# UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

**Faculté des mathématiques et sciences de la matière**

**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**


## MASTER

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse fonctionnelle**


**Par : Saoud Widad**


**Théme**

# Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle

**Soutenu publiquement le : 04/07/2019**

**Devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| Mr. Chacha Djamal Ahmed | Prof. Université de Kasdi Merbah - Ouargla | Président |
| Mr. Merabet Ismail | M.C.A Université de Kasdi Merbah - Ouargla | Examinateur |
| Mr. Ghazal Abdrrazek | M.C.A Université de Kasdi Merbah - Ouargla | Examinateur |
| Mr. Bensayah Abdallah | M.C.A Université de Kasdi Merbah - Ouargla | Rapporteur |

# Dédication

*Je dédie ce travail à :*

*L'âme de mes parents*

*-A mon frère Youcef*

*et mes sœurs "Fatima et Nora" et à chère tante "Saida",et toute la famille de "Saoud" et "Djelloul".*

*- A mes amies et à mon chère amie "Salima Kihal" .*

*- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.*

*-Et à tous mes professeurs*

# Remerciement

*Tout d'abord, je remercie Dieu pour les bénédictions qui ont été faites.*

*ainsi que à toute les membres de ma famille.*

*et plus particulièrement à* ***"Bensayah Abdallah"****, qui a proposé le thème de ce mémoire ainsi que tous ses conseils et son orientation du début à la fin de la recherche.*

*Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.*

*Et à tous ceux qui ont même contribué un peu pendant ce travail.*

# Notations et Préliminaires

- V : espace de Banach avec la norme associée $\|.\|$.
- $K$ : est un ensemble non vide convexe fermé de $V$.
- $V^*$ : l'espace dual de $V$.
- $\longrightarrow$ convergence forte.
- $\rightharpoonup$ convergence faible.
- $\langle , \rangle$ : le produit de dual entre $V$ et $V^*$.
- $|.|$ : la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{H}$ : Abréviation de l'hypothèse.
- $\nabla$ : désigne le gradient.
- $\Delta_p$ : désigne l'opérateur de $p$-laplacien.
- En général, nous ne supposons pas $a(.,.)$. symétrique, puisque dans certaines applications formes bilinéaires non symétriques peuvent se produire naturellement.

# Table des matières

# Introduction

Les inégalités quasi-variationnelles introduites et étudiés au début des années 1960, sont utilisés pour considérer un large classe des problèmes non linéaires .
Les notions des inéquations quasi-variationnelles sont posés par Bensoussan et Lions (1978)([1]) telqu'ils ont montrés qu'un la classe de problèmes de contrôle d'impulsion peut être formulée comme un problème d'inégalité quasi-variationnelle. Kravchuk et Neittaanmaki (2007) et Noor (1998) ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui se posent en mécanique peuvent être étudiés en général cadre d'inégalités quasi-variationnelles, Noor (1985) a prouvé qu'une classe d'inégalités quasi-variationnelles est équivalente au problème de point fixe utilisant la technique de projection. Cette formulation équivalente a été utilisée pour développer des stratégies itératives méthodes pour résoudre l'inégalité quasi-variationnelle et sa diverses variantes , M.A.Noor (2004) a posé les fondamentales d'inéquations quasi-variationnelles mixtes dans l'espace de Hilbert. En 2010 a considéré un nouveau type d'inéquation quasi-variationnelle concerner deux opérateurs qui s'appelle l'inéquation quasi-variationnelle générale tel qu'il montre que cette inéquation est équivalente à le point fixe et équation de Wiener–Hopf équation.
Ce mémoire est divisé en 3 chapitres. Au début on commence ce mémoire par un chapitre qui contient les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivants. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'existence et unicité de quelques classes d'inéquations variationnelles linéaires et non linéaires. Au troisième chapitre, nous étudions l'existence de solutions d'une classe d'inéquations quasi-variationnelles elliptiques et nous avons choisis l'opérateur de $p$-laplacien comme une application de ces résultats d'existence.
Enfin, une conclusion qui comporte le résultat essentiel avec quelques perspectives.

# Chapitre 1

# Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaître pour un usage dans notre thème.

