suppose que A est ouverte, alors il existe un hyperplan fermé séparant
A et B au sens large.

C - 2 Deuxième Forme Géométriques.
Soient A et B deux parties convexes disjointes non vides d'un espace normé E.
On suppose que A est fermée et B compacte. Alors il existe un hyperplan fermé séparant A et B au sens strict.

5.2 Principe de l'application ouverte et théorème du graphe fermé

Définition 5-2-1 :
Soient E ,F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. T est continue si l'image réciproque de tout ouvert dans F est un ouvert dans E
   ie : $\left(\forall w_F \subset F, \exists\, u_E \subset E \text{ tels que } T^{-1}\left(w_F\right) \subset u_E\right)$ avec u_E, w_F deux ouverts respectivement de E et F.
2. T est une application ouverte si l'image directe de tout ouvert dans E est un ouvert dans F.
   ie : $\left(\forall u_E \text{ ouvert } \subset E \Longrightarrow T\left(u_E\right) \text{ est un ouvert } \subset F\right)$.

Définition 5-2-2 :
Soient $\|\|_1,\|\|_2$ deux normes définies sur E (espace Normé).
Les deux normes sont équivalentes si $\exists\, C_1,\ C_2 > 0$ tels que $\forall x \in E$

$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2.$$

Définition 5-2-3 (Graphe d'un opérateur).

$$Gr\,(T) = \{(x, T\,(x)) \text{ tels que } x \in E\}$$

Définition 5-2-4 :

Un opérateur linéaire est fermé si son graphe est fermé

Théorème 5-2-1 : Théorème de l'application ouverte.

Soient E, F deux espaces de Banach , $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective et continue. Alors T est une application ouverte.

Première application (Théorème 1).

Soient E, F deux espaces de Banach, $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective et continue. Alors T^{-1} est continue.

Deuxième application : (Théorème d'équivalence des normes).

Soient $\|\|_1, \|\|_2$ deux normes définies sur E (espace de Banach), telles que $(E, \|\|_1), (E, \|\|_2)$ deux espaces de Banach .

Si $\exists\, C > 0$ tel que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Alors ces deux normes sont équivalentes .

5.3 Théorème du graphe fermé

Théorème 5-3-1 :

Soient E, F deux espaces de Banach, $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire et continu. Alors Graphe de $T(Gr\,T)$ est fermé.

Théorème 5-3-2 :
Soient E, F deux espaces de Banach, $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire tel que Graphe de $T(Gr\ T)$ est fermé. Alors T est continu

5.4 Principe de l'application contractante et Théorème du point fixe

Définition 5-4-1 :
Soit (E, d) un espace metrique , $f : (E, d) \longrightarrow (E, d)$.On dit que f est une contraction s'il existe une constante positive $k < 1$ telle que ,
$\forall x, y \in E$ on a $d\,(f\,(x) - f\,(y)) \leq k\ d\,(x, y)$.
On dit que a est un point fixe pour l'application f si $f(a) = a$.

Théorème du point fixe 5-4-1 :
Tout endomorphisme f contractant défini sur un espace métrique complet E
ie : $f : (E, d) \longrightarrow (E, d)$ admet un et un seul point fixe .

5.5 Théorème de Banach Steinhauss

Théorème 5-5-1 :
Soient E, F deux espaces de Banach, (u_n) une suite d'applications linéaires et continues de E dans F. Si $(u_n(x))$ $(x \in E)$ est une suite bornée alors La suite $(\|u\|)_n$ est majorée par une même constante.

NB :

Pour toutes les démonstrations de ce chapitre, voir référence [01] : Walte Hengartner, Corina Reischner , Marcel Lambert - Introduction à L'analyse fonctionnelle presses de l'université de Québec.

Chapitre II

Espace de Riesz et Opérateurs sous linéaires

1) Espace de Riesz

2) Espace de Köthe

3) Dual d'un espace de Köthe

4) Les opérateurs sous linéaires

5) Relation entre opérateurs linéaires et opérateurs sous linéaires

1 Espace de Riesz

Définition 1-1 : (Ensemble Réticulé)

Un ensemble réticulé est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x et y admettent

Une borne supérieure $sup\,\{x, y\}$
et une borne inférieure $inf\,\{x, y\}$.

Un espace vectoriel ordonné dans lequel toute paire d'éléments a un borne supérieure est appelé espace vectoriel réticulé

Définition 1-2 :

(Espace de Riesz) ou espace vectoriel partiellement ordonné ou
lattis vectoriel (l.v).
Un espace vectoriel réel X est un espace de Riesz s' il est un ensemble réticulé sur lequel la structure d'espace vectoriel et la structure d'ordre sont compatibles

C'est-à-dire satisfont aux axiomes suivants :

1) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$ quelque soit $z \in X$
2) $x \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \geq 0$ pour tout scalaire $\lambda \geq 0$

Définition 1-3 : (Espace de Riesz Normé)

Une norme $\|\|$ sur un espace de Riesz X est une norme réticulé si

$$\forall x, y \in X, |x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

Un espace de Riesz Normé est un espace de Riesz muni d'une norme réticulé .
Si la norme est complète on dira que X est un espace Banach réticulé.

L'ensemble $X_+ = \{x \in X, x \geq 0\}$ est appelé cône des éléments positifs de X.

On appelle :

Partie positive de $x \in X$, l'élément $x_+ = sup\,(x, o)$.

Partie négative de $x \in X$, l'élément $x_- = sup\,(-x, 0) = (-x)_+$ et

Module de x, l'élément $|x| = x_+ + x_-$ et pour tout x$\in X$ on a : $x = x_+ - x_-$

Éléments étrangers :

Deux éléments x et $y \in X$ sont étrangers et on note (x e y) si :

$$inf\ \{|x|\,, |y|\} = 0$$

Enveloppe solide :

Un sous ensemble E d'un lattis vectoriel X est solide si :

$$x \in X, y \in E \ \ |x| \leq |y| \Longrightarrow x \in E$$

Si E est un sous ensemble quelconque , le plus petit ensemble solide qui contient E est appelé enveloppe solide.

Sous lattis vectoriel :

Un sous espace vectoriel Y d'un lattis vectoriel X est un sous lattis vectoriel si :

$$\forall y_1, y_2 \in Y \text{ on a } \sup\left(y_1, y_2\right) \in Y \text{ et } \inf\left(y_1, y_2\right) \in Y$$

On appelle Idéal

Un sous ensemble linéaire solide d'un lattis vectoriel.

On appelle fondement

Un idéal Y d'un lattis vectoriel X de même largeur que X ie : $Y^e = \{0\}$.

Si $u \in X_+$, le plus petit idéal de X qui contient u s'appelle **idéal principal** ou u - idéal de X et se note $X(u)$. $X(u) = \{x \in X |x| \leq \lambda u$ pour tout $\lambda \in [0, +\infty[\}$

Si un l.v. X est confondu avec un idéal principal $X(u)$ pour un $u \in X_+$, on dit que X est un lattis d'éléments bornés et u l'unité forte (de X).

Dans un l.v. X on dit qu'un ensemble $Y \subset X$ est une bande s'il est le complément étranger d'un ensemble $E \subset X$. Autrement dit on dit qu'un ensemble $Y \subset X$ est une bande dans X si $Y^{ee} = Y$.

On dit qu'un l.v. X est archimédien si :

$$n\,x \leq y \ \in X \ \forall x \in X_+ \,, \forall n \in N \text{ entraine } x = 0$$

On dit qu'un l.v. X est un K_σ- espace ou un espace dénombrablement complètement réticulé (**ou encore un lattis vectoriel σ-complet**) si toute partie majorée dénombrable admet une borne supérieure dans X.

On dit qu'un l.v. X est un K_σ- espace ou un espace complètement réticulé (**ou un lattis vectoriel complet**) si toute partie majorée non vide de X admet une borne supérieure dans X.

Dans un K_σ- espace tout ensemble dénombrable minoré admet une borne inférieure, de même dans un K-espace un ensemble minoré arbitraire admet une borne inférieure.

un K_σ-espace est un l.v. archimédien.

Dans un K_σ- espace (respectivement un K- espace), un idéal est un K_σ- espace (respectivement un K- espace).

Définitions 1-4 :

Soit Y une bande dans un K-espace X , $x \in X_+$ et on pose

$$[Y]\,x = sup\,\{y \in Y_+ \,;\, y \leq x\}$$

Cette borne supérieure existe dans X par définition d'un K- espace et en vertu de la condition de validité $[Y]\,x \in Y$ Pour tout $x \in X$ on pose :

$$[Y]\,x = [Y]\,x_+ - [Y]\,x_-$$

$[Y]$ est un opérateur linéaire de X dans Y laissant invariant les éléments de Y et on a : $|[Y]\,x| \leq |x|$ et $|[Y]\,x| = [Y]\,(|x|)\,(x \in X)$ et L'opérateur $[Y]$ est dit projecteur sur la bande Y .

Tout élément $x \in X$ admet la représentation unique

$x = y + z$ tel que $y \in Y$ et $z \in Y^e$ de plus $y = [Y]\,x$ et $z = [Y^e]\,x$.

- Un l.v. X est de type dénombrable si toute famille bornée d'éléments non nuls deux à deux étrangers est au plus dénombrable .
- Un l.v. archimédien X est un l.v. de type dénombrable si et seulement si il satisfait la condition suivante : pour toute ensemble $E \subset X$ admettant une borne supérieure il existe un sous ensemble au plus dénombrable $E_0 \subset E$ tel que $sup\ E_0 = sup\ E$. ou bien la condition analogue en remplaçant sup par inf.

Exemple 1 :

L'espace $C\,(K) = \left\{ f\ :\ K \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ continue et } K \text{ compact} \right\}$ partiellement ordonné par l'ordre partiel défini par :

$$\left(f \leq g \quad \text{si et seulement si } f\left(x\right) \leq g\left(x\right)\ \ \forall x \in K\right)$$

est un espace de Riesz.

Exemple 2 :
L'espace $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ continue et } K \text{ compact}\}$ avec
$\|f\| = sup_{x\in K} |f(u)| < \infty$ est un espace de Banach réticulé.

L'espace $C(K)$ est un Banach. en effet soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy $\subset C(K)$ alors $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_0(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall p, q > N_0$ on a $\left\|f_p - f_q\right\| < \varepsilon$.

