FACTORISATION DES OPÉRATEURS P-SOMMANTS PAR CERTAINS ESPACES DE BANACH

PRÉSENTÉ PAR AIT- AMEDJKANE MED- SAID ENCADRÉ PAR : M. BADIJA SALIM

RÉSUMÉ:

Nous présentons dans ce mémoire les méthodes et théories principales de factorisation d'une classe d'opérateurs sous linéaires p – sommants par certains espaces de Banach. Nous avons commencé par les théorèmes principaux de Maurey de factorisations dans le cas linéaire et après un bref rappel sur les opérateurs sous linéaires p-convexes et q-concaves on a annoncé les conditions nécessaires et suffisantes de factorisation des opérateurs sous-linéaires et opérateurs sous-linéaires p-sommant.

Mots clés:
Banach réticulé , Espace de Köthe , Factorisation des opérateurs , Théorème de Pietsch et théorème de Maurey.

INTRODUCTION

Les fondements de la théorie des opérateurs p – sommants reposent sur les travaux entrepris par Alexandre Grothendieck dans les années 1950. En 1967 Albrecht Pietsch a clairement isolé cette classe d'opérateurs et a établi un nombre important de leurs propriétés fondamentales.
Dans ce mémoire Nous présentons les méthodes et théories principales de factorisation de cette classe d'opérateurs sous linéaires p – sommants par certains espaces de Banach.
Notre travail est subdivisé en quatre chapitres
Le chapitre 1 : Généralités sur les espaces normes , espaces de Banach, espaces réticules, espace de Köthe et espaces de Riesz.
Chapitre 2 : Opérateurs linaires et théorèmes fondamentaux : Opérateurs linéaires sur un espaces normé, opérateurs linéaires continu sur un espaces normé, opérateurs réguliers (inversibles) et opérateurs linéaires compacts.
Chapitre 3 : Opérateurs sous-linéaires et opérateurs sous-linéaires p–sommants.
Chapitre 4 : Factorisations des opérateurs et on termine par une conclusion.

1-OPÉRATEUR SOUS LINÉAIRE

Définition 1: Ensemble Réticulé
Un ensemble réticulé est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x et y admettent une borne supérieure $sup\{x, y\}$ et une borne inférieure $inf\{x, y\}$.
Un espace vectoriel ordonné dans lequel toute paire d'éléments a un borne supérieure est appelé espace vectoriel réticulé.
Définition 2: Espace de Riesz
Un espace vectoriel réel X est un espace de Riesz s'il est un ensemble réticulé sur lequel la structure d'espace vectoriel et la structure d'ordre sont compatibles c'est-à-dire satisfont aux axiomes suivants:
1) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$ quel que soit $z \in X$
2) $x \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \geq 0$ pour tout scalaire $\lambda \geq 0$.
Définition 3: Opérateur sous linéaire
Soient X et Y deux espace vectoriels tel que Y réticulé,
Une application $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur sous linéaire si :
1) $\forall\, x, y \in X,\ \ T(x + y) \leq T(x) + T(y)$
2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\, x \in X\ \ T(\lambda x) = \lambda T(x)$

2-DÉFINITION:

Opérateur sous-linéaire P–sommant
Soient X et Y deux espaces de Banach dont Y est réticulé et $T \in SB(X, Y)$ (ie $T : X \longrightarrow Y$ opérateur sous linéaire borné). On dira que T est p-sommant pour $0 < p < \infty$:
$\exists\, C > 0$ tq $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\} \subset X$

$$\left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ sup\left\{\left(\sum_1^n |< x_i\,, \xi >|^p\right)^{1/p}, \xi \in B_{X^*}\right\}$$

On note par:

$\pi_p(X, Y) = \{T\ verifiant\ la\ definition\}$ et
$\pi_p(T) = inf\,\{C > 0\ \ verifiant\ la\ definition\}$

3-DÉFINITION:

Espace de Köthe
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré complet $\sigma - fini$, un espace de Banach $L \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ de fonctions localement intégrables sur Ω à valeurs réelles est un espace de Köthe si :
1) Pour $\mathrm{f} \in \mathrm{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $\mathrm{g} \in \mathrm{L}$ telle que $|\mathrm{f}(\omega)| \leq |\mathrm{g}(\omega)|$ pp pour tout $\omega \in \Omega$ On a $\mathrm{f} \in \mathrm{L}$ et $\|\mathrm{f}\|_L \leq \|\mathrm{g}\|_L$
2) Pour chaque $A \in \Sigma$ (ie: $\mu(A) < +\infty$) la fonction caractéristique $\chi_A \in L$.