## 1.1 Rappels

**Définition 1.1.1** *Une fonction* $A : X \longrightarrow Y$ *est dit multivoque, si pour chaque* $x \in X$ *associé* $A(x)$*,* $A(x)$ *est un ensemble non vide de* $Y$*.*
*On note l'application multivoque par* $A : X \longrightarrow 2^Y$

Voir ([3])

**Définition 1.1.2** *Un point* $x_0$ *est dit point fixe pour* $A$ *si* $x_0 \in A(x_0)$*.*

Voir ([3])

**Définition 1.1.3** *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite convexe lorsque :*
$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Voir ([17])

**Définition 1.1.4** *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*

$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in ]0, 1[$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Voir ([17])

**Définition 1.1.5** *Un ensemble $K$ est dit convexe si :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

Voir ([17])

**Définition 1.1.6** *Soit $V$ un espace vectoriel normé, un ensemble $C \subseteq E$ est dit faiblement fermé si*

*$\forall u_n \in K$ converge faiblement vers $u$, alors $u \in K$ c'est-à-dire :*

*si $u_n \rightharpoonup u$ dans $V \Longrightarrow u \in K$*

**Définition 1.1.7** *Une fonction $j$ de $V$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement sur $V$ si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, j(u) \leq \alpha\}$ *est fermé*
- $\forall \bar{u} \in V \qquad \lim\limits_{u \to \bar{u}} \inf j(u) \geqslant j(\bar{u})$

Voir ([17])

**Définition 1.1.8** *Une fonction $j$ de $V$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur $V$ si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, j(u) \geq \alpha\}$ *est fermé*
- $\forall \bar{u} \in V \qquad \lim\limits_{u \to \bar{u}} \sup j(u) \leqslant j(\bar{u})$

Voir ([17])

**Définition 1.1.9** *Soit $j$ une fonctionnelle de $V$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $K \subset V$. $j$ est dite propre s'il éxiste un élément $v_0$ de $K$ tel que :*
$j(v_0) < +\infty$ .
Voir ([6])

**Définition 1.1.10** *Soit $(V, \|.\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|.\|_*)$. un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ est dit hémicontinu si :*

$$\forall u, v \in V, l'application \quad t \in [0, 1] \longrightarrow \langle A((1-t)u + tv), u - v\rangle \text{ est continu}$$

Voir ([18])

**Définition 1.1.11** *Soit l'espace $V$ avec produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et la norme $\|\cdot\|_V$. Soit $A : V \to V$.*

*(i) $A$ est un opérateur monotone si :*

$$(Au - Av, u - v)_V \geq 0, \forall u, v \in V$$

*(ii) $A$ est un opérateur strictement monotone si :*

$$(Au - Av, u - v)_V > 0, \forall u, v \in V, u \neq v,$$

*(iii) $A$ est fortement monotone s'il éxiste un constant $m > 0$ telle que :*

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 . \forall u, v \in V$$

*(vi) $A$ est un opérateur non expansive si :*

$$\|Au - Av\|_V \leq \|u - v\|_V . \forall u, v \in V$$

*(v) A est Lipschitzienne continue s'il éxiste $M > 0$ telle que*

$$\|Au - Av\|_V \leq M\,\|u - v\|_V\,, \forall u, v \in V$$

Voir ([18])

**Définition 1.1.12** *On dit qu'une forme bilinéaire $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est :*

*continue si : $\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V\|v\|_V$.*

*coercive si : $\exists\, \alpha > 0\, \forall u \in V\ |a(u,u)| \geq \alpha\|u\|_V^2$.*

Voir ([17])

**Théorème 1.1.13 (Point fixe de Banach)** *: Soit $V$ un espace de Banach, $K \neq \varnothing$ convexe, fermé. Tout application $T : K \longrightarrow K$ contractante admet une point fixe unique dans $K$.*

**Preuve:** Voir([17]) ■

**Théorème 1.1.14** ***(Point fixe de Kakutani)***

*Soit $V$ un éspace de Banach réflexif et $K \subset V$ est non vide, fermée et convexe. Supposons l'application multivoque $Q : K \longrightarrow 2^K$ tel que pour tout $u \in K$, l'ensemble $Q(u)$ est non vide, fermée, convexe et le graphe de $\Psi$ séquentiellement faiblement fermée.*
*Si une de $K$ ou $Q(K)$ est bornée, alors l'application $Q$ admet au moins une point fixe dans $K$.*