$\left\|f_p - f_q\right\| = sup_{x\in K} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \varepsilon \Longrightarrow$
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy $\subset \mathbb{R}$ qui est un espace de Banach) alors

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

$f_n(x) \longrightarrow f(x) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) > 0$ tq $\forall n > N$ on a $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$

$\forall x \in K\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \Longrightarrow sup_{x\in K} \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ alors $\left\|f_n - f\right\| < \varepsilon$

d'ou $f_n \overset{\|\|}{\longrightarrow} f$

Montrons $f \in C(K)$. $\forall x \in K$ on a $f(x) = lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ de plus f est continue sur K en tant que limite d'une suite de fonctions continues sur K■

Théorème 1-1 :
Le dual d'un espace de Riesz normé est un espace de Banach réticulé

Preuve :

Soit X^* le dual topologique de l'espace de Riesz normé X

$X^* = \{f : X \longrightarrow IK, \text{ linéaire et continue}\}$ est un espace de Banach avec

$\|f\| = sup_{u\in X} |f(u)| < \infty$

Montrons X^* est réticulé.

soient $f_1, f_2 \in X^*$ telles que $|f_1| \le |f_2| \Longrightarrow \forall u \in X$ on a $|f_1(u)| \le |f_2(u)| \Longrightarrow$
$sup_{u\in X} |f_1(u)| \le sup_{u\in X} |f_2(u)|$ d'ou $\|f_1\| \le \|f_2\|$ ■.

Théorème 1-2 :
Le dual X^* d'un espace de Banach réticulé est un espace de Banach complètement réticulé pour l'ordre naturel : $x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow < x_1^*, x > \leq < x_2^*, x > \forall x \in X^+$

Preuve :

a - $X^* = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Linéaire et continue $\}$ est un espace de Banach (eveident)

b - X^* est complétement reticulé : en effet

Soit A^* une partie majorée non vide de X^*, montrons que A^* admet une borne supérieure dans X^*

Soit $(M, \|\|)$ un espace vectoriel normé avec $M = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Linéaire $\}$

$X^* \subset M$ séparé alors X^* est fermé et on a $A^* \subset X^* = \overline{X^*}$

$$\sup A^* \leq \sup X^* \in X^* \Longrightarrow \sup A^* \in X^* \blacksquare$$

Définition 1-5 :
Une quasi-norme sur un espace sur vectoriel réel est une application

$$\|\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ telle que } x \longrightarrow \|x\| \text{ qui vérifie :}$$

1. $\|x\| > 0$ pour tout $x \neq 0$
2. $\|tx\| = |t| \, \|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in X$
3. $\exists \, C_X \geq 1$ telle que $\|x + y\| \leq C_X (\|x\| + \|y\|)$ pour tout $x, y \in X$.

La constante C_X est appelée module de convexité de la quasi-norme $\|\|$, $\big($pour $C_X = 1$ on obtient une norme $\big)$.

Définition 1-6 :
Un quasi-Banach réel X est un espace vectoriel réel maitrisable et complet dont la topologie est donnée par une quasi-norme. si de plus X est réticulé (respectivement complètement réticulé) et $\|x\| \leq \|y\|$ quand $|x| \leq |y|$, on dira que X est un quasi Banach réticulé (respectivement quasi-Banach complètement réticulé). Les elements x et $|x|$ ont la même quasi-norme.

2 Espace de Köthe.

Définition 2 - 1 : Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré complet σ-fini , un espace de Banach $L \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ de fonctions localement intégrables sur Ω à valeurs réelles est un espace de Köthe si :

1. pour $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $g \in L$ telle que $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|\, pp$ pour tout $\omega \in \Omega$ On a $f \in L$ et $\|f\|_L \leq \|g\|_L$
2. Pour chaque $A \in \Sigma$ $(ie : \mu(A) < +\infty)$ la fonction caractéristique $\chi_A \in L$

Remarque

$(L, \|\|)$ est l'espace de Köthe et $\|\|$ est l'application de Köthe

$$\|\| : L_0(\mu) \longrightarrow [0, +\infty[\quad \text{est L'application de Köthe telle que}$$

$$f \longrightarrow \|f\| = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right|,\ g \in L',\ \|g\|_{L'} \leq 1\right\}$$

$L(\mu) = \left\{f \in L_0(\mu), \|f\| < +\infty\right\}$ est l'éspace de Köthe avec :

$$\|f\| = \|f\|_L = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right|,\ g \in L',\ \|g\|_{L'} \leq 1\right\}$$

$L^* = \left\{\phi : f \in L \longrightarrow \phi(f) = \int f(\omega)\chi_A d\mu\right\}$

$\phi(f) = \int f(\omega)\chi_A d\mu$ est bien définie de plus elle est linéaire et continue

$\left(L', \|\|_{L'}\right) = \left\{g \in L_0(\mu)\, \|g\|_{L'} = sup\left|\int_\Omega fgd\mu\right| < +\infty\ ,\ \|f\|_L \leq 1\right\}$

Exemple 1 :

$\left(L^p, \|\|_{L^p}\right)$ est un espace de Köthe

Exemple 2 :

Si L est espace de Köthe alors $\left(L', \|\|_{L'}\right)$ est un espace de Köthe

Exemple 3 :

Si L est espace de Köthe alors L'' est un espace de Köthe

En effet

1. Soient $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $g \in L''$ telle que $|f(\omega)| \le |g(\omega)|$ pp
   montrons que $f \in L''$ et $\|f\|_{L''} \le \|g\|_L''$
   $g \in L'' \Longrightarrow g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ et
   $\|g\|_{L''} = sup\left\{ \left|\int hgd\mu\right|,\ h \in L' \text{ et } \|h\|_{L'} \le 1 \right\}$
   Or $h \in L'$ ie : ($h : L \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue alors h est sous linéaire).
   $|f(\omega)| \le |g(\omega)|$ pp $\Longrightarrow$ $|hf| \le |hg|$ et $\left|\int hgd\mu\right| \le \left|\int hgd\mu\right|$ alors
   $sup\left\{ \left|\int hfd\mu\right|, h \in L' \text{ et } \|h\|_{L'} \le 1 \right\} \le$
   $sup\left\{ \left|\int hgd\mu\right|, h \in L' \text{ et } \|h\|_{L'} \le 1 \right\}$ et on obtient $\|f\|_{L''} \le \|g\|_{L''}$
2. Soit $A \in \Sigma$ un ensemble mesurable ie $\mu(A) < +\infty$ montrons que $\chi_A \in L''$
   On a $\|\chi_A\|_L'' = sup\left\{ \left|\int h\chi_A d\mu\right|, h \in L' \text{ et } \|h\|_{L'} \le 1 \right\} \le$
   $\|h\|_{L'} * \left|\int \chi_A d\mu\right| \le \|h\|_{L'} * \mu(A) < +\infty$
   $\|\chi_A\|_{L''} \le \|h\|_{L'} * \mu(A) < +\infty$ Alors $\chi_A \in L''$ ■

Propriétés

L'application $\|\|$: $L_0(\mu) \longrightarrow [0,+\infty[$ est de Köthe si :

1. $f \in L_0(\mu)\ \|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
2. $f \in L_0(\mu)$ *et* $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|$
3. $f, g \in L_0(\mu) \Longrightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$
4. $f, g \in L_0(\mu)$ tel que $|f| \leq |g| \Longrightarrow \|f\| \leq \|g\|$
5. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f \in L_0(\mu)\, |f_n| \nearrow |f| \Longrightarrow \|f_n\| \nearrow \|f\|$

Preuve :

$(L, \|\|)$ est l'espace de Köthe et $\|\|$ est l'application de Köthe

$\|\|$: $L_0(\mu) \longrightarrow [0,+\infty[$ est L'application de Köthe telle que

$$f \longrightarrow \|f\| = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right|\ ,\ g \in L'\|g\|_{L'} \leq 1\right\}$$

1) $\mathbf{f \in L_0}(\mu)\ \ \|\mathbf{f}\| = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{f = 0}$

$\|f\| = 0 \Longrightarrow \|f\| = \|f\|_L = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right|,\ g \in L'\|g\|_{L'} \leq 1\right\} = 0 \Longrightarrow$

$\left|\int fgd\mu\right| = 0$, or $0 \leq |fg| \leq \left|\int fgd\mu\right| = 0 \Longrightarrow fg = 0$ alors

$f = 0$ (car $\|g\|_{L'} \leq 1$ donc $g \neq 0$).

Inversement si $f = 0 \Longrightarrow \forall g \in L'$ on a $fg = 0 \Longrightarrow \left|\int fgd\mu\right| = 0$ alors $\|f\| = 0$

2) $\mathbf{f \in L_0}(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \|\alpha\mathbf{f}\| = |\alpha|\|\mathbf{f}\|$

$$\|\alpha f\| = sup\left\{\left|\int \alpha fgd\mu\right|,\ g \in L'\ \|g\|_L' \leq 1\right\} = |\alpha| sup\left\{\left|\int fgd\mu\right|,\ g \in L'\|g\|_{L'} \leq 1\right\}$$

Alors $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

3) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L_0}(\mu) \Longrightarrow \left\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\right\| \leq \left\|\mathbf{f}\right\| + \left\|\mathbf{g}\right\|$

$$\left\|f+g\right\| = sup\left\{\left|\int (f+g)h\, d\mu\right|,\ h \in L' \ et \ \left\|h\right\|_{L'} \leq 1\right\}$$

Or $\left|\int (f+g)h\, d\mu\right| \leq \left|\int fh\, d\mu\right| + \left|\int gh\, d\mu\right|$

$sup\left|\int (f+g)h\, d\mu\right| \leq sup\left|\int fhd\mu\right| + sup\left|\int fhd\mu\right|$ d'ou $\left\|f+g\right\| \leq \left\|f\right\| + \left\|g\right\|$

4) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L_0}(\mu)$ tel que $\left|\mathbf{f}\right| \leq \left|\mathbf{g}\right| \Longrightarrow \left\|\mathbf{f}\right\| \leq \left\|\mathbf{g}\right\|$

Soient $f, g \in L_0(\mu)$ tq $\left|f\right| \leq \left|g\right|$ $alors\ \forall\, h \in L'$ avec $\left\|h\right\|_{L'} \leq 1$

on a $\left|fh\right| \leq \left|gh\right| \Longrightarrow sup\left|\int fh\, d\mu\right| \leq sup\left|\int gh\, d\mu\right|$ d'ou $\left\|f\right\| \leq \left\|g\right\|$

5) $(\mathbf{f_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}, \mathbf{f} \in \mathbf{L_0}(\mu) \quad \left|\mathbf{f_n}\right| \nearrow \left|\mathbf{f}\right| \Longrightarrow \left\|\mathbf{f_n}\right\| \nearrow \left\|\mathbf{f}\right\|$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f \in L_0(\mu) \left|f_n\right| \nearrow \left|f\right|$ alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \ \text{tq} \ \left|\left|f_n\right| - \left|f\right|\right| < \varepsilon$$

$$\left|f_n\right| - \left|f\right| < \varepsilon \text{ et pour toute } g \in L' \text{ avec } \left\|g\right\|_{L'} \leq 1$$

On a $\left|f_n g\right| - \left|fg\right| < \varepsilon\left|g\right|$ $sup\left|\int f_n g\, d\mu\right| - sup\left|\int fg\, d\mu\right| < sup\left|\int \varepsilon g\, d\mu\right| =$ $\varepsilon\ sup\left|\int gd\mu\right| \leq \varepsilon\ sup \int \left|g\right| d\mu = \varepsilon\left\|g\right\|_{L'} < \varepsilon$ alors $\left\|f_n\right\| \nearrow \left\|f\right\|$ ■.