4-DÉFINITION:

Factorisation d'un opérateur sous linéaire par un espace de Köthe
a - On dit qu'un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à droite par un espace de Köthe s'ils existent un espace de Köthe L, un opérateur sous-linéaire $S : X \longrightarrow L$ et un opérateur linéaire positif $\upsilon : L \longrightarrow E$ tel que $T = \upsilon \circ S$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & Y \\ & L \arrow[u, "\upsilon"'] \end{tikzcd}$$

L : espace de Köthe
$T : X \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$S : L \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$\upsilon : X \longrightarrow L$ opérateur linéaire positif
$T = \upsilon \circ S$

Pour un tel T on pose:
$\rho(T) = inf\,\|S\|\,\|\upsilon\|\,, T = \upsilon \circ S$ avec $S : X \longrightarrow L$ et $\upsilon : L \longrightarrow E,\ L$ espace de Köthe.
b - On dit qu'un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow E$ est factorisable à gauche par un espace de Köthe si ils existent un espace de Köthe L, un opérateur linéaire $\omega : X \longrightarrow L$ -et un opérateur sous linéaire $R : L \longrightarrow E$ tel que $T = R \circ \omega$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\omega"'] & Y \\ & L \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

L : espace de Köthe
$T : X \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$R : L \longrightarrow E$ opérateur sous linéaire
$\omega : X \longrightarrow L$ opérateur linéaire positif
$T = R \circ S$

Pour un tel T on pose :
$\rho(T) = inf\,\|R\|\,\|\omega\|\,, T = \upsilon \circ S$ avec $\omega : X \longrightarrow L$ et $r : L \longrightarrow E,\ L$ espace de Köthe.

THÉORÈME DE PIETSCH

Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire p-sommants avec $1 \leq p < \infty$ Alors il existe une probabilité de Radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que:

$$\forall\, x \in X\ \ \|T(x)\| \ \leq\ \pi_p(T)\left(\int_{B_{X^*}} |< x, \xi >|^p\, d\lambda(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inversement s'il existe une probabilité de Radon λ sur$(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ vérifiant la relation sus citée Alors : L'opérateur T est p-sommant et $\pi_p(T) < C$.

THÉORÈME

Soit L un espace de Köthe sur un espace mesuré $\sigma - fini$ $(\Omega, \sum \mu)$
Théorème de factorisation de Reisner
Soient $1 \leq p \leq q < \infty$ et s défini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ L est p-convexe et q-concave si et seulement si, il existe $k > 0$ tel que pour tout $\mathrm{g} \in \mathrm{L_s}(\mu)$
l'opérateur de multiplication T_{g} (ie: $T_{\mathrm{g}}(\mathrm{f}) = \mathrm{gf}$ admet une factorisation comme composition de deux opérateurs de multiplication $T_{h_1}\ T_{h_2}$ de la forme:

$$\begin{tikzcd} L_q(\mu) \arrow[r, "T_{\mathrm{g}}"] \arrow[dr, "T_{h_1}"'] & L_p(\mu) \\ & L \arrow[u, "T_{h_2}"'] \end{tikzcd}$$

Avec $\|T_{h_1}\|\,\|T_{h_2}\| \leq k$. En plus si $C_p^{cav}(L)$ et $C_p^{vex}(L)$ sont donnés on peut choisir $K = (1 + \varepsilon)\ C_p^{cav}(L)\ C_p^{vex}$ tel que $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.Si d'autre part K est donné alors $C_p^{cav}(L)\, C_p^{vex} < k^2$.

THÉORÈME

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré p, q et s tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$ et s defini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.
Soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire et continu Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1)– Il existe une constante positive finie $C > 0$ telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1<i<n}$ dans X on a T est q-convexe .

2)– Il existe une fonction $\mathrm{g} \in \mathrm{B}^+_{\mathrm{L_s}(\Omega,\mu)}$telle que pour tout $x \in X$, on a:

$$\left(\int_\Omega \left|\frac{T(x)}{\mathrm{g}}\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,\|X\|_X$$

3)– Ils existent une fonction $\mathrm{g} \in \mathrm{B}^+_{\mathrm{L_s}(\Omega,\mu)}$ et $S : X \longrightarrow L_q(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire tels que: $\|S\| \leq C$ et $T = T_{\mathrm{g}} \circ S$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & L_p(\Omega, \mu) \\ & L_q(\Omega, \mu) \arrow[u, "T_{\mathrm{g}}"'] \end{tikzcd}$$

PROPOSITION

Soient X un espace de Banach , L un espace de Köthe sur un espace mesuré $\sigma - fini\,(\Omega, \sum, \mu)$. $1 \leq p \leq q < +\infty$ et s tel que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.
soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous linéaire et continu si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1) T est q-convexe

2) L est q-convexe et p-concave

Alors il existe une fonction $h \in B^+_{L_s(\Omega,\mu)}$ et $R : X \longrightarrow L$ un opérateur sous linéaire et continu tels que $\|R\| \leq C$ et $T = T_h \circ R$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "R"'] & L_p(\Omega, \mu) \\ & L \arrow[u, "T_h"'] \end{tikzcd}$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[01] : J.L KRIVINE - Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés. séminaires d'analyse fonctionnelle (1973-17-974) exp.n 22 et 23 p1-22.

[02] : BERNARD MAUREY - Théorèmes de factorisations pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^P.

[03] : JOE DIESTEL -Departement of mathematics and computer science- kent state university Hans Jarchow – Mathematiches institut – universität Zürich) , Andrew Tonge - Departement of mathematics and computer science- kent state university - ABSOLUTLY SUMMUNG OPERATORS.

[04] : G. Pisier - Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert .Annales scientifiques de l'ENS. 4e série, tome 13,n 1(1980),page 23-24.