**Preuve:** Voir.[21] ■

**Proposition: 1.1.15** *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach , et soit $K$ un ensemble convexe, fermée et non vide dans $V$, et $j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, Alors $j$ est semi-continue inférieurement si et seulement si $j$ est faiblement semi-continue inférieurement.*

**Preuve:** Voir ([18]) ■

**Théorème 1.1.16** *Soit $X$ un espace de Hilbert et soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone lipchitzien continue . Alors, pour tout $f \in X$ il éxiste un élément unique $u \in X$ tell que $Au = f$.*

**Preuve:** Voir. ([18]) ■

## 1.2 Les espaces fonctionnelles

### 1.2.1 L'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

Soit $p$ un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $\mathrm{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $\Omega$, à support compact dans $\Omega$.

**Définition 1.2.1** *On appelle éspace de Sobolev d'ordre 1 sur $\Omega$ :*

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p, \forall i = 1, 2......N \right\}$$

*L'espace $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

Voir ([17])

**Définition 1.2.2** *Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit et on note $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, l'adhérence de $\mathrm{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.*
*L'espace $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel $p$ vérifiant $1 < p < \infty$.*

Voir ([17])

## 1.3 Théorème de la Projection

**Théorème 1.3.1** *(Projection sur un convexe fermé). Soit $K \subset H$ (espace de Hilbert) est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$ , il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$$

*De plus, $u$ est caractérisé par la propriété :*

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

*On note $u = P_K f =$ Projection de $f$ sur $K$ .*

**Preuve:** voir ([17]) ■

## 1.4 Coercivité

**Définition 1.4.1** *$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé coercive s'il existe une constante $c > 0$, telle que $a(x, x) \geq c\|x\|^2$ pour tout $x$ dans $H$ .*
*(voir [19])*

**Définition 1.4.2** *Soit $V$ un espace de Banach et soit $K \subset V$ un ensemble convexe non vide, on dit que $A : V \longrightarrow V$ est coercive s'il existe $v_0 \in K$ ($v_0 = 0$ si $K = V$)*

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

## 1.5 Théorème de Stampacchia

**Théorème 1.5.1** *(Stampacchia) Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $H$. Soit $K$ un sous ensemble fermé et convexe non vide dans*

*$H$ . Ensuite, étant donné $f \in H$ il existe un unique $u \in K$ telle-que*

$a(u, v-u) \geq (f, v-u), \forall v \in K$

**Preuve:** voir. ([17]) ■

## 1.6 Théorème de représentation de Riesz

**Théorème 1.6.1** *Soit $H$ un espace de Hilbert, pour tout $F \in H^{'}$ (dual de H), il existe un unique $v \in H$ telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in H$$

*et en plus :*

$$\|F\|_{H'} = \|v\|_H$$

**Preuve:** Voir ([22]) ■

# Chapitre 2

# Inéquations variationnelles

Dans ce chapitre nous présentons l'éxistence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles elliptique de deuxième espèce linéaire et non linéaire.

## 2.1 Inéquations variationnelles linéaire

**Définition 2.1.1** *On appelle inéquation variationnelle elliptique de $2^e$espèce linéaire toute inéquation de la forme :*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (m, v-u) \ \forall v \in K$$

**Proposition: 2.1.2** *Soient $V$ un espace de Hilbert, $K \neq \emptyset$ convexe fermé de $V$ , $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement, $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive , $m \in V$*
*Alors l'inéquation variationnelle*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (m, v-u) \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

*admet une solution unique.*

**Preuve:**

**1** -L'unicité :

Supposons $u_1$ et $u_2$ solution de(2.1) alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (m, v - u_1) \ \forall v \in K \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (m, v - u_2) \ \forall v \in K \tag{2.3}$$

On pose $v = u_2$ puis $v = u_1$ respectivement dans (2.2) et (2.3) on trouve par sommation :

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq (m, u_2 - u_1) + (m, u_1 - u_2)$$

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$ d'où l'unicité.