3 Dual d'un espace de Köthe

Toute fonction mesurable g sur Ω telle que fg $\in L_1(\mu)$ pour toute fonction $f \in X$ définit un élément $x'_g \in X^*$ telle que $x'_g(f) = \int_\Omega f(\omega)\, g(\omega)\, d\mu$.

Définition 3-1 :

On définit l'espace dual d'un espace de Köthe L par

$\left(L', \|\|_{L'}\right) = \left\{g \in L_0(\mu)\, \|g\|_{L'} = sup \left|\int_\Omega fgd\mu\right| < +\infty, \|f\|_L \leq 1\right\}$

Proposition 3-1 :

Soit L un espace de Köthe sur (Ω, Σ, μ) alors

1. $\left(L', \|\|_{L'}\right)$ est un espace de Köthe
2. $\|f\| = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right| g \in L' \|g\|_{L'} \leq 1\right\}$
3. L' est un idéal de L^*
4. Tout espace de de Köthe est σ -complet pour l'ordre

Proposition 3-2 :

Soit X un espace de Banach alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'espace X est σ-complètement réticulé et σ -continu pour l'ordre
2. Toute suite bornée pour l'ordre et croissante dans X converge fortement
3. L'espace X est continu pour l'ordre
4. L'espace X continu pour l'ordre est complètement réticulé .

Proposition 3-3 :

Soit L un espace de Köthe, alors

1. $\left(L \text{ est } \sigma\text{-continu pour l'ordre }\right) \Longleftrightarrow \left(L'(\mu) = L^*(\mu)\right)$
2. $\left(L'\right.$ est un espace normant de $\left.L^*\right)$ si et seulement si pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des éléments positifs de L et $f_n(\omega)$ on a $\|f_n\| \to \|f\|)$

Proposition 3-4 :

Soit L un espace de Köthe , l'espace L coïncide avec L'' si $(f_n) \subset L$ telle que $f_n(\omega) \nearrow f(\omega)$ pp , $f_n(\omega) \geq 0$ et $sup\|f_n\| < +\infty \Longrightarrow$ $f \in L$ et $lim\|f_n\| = \|f\|$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Définition 3-2 :

Un espace de Köthe L est continu pour l'ordre si

$f_n \in L$ avec $f_n \searrow 0$ pp alors $\|f_n\| \searrow 0$

Proposition 3-5 :

Soit L un espace de Köthe , l'espace L coïncide avec L'' si :

$f_n(\omega) \nearrow f(\omega)$ pp ,$(f_n)_n \subset L$ et $sup_n\|f_n\| < \infty \Longrightarrow f \in L$ et $lim_n\|f_n\| = \|f\|$

Proposition 3-6 :

Soit L un espace de Köthe alors

$f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ pp , $(f_n)_n \subset L$ et $sup_n\|f_n\| < \infty \Longrightarrow f \in L''$

4 Les opérateurs sous linéaires

Définition 4-1 :
Soient X espace vectoriel et Y un espace réticulé l'application $T : X \longrightarrow Y$ est sous linéaire si :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in X$ on a $T(\lambda x) = \lambda T(x)$
2. $T(x+y) \leq T(x) + T(y)$

On note par $SL(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ application sous linéaire , $\}$ muni d'une relation d'ordre induit par Y , $T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x)$ pour tout $x \in X$.

Exemples :

1. Tout opérateur linéaire est un opérateur sous linéaire
2. Soit X un espace de Banach et $u : X \longrightarrow L_0(\Omega, \mu)$ linéaire.
   On pose $T(x)(\omega) = |u(x)(\omega)|$ alors T est sous linéaire.
3. soit $u_n : X \longrightarrow L_0(\Omega, \mu)$ une suite d'opérateurs linéaires alors
   $M(x)(\omega) = Max_n \left|u_n(x)(\omega)\right|$ et Q $(x)(\omega) = \left(\sum_1^\infty \left|u_n(x)(\omega)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
   Sont des opérateurs sous linéaires .

   NB / $L_0\left(\Omega, \mu, Y\right) = \left\{f : \Omega \longrightarrow Y, Y \text{ Banach et } \left\|f\left(\omega\right)\right\|_Y \in L_0\right\}$

Définition 4-2 :
Soit $T \in SL(X,Y)$, On dira que T est symétrique si $T(-x) = T(x)$.
Si X est réticulé , T est croissant pour tout $x, y \in X$ tel que $x \leq y$ alors $T(x) \leq T(y)$

Proposition 4-1 :
Soient X, Y deux espace vectoriels tel que Y un espace réticulé , $T \in SL(X,Y)$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad \text{on a} \quad \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$$

Preuve

1) Si $\lambda > 0$ on a $\lambda T(x) = T(\lambda x) \leq T(\lambda x)$ ……………………… (1)

2) Si $\lambda < 0$ on a $\lambda T(x) = -(-\lambda T(x)) = -T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$ …… (2)

D'après (1) et (2) on a $\lambda T(x) \leq T(\lambda x)$.

Remarque sur l'inégalité (2) : $-T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$ en effet

Soit $u \in \nabla T = \{\psi : X \longrightarrow Y \text{ linéaire}, \psi \leq T\}$ alors u est linéaire et $u \leq T$

$\forall x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $u(\lambda x) \leq T(\lambda x)$.

$-\lambda u(x) = u(-\lambda x) \leq T(-\lambda x)$

$-T(-\lambda x) \leq \lambda u(x) = u(\lambda x) \leq T(\lambda x)$ d'ou $-T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$ ■.

Proposition 4-2 :
Soient X, Y, Z trois espace vectoriels tels que Y et Z réticulés.

1. $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall u \in \mathcal{L}(Y,Z)$ (positif) $\Longrightarrow u \circ T \in SL(X,Z)$
2. $\forall u \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $\forall T \in SL(Y,Z) \Longrightarrow T \circ u \in SL(X,Z)$
3. $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ (croissant) $\Longrightarrow S \circ T \in SL(X,Z)$

Preuve du (1) :

$\forall T \in SL(X,Y)$ *et* $\forall u \in \mathcal{L}(Y,Z)$ (*positif*) $\Longrightarrow u \circ T \in SL(X,Z)$

Soient $x, y \in X$, $T \in SL(X,Y)$ et u est linéaire et positif alors

$T(x+y) \leq T(x) + T(y) \Longrightarrow T(x) + T(y) - T(x+y) \geq 0$

$\Longrightarrow u[T(x) + T(y) - T(x+y)] \geq 0 \Longrightarrow u[T(x) + T(y)] - u[T(x+y)] \geq 0$

$\Longrightarrow \quad u\,[T\,(x+y)] \;\leq\; u\,[T\,(x)+T\,(y)] = \; u\,[T\,(x)]+u\,[T\,(y)]$ Alors

$$u\circ T\,(x+y) \leq \; u\circ T\,(x)+u\circ T\,(y)\,.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+ \; et \; x \in X \; alors \; u\circ T\,(\lambda\, x) = u\,[T\,(\lambda\, x)] = \; u\,[\lambda T\,(\,x)] = \lambda u\,[T\,(x)]$

D'où $\; u\circ T\,(\lambda\, x) = \; \lambda\, u\circ T\,(\,x)$

Preuve du (2) :

$\forall\, u \in \mathcal{L}\,(X,Y) \;\; et \;\; \forall\, T \in \; SL\,(Y,Z) \; \Longrightarrow \; T\circ u \;\in\; SL\,(X,Z)$ en effet :

Soient $x\,,\, y \in X, u$ est linéaire et $T \in \; SL\,(Y,Z)$ alors

$T\circ u\;\;(\,x+y) = \; T\,[u\,(x+y)] = T\,[u\,(x)+u\,(y)] \leq T\,[u\,(x)]+T\,[u\,(y)]$

D'où $\; T\circ u\;\;(\,x+y) \leq \; T\circ u\;\;(\,x)+ \;\; T\circ u\;\;(\,y)$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+ \;\; et \;\; x \in X$ alors

$$T\circ u\;\;(\lambda\, x) = \; T\,[u\,(\lambda x)] = T\,[\lambda u\,(x)] = \lambda T\circ u\;\;(\,x)$$

Preuve du (3) :

$\forall\, T \in \; SL\,(X,Y) \;\; et \;\; \forall\, S \in \mathcal{L}\,(Y,Z)\,(croissant\,) \Longrightarrow \; S\circ T \in \; SL\,(X,Z)$

Soient $\; x\,, y \in X\,,\, T \in \; SL\,(X,Y) \;\; et \;\; S$ linéaire et croissant alors

$T\;\;(\,x+y) \;\leq\; T\,(x)+T\,(y) \;\Longrightarrow\; S\circ T\,(\,x+y) \;\leq\; S\,(T\,(x)+T\,(y)) \;=$

$S\circ T\,(\,x)+ \; S\circ T\,(\,y)$ alors $\; S\circ T\,(\,x+y) \;\leq S\circ T\,(\,x)+ \; S\circ T\,(\,y)$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+ \; et \; x \in X$ alors $\; S\circ T\,(\lambda x) = S\,[T\,(\lambda x)] = S\,[\lambda T\,(x)] = \lambda S\circ T\,(x)\,.$

Proposition 4-3 :

Soit T un opérateur sous linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T continu
2. T continu en 0
3. il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in X$,alors$\|T(x)\| \leq C\|x\|$
   D'où T est borné et on a $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \left\{\|T(x)\|, \|x\|_{B_X}\right\}$

Proposition 4-4 :

Soit T un opérateur sous linéaire borné d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y.

1. $\forall x \in X$ on pose $\varphi(x) = sup\{T(x), T(-x)\}$ alors φ est un opérateur sous linéaire symetrique de plus$|T| \leq \varphi$ et $\|\varphi(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$
2. pour toute $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{R}$on a : $T\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_1^n |\alpha_i| \varphi(x)$ de plus
   $\left\|T\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right)\right\| \leq \sum_1^n |\alpha_i| \varphi(x)$

Preuve du (1) :

$\varphi \in SL(X,Y)$ en effet $\varphi(x) = sup\{T(x), T(-x)\}$ est un opérateur sous linéaire en tant que sup de deux opérateurs sous linéaires.

φ est symetrique en effet $\varphi(-x) = sup\{T(-x), T(x)\} = \varphi(x)$.