**2** -L'éxistence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} Trouver \ w \in K \\ (w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v - w) - (m, v - w)) + (u, v - w) \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.4}$$

Le problème (2.4) admet une solution unique (d'après le théorème de Weierstrass)
$T_\rho : u \longmapsto w$, $w$ solution du problème (2.4), on montre que $T_\rho$ admet un point fixe unique.
Il suffit de montrer que $T_\rho$ est strictement contractant c.à.d :
$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq c\|u_1 - u_2\| \ \forall u_1, u_2 \in V, \ c < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq c\|u_1 - u_2\| \ tq \ w_i = T_\rho(u_i) \ , i = 1, 2$
Alors :

$$(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v - w_1) + \rho(m, v - w_1) + (u_1, v - w_1) \tag{2.5}$$

$$(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v - w_2) + \rho(m, v - w_2) + (u_2, v - w_2) \tag{2.6}$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.5) et (2.6) on obtient

$$-\|w_1 - w_2\|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$
$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) + (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

en utilise théorèm de représentation de Riez $a(u, v) = (Au, v)$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2)$$
$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$
$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Alors $\exists \rho > 0 \;\; tq \;\; \|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av)$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right] \Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors $T_\rho$ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifie le problème (2.1)

■

## 2.2 Inéquations variationnelles non linéaire

Cette section est consacrée á l'étudie d'éxistence et d'unicité des solutions des inéquations variationnelles d'opérateur pas forcement linéaire nommément les opérateurs monotones et hémicontinus.
soient $(V, \|.\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|.\|_*)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement propre et un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ monotone et hémicontinu, c'est-á-dire :

$$\begin{cases} \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V \quad \text{(monotone)} \\ \forall u, v \in V, \text{l'application} \quad t \in [0,1] \longrightarrow \langle A((1-t)u + tv), u - v\rangle \text{ est continue.(hémicontinu)} \end{cases} \tag{2.7}$$

oú $\langle . \rangle$ désigne le produit de dualité entre $V^*$ et $V$.
On va établir les conditions qui assure l'éxistence des solutions de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ telque \\ \langle Au, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v - u\rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

pour $m \in V^*$ donné.

**Lemme 2.2.1** *Dans les hypothèses ci-dessus, un élément $u \in K$ satisfait l'inéquation (2.8) si et seulement si il satisfait l'inéquation :*

$$\langle Av, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v - u\rangle \quad \forall v \in K \tag{2.9}$$

*De plus l'ensemble des solutions de l'inéquation (2.8) est un convexe fermé de $V$.*

**Preuve:** Voir [20] ■

**Théorème 2.2.2** *Dans les hypothèses ci-dessus, si une des trois conditions est satisfaite*

$$i)K\,est\ born\acute{e} \tag{2.10}$$

$$ii)0 \in K, j(0) = 0 \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle + j(v)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.11}$$

$$iii)\exists v_0 \in K\,tel\ que \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.12}$$

*Alors, pour tout $m \in V^*$, il éxiste $u \in K$ solution de (2.8). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.8) est un convexe fermé et borné de $V$ (donc faiblement compact)*

*Si, de plus, $j$ est strictement convexe ou $A$ est strectement monotone, soit*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v$$

*alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.8) est unique.*

**Preuve:** Dans l'hypothèse $(i)$, de lemme 2.2.1, l'ensemble des solutions de (2.8) s'écrit $X = \bigcap_{v \in K} S(v)$ oú $S(v) = \{u \in K; \langle Av, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v - u\rangle\}$
Evidement $X$ est borné ayant $X \in K$
Supposons l'hypothèse $(ii)$ ou $(iii)$ satisfaite. Considérons l'ensemble convexe fermé borné

$$K_R = K \setminus T_R$$

oú $T_R = \{v \in V; \|v\| \leq R\}$. si $R$ est assez grand alors l'ensemble $T_R$ est non vide. Alors, de la premiére partie de la démonstration, il éxiste $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle Au_R, v - u_R\rangle + j(v) - j(u_R) \geq \langle m, v - u_R\rangle \quad \forall v \in K_R \tag{2.13}$$

Nous allons montrer que les hypothèses de coercivité (ii) ou (iii) implique $\|u_R\| < R$.
Supposons que $\|u_R\| = R$.
Si la condition (2.11) est satisfaite, alors

$$\langle Au_R, u_R\rangle + j(u_R) > \langle m, u_R\rangle$$

ce qui est contraire á

$$\langle Au_R, u_R\rangle + j(u_R) \leq \langle m, u_R\rangle$$

obtenu de (2.13) pour $v = 0 \in K_R$
Si (2.12) alieu, alors on a

$$\langle Au_R, u_R - v_0\rangle + j(u_R) - j(v_0) > \langle m, u_R - v_0\rangle$$