$|T| \leq \varphi$ en effet $|T(x)| = sup\{T(x), -T(x)\} \leq sup\{T(x), T(-x)\} = \varphi(x)$

$\|\varphi(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$ en effet $\varphi(x) = sup\{T(x), T(-x)\} \Longrightarrow$

$\|\varphi(x)\| = \|sup\{T(x), T(-x)\}\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$.

Preuve du (2) :

$(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{R}$ on a : $T\ \left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) \leq\ \sum_1^n |\alpha_i|\, \varphi(x)$ de plus $\left\|T\ \left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right)\right\| \leq$ $\sum_1^n |\alpha_i|\, \varphi(x)$. en effet :

$\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i = \alpha_i^+ - \alpha_i^-$ avec $\alpha_i^+, \alpha_i^- \in \mathbb{R}^+$

$T\left(\alpha_i\, x_I\right) = T\left(\left(\alpha_i^+ - \alpha_i^-\right) x_I\right) = T\left(\left(\alpha_i^+ x_I\right) + \left(-\alpha_i^- x_I\right)\right) \leq T\ \left(\alpha_i^+\ x_I\right) + T\ \left(-\alpha_i^-\ x_I\right)$

$\leq\ \alpha_i^+ T\ \left(\ x_I\right) + \alpha_i^- T\ \left(-x_I\right) \leq\ \alpha_i^+ \varphi\ \left(\ x_I\right) + \alpha_i^- \varphi\ \left(\ x_I\right) \leq\ \left(\alpha_i^+ + \alpha_i^-\right)\ \varphi\ \left(\ x_I\right) \Longrightarrow$

$$T\left(\alpha_i\, x_I\right) \leq |\alpha_i|\ \varphi\ \left(\ x_I\right) \Longrightarrow\ \sum_1^n T\ \left(\alpha_i\, x_I\right) \leq \sum_1^n |\alpha_i|\ \varphi\ \left(\ x_I\right)$$

$$\left\|\sum_1^n T\ \left(\alpha_i\, x_I\right)\right\|\ \leq\ \left\|\sum_1^n |\alpha_i|\ \ \varphi\ \left(\ x_I\right)\right\| \leq\ \sum_1^n \left\||\alpha_i|\, \varphi\ \left(\ x_I\right)\right\| \leq\ \sum_1^n |\alpha_i| \left\|\ \varphi\ \left(\ x_I\right)\right\|$$

$$\left\|\sum_1^n T\ \left(\alpha_i\, x_I\right)\right\|\ \leq\ \sum_1^n |\alpha_i| \left\|\ \varphi\ \left(\ x_I\right)\right\|$$

Extension du théorème de Hahn - Banach aux opérateurs sous linéaires

Théorème 4-1 :
Soient X, Y deux espaces vectoriels tels que Y est complétement réticulé
$T\ \in\ SL(X, Y)$ et X_0 un sous espace $\subset\ X$, soit $u\ \in\ \mathcal{L}\left(X_0, Y\right)$ tel que $u\ \leq\ T$.
Alors u se prolonge en un opérateur linéaire $\widetilde{u} \in \mathcal{L}\left(X_0, Y\right)$ tel que $\widetilde{u} \leq T$.

Corollaire 4 - 1 :
Soient X, Y deux espaces vectoriels tels que Y est complètement réticulé,
$T\ :\ X\ \longrightarrow\ Y$ un opérateur sous linéaire. Alors pour tout $x\ \in\ X$, il existe $u_x\ \in \nabla\ T$ tel que

$$T(x) = u_x(x) \left(ie\ :\ T(x) = \sup_{u\in\nabla T} u(x)\right)$$

Remarque :

$\nabla T = \left\{u\ :\ X \longrightarrow Y \text{ linéaire tel que } u(x) \leq T(x) \text{ pour tout } x \in X\right\}$.

5 Relation entre opérateurs linéaires et opérateurs sous linéaires

Théorème 5-1 :

Soient X, Y deux espaces de Banach tels que Y est complètement réticulé.

$T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire continu. Alors

1. $\forall x \in X, \|T(x)\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$
2. $\|T\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2\|T\|$

Corollaire

1. T est continu $\iff \forall u \in \nabla T,\ u$ est continu
2. Si T est symétrique alors

$$\begin{cases} \left\|T(x)\right\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \left\|u(x)\right\|, \forall x \in X \\ \left\|T\right\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \left\|u\right\| \end{cases}$$

Chapitre III

Opérateurs sous linéaires p-sommants

1 Opérateurs sous linéaires p-sommants

Introduction :

Soient X un espace de Banach , Y un espace de Banach Réticulé et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire borné.

Soit ∇T : l'ensemble des opérateurs linéaires bornés $\leq T$.

On démontre qu'il existe un filtre d'opérateurs $\{u_i\}_{i\in I} \subset \nabla T$ et $C \geq 0$ tel que ; $\forall x \in X$, $\|u_i(x)\| \longrightarrow \|u(x)\|$ *et* $\pi_p(u_i) \leq C$. Il y'a équivalence entre

T p-sommant et u pour tout $u \in \nabla T$.

Rappels et définitions (Filtre) :

a- soit X un ensemble et $\mathcal{F}\ell$ un ensemble non vide de parties de X ($\mathcal{F}\ell \subset X$) $\mathcal{F}\ell$ est un filtre si :

1- $\emptyset \notin \mathcal{F}\ell$.

2- si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}\ell \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}\ell$.

3- si $A \supset F, F \in \mathcal{F}\ell \Longrightarrow A \in \mathcal{F}\ell$.

b- $\mathcal{B}$ un ensemble non vide de parties de X est une base de filtre si :

1- $B \subset \mathcal{F}\ell$

2- si $F \in \mathcal{F}\ell$ alors $\exists B \in \mathcal{B}$ tq $B \subset F$

c- Filtre engendré

soit $\mathcal{B}$ un ensemble non vide de parties de X tq

1- $\emptyset \notin \mathcal{B}$

2- $B_1\ B_2 \in \mathcal{B}$ alors $\exists\ B \in \mathcal{B}$ *tq* $B \subset B_1 \cap B_2$

et soit $\mathcal{F}\ell = \{ F \in X , F \text{ contient un } B \in \mathcal{B}\}$

Alors $\mathcal{F}\ell$ est un filtre (dit engendré par $\mathcal{B}$) et $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{F}\ell$.

Définition 1 : Opérateur sous linéaire p-sommant
Soient X et Y deux espaces de Banach dont Y est réticulé et $T \in SB(X,Y)$ $\left(ie\, T : X \longrightarrow Y\right.$ opérateur sous linéaire borné $\left.\right)$. on dira que T est p-sommant pour $1 \leq P < \infty$ si :

$$\exists\; C > 0 \quad \text{tq} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall \left\{x_1, x_2, \ldots \ldots x_n\right\} \subset X$$

$$\left(\sum_1^n \left\|T\left(x_i\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\, sup\left\{\left(\sum_1^n |< x_i\, , \xi >|^p\right)^{1/p}, \quad \xi \in B_{X^*}\right\}$$

On note par :

$$\pi_p\left(X,\ Y\right) = \left\{\ T \text{ Sous lineaires p- sommants }\right\} \text{ et}$$

$$\pi_p(T) = inf\ \left\{\ C > 0 \text{ verifiant la definition }\right\}$$

Exemple 1 : Opérateur de Multiplication par $C(K)$
Soit K l'espace compacte de Hausdorff et μ une mesure positive définie sur K et soit $0 < P < \infty$

1. Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu)$ on définit l'opérateur de multiplication

   $$T_\varphi\ : C(K) \longrightarrow L_p(\mu) \quad tq \quad T_\varphi(f) = |f\,.\,\varphi|$$

   Cet opérateur est sous linéaire et p-sommant de plus $\pi_p(T) = \|\varphi\|_p$

2. l'opérateur canonique $\Phi_p\ :\ C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ tq $\Phi_p\ (f) = |f|$ est p-sommant de plus $\pi_p\left(\Phi_p\right) = \mu(K)^{1/P}$

1-a) $T_\varphi : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ tq $T_\varphi(f) = \left|f.\varphi\right|$ est sous linéaire. en effet
Soient $f, g \in C(K)$ alors
$T_\varphi(f+g) = \left|(f+g).\varphi\right| \leq \left|f.\varphi\right| + \left|g.\varphi\right| = T_\varphi(f) + T_\varphi(g)$
Soit $f, \in C(K)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $T_\varphi(\lambda f) = |\lambda f.\varphi| = \lambda |f.\varphi| = \lambda\ T_\varphi(f)$

1-b) T_φ est p-sommant. en effet soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{f_1, f_2, \ldots \ldots f_n\} \subset C(K)$
Montrons l'existence d'un $C \geq 0$ tel que

$$\left(\sum_1^n \left\|T_\varphi(f_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ sup \left\{\left(\sum_1^n |< f_i, \xi >|^p\right)^{1/p},\quad \xi \in B_{C(K)^*}\right\}$$

A tout $\omega \in K$ correspond $\delta(\omega) \in C(K)^*$

$$(\ ie\ :\ \forall f \in C(K));\ < \delta(\omega), f > = f(\omega)\ )$$

on a :

$$\left(\sum_1^n \left\|T_\varphi(f_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^n \int \left|T_\varphi(f_i)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^n \int |f_i\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$= \left(\int \left|\varphi(\omega)\right|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} . \left(\sum_1^n \left|f_i(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\leq \|\varphi\|_p .sup\left\{ \left(\sum_1^n |< f_i, \xi >|^p\right)^{1/p},\quad \xi \in B_{C(K)} \right\}$
$\leq C.\ sup\left\{ \left(\sum_1^n \left| < f_i, \xi > \right|^p\right)^{1/p},\ \xi \in B_{C(K)}\right\}$ $avec\ C = \left\|\varphi\right\|_p$
Alors T_φ est p-sommant.

1-c) $\pi_p(T_\varphi) = \left\|\varphi\right\|_p$ en effet soit $\left\{g_1, g_2, \ldots, g_n\ tq\ \left\|g_i\right\|_{C(K)} = \frac{1}{n}\right\} \subset C(K)$

$$\left(\sum_1^n \left\|T_\varphi(g_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^n \int \left|T_\varphi(g_i)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(\int \left|\varphi(\omega)\right|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} . \left(\sum_1^n \left|g_i(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left|\varphi(\omega)\right|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \left\|\varphi\right\|_p$$

NB : $\left(\sum_1^n \left|g_i(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_1^n \left\|g_i\right\|_p = 1$ Alors $\pi_p(T_\varphi) = \left\|\varphi\right\|_p$

2. l'opérateur canonique $\Phi_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ tq $\Phi_p (f) = |f|$ est p- sommant de plus $\pi_p(\Phi) = \mu(K)^{1/P}$.