Mais on supposant $R \geq \|v_0\|$ (on peut toujours trouver $R$ assez grand), de (2.13) pour $v = v_0 \in K_R$ s'obtient la contradiction

$$\langle Au_R, v_0 - u_R\rangle + j(v_0) - j(u_R) \geq \langle m, v_0 - u_R\rangle$$

En conséquence, $\|u_R\| < R$.
Pour tout $w \in K$ il éxiste $\varepsilon = \varepsilon(w) \in (0, 1]$ tel que $v = u = \varepsilon(w - u) \in K_R$. En effet, si $w \in K_R$ on prend $\varepsilon = 1$ et si $w \in K_R$ alors on prenant $0 < \varepsilon \leq \frac{R-\|u_R\|}{\|w\|-\|u_R\|} \in (0, 1)$ on obtient $v \in K_R$. Alors de (2.13) et la convexité de $j$, il vient

$$\langle Au_R, w - u_R\rangle + j(w) - j(u_R) \geq \langle m, w - u_R\rangle \quad \forall w \in K,$$

soit $u_R$ est solution de(2.8).
L'ensemble des solutions $X$ est convexe et fermé. Montrons qu'il est borné. Sinon, Pour tout $R > 0$, il éxiste $u_R \in X$ tel que $\|u_R\| > R$. Mais alors, pour $R$ assez grand, les relations de coersivité (2.11),(2.12) et l'inéquation (2.8) donnent, comme ci-dessus, une contradiction. La première parti de démonstration est achevée.
Enfin, pour montrer l'unicité de la solution dans des cas particuliers, supposons que l'inéquation (2.8) a deux solution $u_1, u_2 \in K$. prenant $v = \frac{u_1+u_2}{2}$ dans l'inéquation correspondantes, par adition et en utilisons la monotonie de $A$ et la convexité de $j$, il vient

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle + j(u_1) + j(u_2) - 2j(\frac{u_1 + u_2}{2}) \leq 0$$

Il en résultate que $u_1 = u_2$ si $A$ est strictement monotone ou $j$ est strictement convexe. ■
On peut renoncer aux hypothèses (2.10) - (2.12) en demandant de plus l'opérateur $A$.

**Corollaire 2.2.3** *Soient $j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement propre et un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ hémicontinu et fortement monotone, i.e.*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V \tag{2.14}$$

*Alors, pour tout $m \in V^*$, il éxiste $u \in K$ unique vérifiant (2.8).*

**Preuve:** On montre que l'hypothèse de coersivité (2.12) est satisfaite. De l'hypothése (2.14) on obtient

$$\lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} = +\infty \quad \forall v_0 \in K \tag{2.15}$$

D'autre part, les hypothèses faites sur $j$ impliquent qu'ils éxistent $\lambda \in V^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(v) \geq \lambda(v) + \mu \geq -\|\lambda\|_* \|v\| + \mu \quad \forall v \in K \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16) nous obtenons (2.12) en prenant $v_0 \in \text{dom} j = \{v \in K; j(v) < +\infty\}$ (évidemment, la fonctionnelle $j$ étant propre, on a :$domj \neq \varnothing$) ■

## 2.3 Inéquations quasi-variationnelles pour un opérateurs hémicontinus

Soient $(V, \|.\|)$ un espace de Banach réel réflexif et $(V^*, \|.\|_*)$ son dual, et K un sous-ensemble non vide, convexe et fermée de $V$.
On considère un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ et une fonctionnelle $j : V \times V \longrightarrow (-\infty; +\infty]$.
Pour $m \in V^*$ donné nous considérons l'inéquation quasi variationnelle :

$$\begin{cases} Trouver\ u \ \in K \\ \langle Au, v - u\rangle + j(u, v) - j(u, u) \geq \langle m, v - u\rangle \ \forall \ v \in \ V \end{cases} \tag{2.17}$$

**Théorème 2.3.1** *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

*$A$ est un opérateur monotone et hémicontinu ,*

*La fonction $j$ est faiblement semicontinu inférieurement sur $K \times K$ ,*

$$\begin{cases} \forall v \in V; la\ fonction\ j(.,v) : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \\ est\ faiblement\ semicontinue\ suprieurement\ sur\ K; \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} \forall u \in K,\ la\ fonction\ est\ convexe,\ j(u,.) : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \\ propre\ et\ semicontinue\ infrieurement\ sur\ K : \end{cases} \tag{2.19}$$