2-a) $\mathbf{\Phi}_p$ est p-sommant
d'après question 1 l'opérateur de multiplication T_φ est p-sommant
$T_\varphi(f) = \left|f.\varphi\right|$ Pour toute $\varphi \in L_p(\mu)$ en particulier pour
$\varphi \equiv 1$ *alors* $\Phi_p(f) = \left|f\right|$ est p-sommant

2-b) $\pi_p(\mathbf{\Phi}) = \mu(K)^{1/P}$
soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n$ tq $\left\|g_i\right\|_{C(K)} = \frac{1}{n}\} \subset C(K)$

$$\left(\sum_1^n \left\|\Phi_p(g_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^n \int_K \left|\Phi_p(g_i)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\left(\sum_1^n \left|g_i(\omega)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_K d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \left(\int_K d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \mu(K)^{1/p}$ **fin.**

Exemple 2 : Opérateur de Multiplication par $L_\infty(\mu)$
$M_\varphi : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu),\ f \longrightarrow M_\varphi(f) = f.\varphi$ Alors :

1. M_φ est un opérateur sous linéaire p-sommant
   $\left(M_\varphi \in \pi_p\left(L_\infty(\mu), L_p(\mu)\right)\right)$
2. $\pi_p(M_\varphi) = \left\|\varphi\right\|_p$.

$(E,\ \mathcal{M},\mu)$ espace mesuré

$(\ L_\infty(\mu),\|\|_\infty)$:espace des fonctions essentiellement bornées

$f \in\ L_\infty(\mu)\ \Longrightarrow \|f\|_\infty\ = inf\{C > 0$ tel que $|f| \leq Cpp\ \}$

1-a) M_φ **est sous linéaire**

Soient $f_1, f_2\ \in L_\infty(\mu)$ Montrons $M_\varphi(f_1+f_2)\ \leq M_\varphi(f_1)+\ M_\varphi(f_2)$

$M_\varphi(f_1+f_2)\ =\ (f_1+f_2).\varphi\ =\ f_1.\varphi\ + f_2.\varphi\ \ \leq\ f_1.\varphi\ + f_2.\varphi\ = M_\varphi(f_1)+\ M_\varphi(f_2)$

Soient $f \in\ L_\infty(\mu)$ et$\lambda \in\ \mathbb{R}_+\ ,\ M_\varphi(\lambda f\ ) =\ \lambda\, f.\,\varphi =\ \lambda\ M_\varphi(f\ )$

1-b) M_φ **est** p**-sommant**

soit $n \in \mathbb{N}\ et\ \{f_1, f_2, \dots\dots f_n\} \subset L_\infty(\mu)$ Montrons l'existence d'un $c \geq 0$ tel que : $(\ \sum_1^n \|M_\varphi(f_i)\|^p)^{\frac{1}{p}}\ \leq C\ sup\Big\{\ (\ \sum_1^n \big|< f_i\ ,\xi >\big|^p)^{1/p}, \xi \in B_{(L_\infty(\mu))^*}\Big\}$

A tout $\omega \in E$ correspond $\delta(\omega) \in (L_\infty(\mu))^* = (L_E^\infty(\mu))^*$

$(\ ie\ :\ \forall\ f\ \in L_\infty(\mu))\ ;\ <\delta(\omega), f\ >\ =\ \ f(\omega)$ et $\big|\ <\delta(\omega), f\ >\ \big| = \big|f(\omega)\big|\ \leq C$ pp

$(\ \sum_1^n \|M_\varphi(f_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} =\ (\ \sum_{i=1}^n \int_E |f_i\varphi|^p d\mu)^{1/p} = (\ \sum_1^n \int_E |f_i(\omega)|^p\ \ |\varphi(\omega)|^p)^{1/P}$

2. Montrons $\pi_p\left(M_\varphi\right) = \|\varphi\|_p$

$$\left(\sum_1^n \left\|M_\varphi\left(f_i\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^n |<\delta\,(\omega)\ \ , f_i\ \ >|^p\ \right)^{1/P}\left(\int_E |\varphi\,(\omega)|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_1^n \left\|M_\varphi\left(f_i\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\|_p \left(\sum_1^n |<\delta\,(\omega)\ \ , f_i\ \ >|^p\ \right)^{1/P}$$ pour toute $f_i \in\ L_\infty\,(\mu)$

En particulier pour $g_i(\omega) = \frac{f_i(\omega)}{n|f_i(\omega)|}$ *on a* $<\delta(\omega), g_i> = g_i(\omega)$

$$\left(\sum_1^n \left\|M_\varphi(g_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\|_p \left(\sum_1^n |<\delta(\omega)\ , g_i>|^p\right)^{1/P} \quad \text{pour toute } g_i \in L_\infty(\mu)$$

$$\left(\sum_1^n \left\|M_\varphi(g_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\|_p \left(\sum_1^n \left|<\delta(\omega)\ , \frac{f_i(\omega)}{n|f_i(\omega)|}>\right|^p\right)^{1/P}$$

$$\left(\sum_1^n \left\|M_\varphi(g_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\|_p \left(\sum_1^n \left|\frac{1}{n}\right|^p\right)^{1/P} = \|\varphi\|_p$$

.

<u>Théorème de Pietsch 1 :</u>

soit $T\ :\ X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire P-sommants avec $1 \leq p < \infty$ Alors il existe une probabilité de Radon λ sur $\left(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\right)$ telle que :

$$\forall\, x \in X \quad \|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_K |<x^*,\ \ x>|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inversement s'il existe une une probabilité de Radon λ sur $\left(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\right)$ et $C > 0$ vérifiant la relation sus citée Alors :

L'opérateur T est p-sommant et $\pi_p(T) \leq C$.

<u>Théorème 2 : Théorème de Pietsch</u>

Soit $T\ :\ X \longrightarrow Y$ un opérateur entre espaces de Banach X et Y

Supposons $1 \leq p < \infty$ et K compact alors

T est p-sommant si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur K et une constante C telle que $\forall x \in X\ \|T(x)\| \leq C \left(\int_K |<x^*, x>|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$

Propriété d'idéal

Soit $T \in \pi_p(X,Y)$, $v : E \longrightarrow X$ linéaire et continu avec E espace de Banach.

Soit ω : Y$\longrightarrow F$ linéaire , continu et positif avec F espace de Banach réticulé

Alors : $\omega \circ T \circ v$ est p-sommant et $\|\omega \circ T \circ v\| \leq \|\omega\| \ \pi_p(T) \ \|v\|$

Preuve :

$$E \xrightarrow{v} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\omega} F$$

et pour tout $x \in E$ on a $\| \omega \circ T(v(x))\| \leq \|\omega\| \ \|T(v(x))\|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, x_2 \dots x_n\} \subset E$ Alors $\{v(x_1), v(x_2), \dots v(x_n)\} \subset X$

$$T \in \pi_p(X,Y) \Longrightarrow \left(\sum_1^n \left\|T\left(v\left(x_i\right)\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \xi >\right|^p\right)^{1/P}$$

On pose $\eta = \frac{v^*}{\|v\|} \in B^*(X) \Longrightarrow v^* = \eta \ \|v\|$ alors

$$\left(\sum_1^n \left\|T\left(v\left(x_i\right)\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \xi >\right|^p\right)^{1/P} \leq$$

$$\pi_p(T) \sup_{\xi \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \eta \, \|v\| >\right|^p\right)^{1/P} \leq \pi_p(T) \, \|v\| \sup_{\eta \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \eta >\right|^p\right)^{1/P}$$

$$\left(\sum_1^n \left\|\omega \circ T\left(v\left(x_i\right)\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq \|\omega\| \ \pi_p(T) \, \|v\| \, sup_{\eta \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \eta >\right|^p\right)^{1/P}$$

$$\left(\sum_1^n \left\|\omega \circ T\left(v\left(x_i\right)\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq C \ sup_{\eta \in B^*(x)} \left(\sum_1^n \left|< v\left(x_i\right), \eta >\right|^p\right)^{1/P}$$

avec $C = \|\omega\| \, \pi_p(T) \, \|v\| \geq 0$ d'ou $\omega \circ T \circ v$ est p-sommant

et $\|\omega \circ T \circ v\| \leq \|\omega\| \, \pi_p(T) \, \|v\|$.

Corollaire (injectivité) 1 :
Soit $i\ :\ Y_0 \longrightarrow Y$ une isométrie Alors $T \in\ \pi_p\left(X, Y_0\right) \Longleftrightarrow i \circ T\ \in\ \pi_p(X, Y)$

Preuve :

$$X \overset{T}{\rightarrow} Y_0 \overset{i}{\rightarrow}\ Y$$

1. $T \in\ \pi_p\left(X, Y_0\right)$ montrons $i \circ T\ \in \pi_p(X, Y)$

   $\forall x \in X, \left\|i \circ T(x)\right\| = \left\|T(x)\right\|$ $\left(i\ :\right.$ une isométrie $\left.\right)$ or T est p-sommant

   $\Longrightarrow \forall n \in\ \mathbb{N}$ et $\left\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right\}\ \subset X$ on a

   $$\left(\sum_1^n\left\|T\left(\omega_i\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq\ \pi_p(T)\ \ sup_{\xi \in B^*(x)}\ \left(\sum_1^n\left|<\omega_i\ , \xi\ >\right|^p\right)^{1/P}$$

   or $\left(\sum_1^n\left\|\ i \circ T\left(\omega_i\right)\right\|^p\right)^{1/P} =\ \left(\sum_1^n\left\|T\left(\omega_i\right)\right\|^p\right)^{1/P}$ alors

   $$\left(\sum_1^n\left\|\ i \circ T\left(\omega_i\right)\right\|^p\right)^{1/P}\ \leq\ \pi_p(T)\ sup_{\xi \in B^*(x)}\ \left(\sum_1^n\left|<\omega_i, \xi\ >\right|^p\right)^{1/P}$$

   d'ou $i \circ T$ est P-sommant $\left(ie\ \ :\ i \circ T \in \pi_p(X, Y)\right)$

2. Inversement

   $i \circ T\ \in\ \ \pi_p(X, Y) \Longrightarrow\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}\ \ et\ \left\{u_1, u_2, \ldots, u_n\right\}\ \subset X$ on a

   $$\left(\sum_1^n\left\|i \circ T\left(u_i\right)\right\|^p\right)^{1/P}\ \leq\ \pi_p(i \circ T)\ sup_{\xi \in B^*(x)}\ \left(\sum_1^n\left|<u_i, \xi>\right|^p\right)^{1/P}$$

   $$\forall x \in X, \left\|i \circ T(x)\right\| = \left\|T(x)\right\|, (\text{i : une isométrie})$$

   $$\left(\sum_1^n\left\|T\left(u_i\right)\right\|^p\right)^{1/P} = \left(\sum_1^n\left\|\ i \circ T\left(u_i\right)\right\|^p\right)^{1/P}$$

   $$\left(\sum_1^n\left\|T\left(u_i\right)\right\|^p\right)^{1/P}\ \leq\ \pi_p(i \circ T\ )\ sup_{\xi \in B^*(x)}\ \left(\sum_1^n\left|<u_i\ , \xi\ >\right|^p\right)^{1/P}$$

   Alors T est p-sommant $\left(ie\ :\ T \in \pi_p\left(X, Y_0\right)\right)$

Corollaire 2 :

Soit X_0 un sous espace d'un espace de Banach X

$T \in \pi_p(X,Y)$ et $T/X_0 \in \pi_p(X,Y)$ alors $\pi_p(T/X_0) \le \pi_p(T)$

Preuve :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X_0 \arrow[ur, "T/X_0"'] & \end{tikzcd}$$

On a $T/X_0 = T \circ i^{-1}$

$$\|T/X_0\| = \sup_{\|x\|=1} \|T/X_0(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|T \circ i^{-1}(x)\right\| \le \sup_{\|x\|=1} \|T\| \left\|i^{-1}(x)\right\| \le$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|T\| \|i(x)\|^{-1} = \sup_{\|x\|=1} \|T\| \|x\|^{-1} = \|T\|$$

Alors $\|T/X_0\| \le \|T\|$ et $\pi_p(T/X_0) \le \pi_p(T)$

Proposition 1 :
Soit $1 \leq p \leq \infty$ et X un espace de Banach complètement réticulé.
Alors , Les propriétés suivantes de la constante C de l'opérateur sous linéaire T : X $\longrightarrow Y$ sont équivalentes :

1. L'opérateur $T \in \pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) < C$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} v$: $L_p^n :\longrightarrow X$ on a $\pi_p(T\ v) \leq C \left\|v\right\|$.

Preuve :

Montrons 1) $\Longrightarrow$ 2). on a $L_p^n \xrightarrow{v} X \xrightarrow{T} Y$

$T \in \pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) < C$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : L_p^n :\longrightarrow X$

Alors d'après propriété d'idéal $Tv \in \pi_p\left(L_p^n, Y\right)$ et $\pi_p(Tv) < C\,\|v\|$

Inversement montrons 2) $\Longrightarrow$ 1)

Soit $\left(e_i\right)_{1\leq i\leq n}$ une base canonique de L_p^n et pour tout $i \in \left\{1,2,\ldots,n\right\}$

On pose $x_i = v\left(e_i\right) \in X$.

$$\left\|v\right\| = \sup_{\xi\in B\left(x^*\right)} \left(\sum_1^n \left|<x_i\ ,\xi\ >\right|^p\right)^{1/P}$$

Alors

$$\left(\sum_1^n \left\|T\left(x_i\right)\right\|^p\right)^{1/P} = \left(\sum_1^n \left\|T\left(v\left(e_i\right)\right)\right\|^p\right)^{1/P} \leq C\left\|v\right\| \leq C \sup_{\xi\in B\left(x^*\right)} \left(\sum_1^n \left|<x_i,\xi>\right|^p\right)^{1/P}$$

D'où T est p-sommant et $\pi_p\left(T\right) < C$.

Théorème 3 :
Tout operateur linaire de rang fini est p-sommant.

Chapitre IV

Factorisation

1) Théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert.

2) Théorème de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace $L^P(\Omega, \mu)$, $0 < p \leq +\infty$.

3) Factorisation d'un opérateur sous linéaire par un espace de Köthe.

4) Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés.

5) Théorème de Factorisation de Pietsch pour les opérateurs sous linéaires p-sommants.

1 Théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert.

Définitions, notations et résultats préliminaires

Soit (G, m) un espace de probabilité et $\left(\varepsilon_n(t)\right)_n$ une suite de variables de Bernoulli, c'est-à-dire une suite de variables aleatoires independantes équidistribuées Prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $= \frac{1}{2}$

($\varepsilon_n : \{-1,+1\}^N \longrightarrow \{-1,+1\}$ la n-ième coordonnée)

Définition 1-1 :

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur entre espaces de Banach X et Y,

1. On dit que u est de cotype q $(2 \leq q < \infty)$ s'il existe une constante λ telle que : $\{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \left\{x_1, \ldots \ldots x_n\right\} \subset X$
$$\left(\sum_1^n \left\| u\left(x_i\right)\right\|^q\right)^{1/q} \leq \lambda \left(\int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|^2 dm\right)^{1/2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ..(1)$$
On note $C_q(u)$ la plus petite constante λ vérifiant (1)

2. On dit que u est de type p $(1 < p \leq 2)$ s'il existe une constante λ telle que : $\{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \left\{x_1, \ldots \ldots x_n\right\} \subset X$
$$\left(\int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i u\left(x_i\right)\right\|^2 dm\right)^{1/2} \leq \lambda \left(\sum_1^n \left\|x_i\right\|^p\right)^{1/p} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$
On note $T_p(u)$ la plus petite constante λ vérifiant (2)

3. On dit que u se factorise par un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H et des opérateurs bornés v : X $\longrightarrow$ H et $w : H \longrightarrow Y$ tels que $u = wv$ et on pose $\gamma_2(u) = inf\ \{\|v\|, \|w\|\}$, où l'infimum porte sur toutes les factorisations de cette forme.

On note $\Gamma_2(X, Y)$: l'espace des opérateurs de X dans Y qui se factorisent par un espace de Hilbert.

Définition 1-2 :

Un espace de Banach X est dit de cotype q (respectivement de type p) si L'opérateur identité sur X noté Id_X est de cotype q (respectivement de type p). On note simplement $C_q(X)$ *et* $T_p(X)$ au lieu de $C_q\left(Id_X\right)$ et $T_p\left(Id_X\right)$.

Remarque :

Un espace X ne peut être de type 2 et de cotype 2 que s'il est isomorphe à un espace de Hilbert.

Théorème 1-1 :

Soient X,Y,Z trois espaces de Banach

Soient $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur de type 2 et $v : Y \longrightarrow Z$ de cotype 2.

Alors le composé vu se factorise par un espace de Hilbert et

$$\gamma_2(vu) \leq T_2(u)\, C_2(v)$$

Théorème 1-2 :

Si E est de type 2 et F de cotype 2 , tout opérateur linéaire et continu de E dans F se factorise par un espace de Hilbert. En particulier si E est de type 2 et de cotype 2, il est isomorphe à un espace de Hilbert.

Remarque 1 :

$L^p, 2 \leq p < \infty$ est de type 2

Si E est type 2 alors $L^p(E)$ est de type 2 pour $2 \leq p < \infty$

Si E est type 2 , il en est de même de ses sous espaces et de ses quotients

Si E est type 2 , son dual est de cotype 2

l^1 est de cotype 2.

Remarque 2 :

$L^p(.)$, est de cotype 2 pour $1 \leq p \leq 2$

Si E est de cotype 2 alors $L^P(\Omega, \mu, E)$ est de cotype 2 pour $1 \leq p \leq 2$.

Définition 1-3 :

Soit A une partie finie $\subset \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in G \ \ w_A(x) = \prod_{k\in A} \varepsilon_k(x)$

Si A est vide on pose $w_A(x) = 1$

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots \varepsilon_n\right\}$

Pour tout ensemble A on note $|A|$ le cardinal de A.

On note P_n l'ensemble des 2^n parties de $\{1, 2, \dots .n\}$

soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur entre espaces de Banach on suppose qu'il existe une constante λ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_A / A \in P_n\}$ on a :

$$\int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i u\left(x_i\right) \right\|^2 dm \leq \lambda^2 \int \left\| \sum_{A\in P_n} w_A x_A \right\|^2 dm \ \dots\dots (*)$$

Dans ces conditions on note $R(u)$ la plus petite constante vérifiant (*)

S'il n'existe pas de telle constante , on pose $R(u) = +\infty$

Théorème 1-3 :

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur entre espaces de Banach , on suppose que X' et Y sont de cotype 2. Alors :

$$u \text{ se factorise par un espace de Hilbert} \Longleftrightarrow R(u) < \infty$$

et on a : $\gamma_2(u) \leq R(u)\, C_2\left(X'\right) C_2(Y)$.

2 Théorème de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace $L^P(\Omega, \mu)$, $0 < p \leq +\infty$

Théorème 2-1 :

Soient p , q , r trois nombres réels tels que $0 < p < q \leq \infty$ $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un espace quasi-normé , (Ω, μ) un espace mesuré quelconque et u : E$\longrightarrow L^P(\Omega, \mu)$ un opérateur linéaire continu. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a- Pour toute suite (x_n) dans E ;

$$\left(\int\left(\sum\left|u\left(x_n\right)\right|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\sum\|x_n\|^q\right)^{1/q}$$

b- L'opérateur u admet la factorisation : $E\xrightarrow{V} L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^P(\Omega, \mu)$ avec

$$\|V\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|g\|_{L^r} \leq 1$$

Corollaire 2-1 :

Soient (X, ν) , (Ω, μ) deux espaces mesurés et u un opérateur linéaire continu et positif de $L^q(X, \nu)$ dans $L^p(\Omega, \mu)$ (ie $u : L^q(X, \nu) \longrightarrow L^p(\Omega, \mu)$),
$0 < p < q \leq \infty$, $q \geq 1$. L'opérateur u admet la factorisation :

$$L^q(X, \nu) \xrightarrow{v} L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu)$$

$$\text{avec } \|v\| \leq 1 \text{ et } \|g\|_{L^r} \leq 1 \left(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$

Théorème 2-2 :

Soient p , q deux nombres réels tels que $0 < p < q \leq 2$, et E un espace quasi-normé de type q .Tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ admet la factorisation par $L^q(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de

$$L^r(\Omega, \mu), \left(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$

3 Factorisation d'un opérateur sous linéaire par un espace de Köthe

Définition 3-1 : Espace de Köthe

Définition :

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré complet $\sigma - fini$, un espace de Banach $L \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ de fonctions localement intégrables sur Ω à valeurs réelles est un espace de Köthe si :

1. Pour $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ *et* $g \in L$ *telleque* $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ pp pour tout $\omega \in \Omega$ On a $f \in L$ et $\|f\|_L \leq \|g\|_L$
2. Pour chaque $A \in \Sigma$ $(ie : \mu(A) < +\infty)$ la fonction caractéristique $\chi_A \in L$

Remarque :

$(L, \| \|)$ est l'éspace de Köthe où $\|\|$ est l'application de Köthe

$\| \| : L_0(\mu) \longrightarrow [0, +\infty[$ est L'application de Köthe telle que :

$$f \longrightarrow \|f\| = sup\left\{\left|\int fgd\mu\right| \; g \in L' \;, \; \|g\|_{L'} \leq 1\right\}$$