*Alors pour tout $m \in V^*$, l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (2.17) est non vide et faiblement compact de $K$ si une des deux conditions est satisfaite :*

$$(i) \qquad K\ est\ born\acute{e}; \tag{2.20}$$

$$(ii) \qquad \exists v_0 \in K\ t.q \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty, v \in K} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle + j(v,v) - j(v,v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.21}$$

**Preuve:** Voir ([24]) ■

# Chapitre 3

# Existence de solution d'une inéquation quasi-variationnelle élliptique

Dans ce chapitre on étudiant l'éxistence des solutions pour les inéquation qui s'appelle les inéquations quasi-variationnelles. On va diviser ce chapitre en deux partis :
Parti I :Étudier l'éxistence de solution d'inéquation quasi variationnelle de la forme :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in Q(u) \\ \langle Au, v-u \rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v-u \rangle\ \forall\ v \in\ Q(u) \end{cases}$$

Avec des conditions nécessaires sur $A, Q, j$. Ces inéquations sont l'objets de l'article [25].
Parti II : On fait l'extension de ce problème aux inéquations de la forme suivante avec $j$ une fonction de deux variables :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in Q(u)\ telque \\ \langle Av, v-u \rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0\ pour\ tout\ v \in Q(u) \end{cases}$$

Enfin on applique le résultat d'existence pour un problème avec l'opérateur p-laplacien.

## 3.1 Problème I

Soient $(V, \|.\|)$ un éspace de Banach réel réflexif et $(V^*, \|.\|_*)$ son dual, et K un sous-ensemble non vide, convexe et fermée de $V$.
On considère un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ et une fonction $j : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour $m \in V^*$ donné nous considérons l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in Q(u) \\ \langle Au, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v-u\rangle\ \forall\ v \in\ Q(u) \end{cases} \tag{3.1}$$

**Hypothèses: 3.1.1**

1. $(\mathcal{H}_A)$ *L'application* $A : V \longrightarrow V^*$ *est borné tel que :*

   *(i) l'application* $A : V \longrightarrow V^*$ *est monotone et continue.*

2. $(\mathcal{H}_j)$ *La fonction* $j : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*est propre,convexe et semi-continue inférieurement avec* $K \in int(dom(j))$.

3. $(\mathcal{H}_Q)$ *L'application de multivoque* $Q : K \longrightarrow 2^K$ *pour tout* $u \in K$, *l'ensemble* $Q(u) \subseteq K$ *est non vide, convexe et fermée et tel que :*

$$\begin{cases} (i) \quad \forall\ suites\ x_n \in K\ avec\ x_n \rightharpoonup x\ et\ pour\ tout\ y \in Q(x)\ il\ xiste\ une\ suite\ y_n \subset K\ tel\ que \\ y_n \in Q(x_n)\ et\ y_n \longrightarrow y\ quand\ n \longrightarrow +\infty. \\ (ii) \quad \forall\ suites\ x_n vet\ y_n\ dans\ K\ avec\ y_n \in Q(x_n)\ ,\ si\ x_n \rightharpoonup x\ et\ y_n \rightharpoonup\ y\ alors\ y \in Q(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

4. $(\mathcal{H}_0)$ *Il éxiste un ensemble bornée* $K_0 \subset V$ *avec* $Q(u) \cap K_0 \neq \emptyset \forall u \in K$ , *de plus il éxiste une fonction* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *avec* $h(t) \longrightarrow +\infty$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$ *tel que :*

$$\langle A\omega, \omega - v_0\rangle + j(u) - j(v_0) \geq h(\|\omega\|_V)\|\omega\|_V \forall v_0 \in K_0, \omega \in K. \tag{3.3}$$

**Lemme 3.1.2** *On suppose que les hypothèses ce dessus sont vérifiées. Si $Q : K \longrightarrow 2^K$ est tel que pour tout $u \in K$, $Q(u) \subseteq K$ est non vide, fermée et convexe, alors l'inéquation quasi-variationnelle (3.1) est équivalente à l'inéquation suivante :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \textit{ tel que } u \in Q(u) \\ \langle Av, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq 0 \textit{ pour tout } v \in Q(u) \end{cases} \tag{3.4}$$