Définition :

a - On dit qu'un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à droite par un espace de Köthe s'ils existent un espace de Köthe L , un opérateur sous-linéaire $S : X \longrightarrow L$ et un opérateur linéaire positif $\upsilon : L \longrightarrow E$ tel que $T = \upsilon \circ S$

<table>
<tr>
<td>$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & E \\ & & L \arrow[u, "\upsilon"'] \end{tikzcd}$$</td>
<td>L : espace de Köthe
$T : X \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$S : X \longrightarrow L$ opérateur sous linéaire
$\upsilon : L \longrightarrow E$ opérateur linéaire positif
$T = \upsilon \circ S$</td>
</tr>
</table>

Pour un tel T on pose :

$\rho(T) = inf \left\{ \|S\| \, \|\upsilon\| , \ T = \upsilon \circ S \ \text{ avec } S : X \longrightarrow L \ \text{ et } \ \upsilon : L \longrightarrow E, \ \ L \right.$ espace de Köthe $\left. \right\}$

b - On dit qu'un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à gauche par un espace de Köthe si ils existent un espace de Köthe L, un opérateur linéaire $\omega : X \longrightarrow L$ et un opérateur sous linéaire $R : L \longrightarrow E$ tel que $T = R \circ \omega$

<table>
<tr>
<td>$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\omega"'] & & \mathrm{E} \\ & & L \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$</td>
<td>L : espace de Köthe
$T : X \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$R : L \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$\omega : X \longrightarrow L$ opérateur linéaire positif
$T = R \circ \omega$</td>
</tr>
</table>

Pour un tel T on pose :

$\rho(T) = inf \left\{ \|R\| \, \|\omega\| , \ T = \upsilon \circ S \ \text{ avec } \omega : X \longrightarrow L \ \text{ et } \ r : L \longrightarrow E, \ L \right.$ espace de Köthe $\left. \right\}$

Définitions , notations et préliminaires 3-3 :

1. Soit X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$, on note par :
   $X\left(l_p^n\right)$:l'espace des suites $x = \left(x_1, x_2, \ldots .., x_n\right)$ d'éléments de X tels que

$$\|x\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\| \sum_1^n \left(\left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\| \qquad si \quad p < \infty$$

$$\|x\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} \left|x_i\right| \right\| \qquad si \quad p = \infty$$

   L'espace $X\left(l_p^n\right)$ est doté d'un ordre naturel $x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i$.

2. Soit X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$, on note par :
   $l_p(X)$(respectivement $l_p^n(X)$) : l'espace des suites $\left(x_i\right)$(resp $\left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}$) dans X muni de la norme

$$\left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p(X)} = \left(\sum_1^\infty \left\|x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\left(resp \ \left\|\left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_p(X)} = \left(\sum_1^n \left\|x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

3. $l_p^w(X)$ et $l_p^{w,n}(X)$ l'espace des suites $\left(x_i\right)\left(resp\left(x_i\right)_{1 \leq i \leq n}\right)$ dans X muni de la norme

$$\left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p^w(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}} \left(\sum_1^\infty \left| < x_i, \xi > \right|^p\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\left\|\left(x_i\right)\right\|_{l_p^{w,n}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}} \left(\sum_1^n \left| < x_i, \xi > \right|^p\right)^{\frac{1}{P}}$$

Définitions 3-4 :

Soit E un espace de Banach arbitraire, X un espace de Banach réticulé et soit $1 \leq p \leq \infty$.

i- Un opérateur sous linéaire $T : E \longrightarrow X$ est dit **p-convexe** s'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les opérateurs
$T_n : l_p^n(E) \longrightarrow X\left(l_p^n\right)$
$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \longrightarrow \left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), \ldots, T\left(x_n\right)\right)$ sont uniformément bornés par C.

ii- Un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow E$ tel que E est réticulé est dit **p-concave** s'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
les opérateurs $T_n : X\left(l_p^n\right) \longrightarrow l_p^n(E)$
$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \longrightarrow \left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), \ldots, T\left(x_n\right)\right)$ sont uniformément bornés par C.
La plus petite constante C vérifiant ces propriétés sera notée respectivement $C^P(T)$ et $C_p(T)$

iii- Un espace de Banach réticulé X est p-convexe (respectivement p-concave) si id_X est p-convexe (respectivement p-concave).

Remarque :

Tout opérateur sous linéaire p-convexe (resp p-concave) est borné et

$$\|T\| \leq C^P(T) \left(resp \, \|T\| \leq C_p(T)\right)$$

Exemple :

L_p pour $(1 \leq p < \infty)$ est p-convexe et p-concave et

$$C^P(T) = C_p(T) = 1$$

Théorème 3-1

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré p, q et s tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$ et s defini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.
Soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire et continu Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1)– Il existe une constante positive finie $C > 0$ telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1<i<n}$ dans X on a T est q-convexe .

2)– Il existe une fonction $\mathrm{g} \in \mathrm{B}^+_{\mathrm{L_s}(\Omega,\mu)}$ telle que pour tout $x \in X$, on a :

$$\left(\int_\Omega \left| \frac{T(x)}{\mathrm{g}} \right|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \, \|x\|_X$$

3)– Ils existent une fonction $\mathrm{g} \in \mathrm{B}^+_{\mathrm{L_s}(\Omega,\mu)}$ et $S : X \longrightarrow L_q(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire tels que $\|S\| \leq C$ et $T = T_{\mathrm{g}} \circ S$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega, \mu) \\ & S \searrow & \uparrow T_{\mathrm{g}} \\ & & L_q(\Omega, \mu) \end{array}$$

Proposition 3-1 :

Soient X un espace de Banach , L un espace de Köthe sur un espace mesuré $\sigma - fini\left(\Omega, \sum, \mu\right)$. $1 \leq p \leq q < +\infty$ et s tel que : $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.
soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire et continu
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) T est q-convexe

2) L est q-convexe et p-concave

Alors il existe une fonction $h \in B^+_{L_s(\Omega,\mu)}$ et $R : X \longrightarrow L$ un opérateur sous linéaire et continu tels que $\|R\| \leq C$ et $T = T_h \circ R$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p(\Omega, \mu) \\ & R \searrow & \uparrow T_h \\ & & L \end{array}$$

Soit L un espace de Köthe sur un espace mesuré $\sigma - fini$ $\left(\Omega, \sum \mu\right)$

Théorème 3-2 : (Théorème de factorisation de Reisner)

Soient $1 \leq p \leq q < \infty$ et s défini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} L$ est p-convexe et q-concave si et seulement si, il existe $k > 0$ tel que pour tout $\mathrm{g} \in \mathrm{L_s}(\mu)$
l'opérateur de multiplication T_{g} (ie : $T_{\mathrm{g}}(\mathrm{f}) = \mathrm{gf}$ admet une factorisation comme composition de deux opérateurs de multiplication par $T_{h_1}\ T_{h_2}$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} L_q(\mu) & \overset{T_{\mathrm{g}}}{\rightarrow} & L_p(\mu) \\ & T_{h_1} \searrow & \uparrow T_{h_2} \\ & & L \end{array}$$

Avec $\left\|T_{h_1}\right\| \left\|T_{h_2}\right\| \leq k$. En plus si $C_p^{cav}(L)$ et $C_p^{vex}(L)$ sont données on peut choisir

$K = (1+\varepsilon)\ C_p^{cav}(L)\ C_p^{vex}$ tel que $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Si d'autre part k est donné alors $C_p^{cav}(L)\, C_p^{vex} < k^2$.

4 Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés

Définitions et Rappels 4-1 :

On appelle un $\mathbb{R}$ **-treillis** un espace vectoriel L sur $\mathbb{R}$, réticulé , normé tel que :

$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$ pour x , $y \in L$.

Un sous espace $I \subset L$ sera appelé **idéal** si $x \in I, y \in L, |y| \leq |x| \implies y \in I$

Un idéal $I\left(a_1, a_2, \dots \dots \dots .a_k\right)$ engendré par $a_1,a_2,\dots \dots \dots\ a_k \in L$ est donc

$$\left\{x \in L\ ,\ \exists \lambda \in \mathbb{R}_+\ ;\ |x| = \lambda\left(\left|a_1\right| + \left|a_2\right| + \dots \left|a_n\right|\right)\right\}$$

Un opérateur borné $h\ :\ L \longrightarrow M$ d'un $\mathbb{R}$ **-treillis** dans un autre est un homomorphisme ou $h\left(x^+\right) = h(x)^+$ (et donc $h\left(x \cup y\right) = h\left(x\right) \cup h\left(y\right)$). Si de plus la clôture de l'image de h est un idéal de M alors l'homomorphisme h sera appelé homomorphisme fort.

Opérateurs de type $\leq$ p et $\geq$ p.

Soient E un espace de Banach , L un $\mathbb{R}$ **-treillis** et $1 \leq p \leq \infty$,

1. Un opérateur $U\ :\ E \longrightarrow L$ est dit de type $\geq p$ s'il existe $k > 0$ tel que

$$\left\|\left(\left|Ux_1\right|^p + \left|Ux_2\right|^p + \dots \left|Ux_n\right|^p\right)^{1/p}\right\| \leq k\left(\left\|x_1\right\|^p + \left\|x_1\right\|^p + \dots \left\|x_1\right\|^p\right)^{1/p}$$

Pour $x_1,x_2,\dots\ x_n \in E,\ n \in \mathbb{N}$. la plus petite constante k possible sera notée $k^{(P)}\left(U\right)$. si U n'est pas de type $\geq p$, on pose $k^{(P)}\left(U\right) = +\infty$.

Remarque :

$$\|U\|\ \leq k^{(P)}\left(U\right) \text{ et } k^{(1)}\left(U\right) = \|U\|$$

2. Un opérateur $V : L \longrightarrow E$ est dit de type $\leq p$ s'il existe $k > 0$ tel que $\left(\|Vx_1\|^p + \|Vx_1\|^p + \dots \|Vx_1\|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\left(|x_1|^P + |x_2|^P + \dots |x_n|^P\right)^{1/p}\right\|$ pour $x_1, x_2, \dots x_n \in L, n \in \mathbb{N}$. la plus petite constante k possible sera notée $k^{(P)}(U)$. si U n'est pas de type $\leq p$, on pose
   $k_{(p)}(V) = +\infty$. $\|V\| \leq k_{(p)}(V)$ et $k_{(\infty)}(V) = \|V\|$

3. Un $\mathbb{R}$-treillis L est dit de type $\geq p$ (*resp* de type $\leq p$) si l'identité
   $I_L : L \longrightarrow L$ est de ce type. On pose
   $k_{(p)}(L) = k_{(p)}\left(I_L\right)$ et $k^{(P)}(L) = k^{(P)}\left(I_L\right)$.

Théorème 4-1 :

Soit E un espace de Banach et L un $\mathbb{R}$-treillis complet.

1. Si $U : E \longrightarrow L$ est de type $\geq p$ et si L est de type $\leq p$, on a la factorisation $U = h \circ U'$ avec U' un opérateur de E dans $L^P(\Omega, \mu)$
$\|U'\| \leq k^{(P)}(U)$ et h un homomorphisme fort de $L^P(\Omega, \mu)$ dans L
$U : E \longrightarrow L$, $E \overset{U'}{\longrightarrow} L^P(\Omega, \mu) \overset{h}{\to} L$ et $U = h \circ U'$
2. Si $V : L \longrightarrow E$ est de type $\leq p$ et L est de type $\geq p$, on a :
La factorisation $V = V' \circ h$ avec $V' : L^P(\Omega, \mu) \longrightarrow E, \|V'\| \leq k_{(p)}(V)$
et $h : L \longrightarrow L^P(\Omega, \mu)$ un homomorphisme fort ,$\|h\| \leq k^{(P)}(L)$.

1)	$E \quad \overset{U}{\to} \quad L$	L : $\mathbb{R}$-treillis complet de type $\leq p$
	$U' \searrow \quad \uparrow$ h	$U : E \longrightarrow L$, (U de type $\geq p$)
	$L^P(\Omega, \mu)$	$U' : E \longrightarrow L^P(\Omega, \mu)$
	$U = h \circ U'$	$h : L^P(\Omega, \mu) \longrightarrow L$

2)	$L \quad \overset{V}{\to} \quad E$	L : $\mathbb{R}$-treillis complet de type $\leq p$
	$h \searrow \quad \uparrow V'$	$V : L \longrightarrow E$, (V de type $\geq p$)
	$L^P(\Omega, \mu)$	$V' : L^P(\Omega, \mu) \longrightarrow E$
	$V = V' \circ h$	$h : L \longrightarrow L^P(\Omega, \mu)$

Théorème 4-2 :

Si L et M sont deux $\mathbb{R}$-treillis complets de types respectivement ≥ 2 et ≤ 2 tout opérateur $U : L \longrightarrow M$ admet deux factorisations :

1. $U = h' \circ U', U' : L \longrightarrow L^2(\Omega', \mu'), \|U'\| \leq K_G \|U\| k^{(2)}(L)$ *et* $h' : L^2(\Omega', \mu') \longrightarrow M, \|h'\| \leq k_{(2)}(M)$ et h' un homomorphisme fort
2. $U = U'' \circ h'', h'' : L \longrightarrow L^2(\Omega'', \mu''), U'' : L^2(\Omega'', \mu'') \longrightarrow M, \|h''\| \leq k^{(2)}(L), \|U''\| \leq K_G k^{(2)}(M)\ \|U\|$ et h'' un homomorphisme fort.

<table>
<tr>
<td>1)</td>
<td>$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "U'"'] & M \\ & L^2(\Omega, \mu) \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd}$$
$U = h' \circ U'$</td>
<td>L : $\mathbb{R}$-treillis complet de type ≥ 2
M : $\mathbb{R}$-treillis complet de type ≥ 2
$U : L \longrightarrow M$
$U' : L \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$
$h' : L^2(\Omega, \mu) \longrightarrow M$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2)</td>
<td>$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "U"] \arrow[dr, "h''"'] & M \\ & L^2(\Omega, \mu) \arrow[u, "U''"'] \end{tikzcd}$$
$U = h'' \circ U''$</td>
<td>L : $\mathbb{R}$-treillis complet de type ≥ 2
M : $\mathbb{R}$-treillis complet de type ≥ 2
$U : L \longrightarrow M$
$U'' : L \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$
$h'' : L^2(\Omega, \mu) \longrightarrow M$</td>
</tr>
</table>

5 Opérateurs sous linéaires p-sommants

Soient X et Y deux espaces de Banach dont Y est réticulé et $T \in SB(X,Y)$ $\left(ie\, T\, :\, X \longrightarrow Y\right.$ opérateur sous linéaire borné $\left.\right)$. On dira que T est P-sommant Pour $1 < P < \infty$ si : $\exists\, C > 0\;\; tq\;\; \forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \left\{x_1, x_2, \ldots \ldots x_n\right\} \subset X$

$$\left(\sum_1^n \left\|T\left(x_i\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\;\; sup\left\{\left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^p\right)^{1/p}, \xi \in B_{X^*}\right\}$$

On note par

$$\pi_p\left(X,Y\right) = \left\{T \text{ Sous lineaires P-sommants }\right\} \text{ et}$$

$$\pi_p\left(T\right) = inf\left\{C > 0 \text{ vérifiant la definition }\right\}$$

Propriétés fondamentales

π_p définit une norme sur $\pi_p(X,Y)$ et $\left(\pi_p(X,Y), \pi_p\right)$ est un espace de Banach

Proposition 5-1 :
soit U un opérateur linéaire ($U \in \mathcal{L}(X,Y)$), si U est de rang fini alors U est un opérateur p-sommant pour tout $1 \leq p \leq \infty$

Théorème 5-1 :(Théorème de Pietsch)
Soit $T\;\; : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire P-sommants avec $1 \leq p < \infty$
Alors il existe une probabilité de Radon λ sur $\left(B_{X^*}, \sigma\left(X^*, X\right)\right)$ telle que :

$$\forall\, x \in X\; \|T(x)\| \leq C\; \pi_p(T) \left(\int_K |< x^*,\;\; x >|^p d\mu\left(x^*\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inversement s'il existe une une probabilité de Radon λ sur $\left(B_{X^*}, \sigma\left(X^*, X\right)\right)$ et $C > 0$ vérifiant la relation sus citée Alors :
L'opérateur T est p-sommant et $\pi_p(T) \leq C$.

Théorème 2 : Théorème de Pietsch

Soit $T : X \longrightarrow Y$ un operateur entre espaces de Banach X et Y
Supposons $1 \leq p < \infty$ et K compact alors
T est p-sommant si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur K et une constante C telle que $\forall x \in X$ $\|T(x)\| \leq C\left(\int_K |< x^*, x >|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$

<u>Théorème 5-3 : (Théorème de Factorisation de Pietsch)</u>

Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 \leq p \leq \infty$ K sous ensemble faiblement compact de B_{X^*},et B deB_{Y^*}.

Pour tout opérateur $U : X \longrightarrow Y$ les assertions suivantes sont équivalentes :

i- U est p-sommant

ii- ils existent une mesure de probabilité μ sur K , un sous espace $X_p\ de\ L_p(\mu)$ et un opérateur $\hat{U} : X_p \longrightarrow Y$ tel que :
(a) $j_p \circ i_X(X) \subset X_p$ et $(b)\,\hat{U} \circ j_p \circ i_X(x) = Uxx \in X$, $j_p^X : i_X(X) \longrightarrow X_p$ et vérifiant :

$$\begin{array}{ccc}
X & \overset{U}{\rightarrow} & Y \\
i_X\downarrow & & \uparrow \hat{U} \\
i_X(X) & \overset{J_P^X}{\rightarrow} & X_p \\
\cap & & \cap \\
C(K) & \overset{J_P}{\rightarrow} & L_P(X)
\end{array}$$

iii- ils existent une mesure de probabilité μ sur K et un opérateur $\tilde{U} : L_p(\mu) \longrightarrow l_\infty^B$ tel qu'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
X & \overset{U}{\rightarrow} & Y & & & \\
 & & & i_Y\searrow & & \\
i_X\downarrow & & & & & \ell_\infty^B \\
 & & & \nearrow \tilde{U} & & \\
C(K) & \overset{J_P}{\rightarrow} & L_P(\mu) & & &
\end{array}$$

iv- Ils existent un espace de probabilité $\left(\Omega, \sum, \mu\right)$ et un opérateur
$\tilde{U} : L_p(\mu) \longrightarrow \ell_\infty^B$ *et* $v : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ tel qu'on a le diagrame suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[dd, "v"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
 & & \ell_\infty^B \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "J_P"] & L_P(\mu) \arrow[ur, "\tilde{U}"'] &
\end{tikzcd}$$

Conclusion et Perspectives

La factorisation est un procédé essentiel en théorie des opérateurs, elle permet d'étudier les propriétés topologiques et de résoudre des questions fondamentales en théorie des fonctions et équations fonctionnelles.

Les opérateurs linéaires constituent la base et le point de départ de notre travail. Les inégalités de Khintchine, les notions de p-convexité et q- concavité sont les clés de la factorisation.

Les opérateurs sous linéaires p-sommants forment une classe d'opérateurs bornés et factorisables par des conditions affaiblies du théorème central de Pietsch. Cette factorisation est basée sur des notions fondamentales de topologie, d'analyse fonctionnelle et de la théorie de la mesure.

Le lien entre les inégalités de Khintchine et inégalité de Pietsch sont difficiles à démontrer à notre niveau, de plus l'application des procédés de factorisation aux opérateurs non linéaires et opérateurs non bornés posent des problèmes insurmontables qui constituent pour nous des perspectives d'avenir.

Références Bibliographique

[01] : Walte Hengartner, Corina Reischner , Marcel Lambert - Introduction à L'analyse fonctionnelle-presses de l'université de Québec.

[02] : Jean Saint Raymond - Topologie , calcul différentiel et variable complexe –Institut de mathématiques de jussieu-université Pierre et Marie Curie, paris 6

[03] : Vo - Khac Khoan - Distribution , Analyse de Fourrier , Opérateurs aux dérivées partielles, Tome1-Librairie Vubert , 63, Bd Saint Germain, Paris.

[04] : Francis Hirsch , Gilles Lacombe - Éléments d'analyse fonctionnelle , cours et exercices-DUNOD.

[05] : L. Kantorovitch , G. Akilov - Analyse Fonctionnelle (Tome 1) opérateurs et fonctionnelles linéaires - ÉDITION MIR. MOSCOU

[06] : Bernard Maurey - Quelques problèmes de factorisation d'opérateurs linéaires Congré international des mathématiques,1974.

[07] : G. Pisier - Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert .Annales scientifiques de l'ENS. 4^e série, tome 13,n 1(1980),page 23-24.

[08] : J.L Krivine - Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés. séminaires d'analyse fonctionnelle (1973-17-974) exp.n 22 et 23 p1-22.

[09] : Dahmane Achour and Lahcen Mezrag - Sur les opérateurs sous linéaires p-lattis sommants .Fasc Mathematica , Tome XIV(2007),237-250.

[10] : Joe Diestel -Departement of mathematics and computer science- kent state university Hans jarchow – Mathematiches institut – universität Zürich) , Andrew Tonge - Departement of mathematics and computer science- kent state university - ABSOLUTLY SUMMUNG OPERATORS.

[11] : Abdelmoumene Tiaiba - Les opérateurs L_p-sommants, version commutative et non commutative, université Hadj Lakhdar – Batna.

[12] : Bernard Maurey - Théorèmes de factorisations pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^P.