**Preuve:** $(\Longrightarrow)$
Soit $u$ solution du (3.1), alors $u \in \ Q(u)$ et :

$$\langle Au, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq 0 \ \forall \ v \in \ Q(u)$$

Par la monotonicité de $A$ on a
$\langle Av - Au, v-u\rangle + \langle Au, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq 0 \ \forall \ v \in \ Q(u)$
$\Longrightarrow \ \langle Av, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq 0$, alors u est solution de (3.4).
$(\Longleftarrow)$
Soit $u \in \ K$ solution de (3.4), puisque $Q(u)$ est convexe, $\forall \ \omega \ Q(u)$ et $\lambda \in [0,1]$ on pose $v = u_\lambda := \lambda\omega + (1-\lambda)u \ \in \ Q(u)$ dans (3.4) on obtient :

$$\langle Au_\lambda, \lambda\omega + (1-\lambda)u - u\rangle + j(\lambda\omega + (1-\lambda)u) - j(u) = \lambda(\langle Au_\lambda, \omega - u\rangle + j(\omega) - \varphi(u)) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \langle Au_\lambda, \omega - u\rangle + j(\omega) - j(u) \geq 0 \ \forall \ \omega \in \ Q(u)$$

puisque $A$ et hemi-continue on prend $\lambda = 0$ on confirme que $u \in \ Q(u)$ est un solution de (3.1). ■

### 3.1.1 Théorème d'existence de solutions du problème I

**Théorème 3.1.3** *On suppose que les hypothèses de (3.1.1) sont vérifiées, et $m \in V^*$. Alors l'inéquation (3.1) admet aux moins une solution.*

**Preuve:**
**Etape1 :**

Pour $\omega \in K$ fixé on considère le problème auxiliaire suivant :

$$(P_\omega) \begin{cases} Trouver \quad u \in Q(\omega) \\ \langle Au, v-u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle m, v-u\rangle \quad pour \quad tout \quad v \in Q(\omega) \end{cases} \tag{3.5}$$

D'aprés l'hypothèse $(\mathcal{H}_0)$ et (3.3) on a :

$$\begin{aligned} \langle Au, u-v\rangle + j(u) - j(v) &\geq h(\|u\|_V)\|u\|_V \\ &\Longrightarrow \lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Au, u-v\rangle + j(u) - j(v)}{\|u\|_V} \geq \lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} h(\|u\|_V) = +\infty \end{aligned}$$

**Etape2 :**

On définit la fonction multivoque $S : K \longrightarrow 2^K$ tel que pour tout $\omega \in K$ associé un ensemble des solutions à l'inéquation (3.5) s'appelle :

$$S(\omega) = \{u \in Q(\omega) \mid u \text{ vérifie le problème}(3.5)\}.$$

De (3.6), en appliquant le théorème (2.2.2), on obtient l'éxistence de la solution de l'inéquation (3.5) donc l'application S est bien définit.

Il est claire que tout point fixe de $S$ est un solution d'inéquation (3.1). Alors doit $S$ satisfait les hypothèse posées dans théorème (1.1.14).

❶ l'ensemble $S(\omega)$ est non vide, convexe et fermé :
On a $S(\omega)$ désigne l'ensemble des solutions, alors d'aprés Théorème (2.2.2) il éxiste $u \in Q(\omega)$ solution de (3.5). De plus l'ensemble des solutions est non vide, convexe, fermée et bornée.

❷ le graphe de $S$ est séquentiellement faiblement fermé. Soit $\omega_n, u_n$ deux suites tel que $u_n \in S(\omega_n)$ avec $u_n \rightharpoonup u$ et $\omega_n \rightharpoonup \omega$ quand $n \longrightarrow \infty$ alors $u \in Q(\omega_n)$ d'aprés le lemme (3.2.1) on obtient :

$$\langle Av, v-u_n\rangle + j(v) - j(u_n) \geq \langle m, v-u_n\rangle \forall v \in Q(\omega_n) \tag{3.6}$$

On remarque que $(\omega_n, u_n) \longrightarrow (\omega, u)$ dans $K \times K$, par condition $(\mathcal{H}_Q)$(ii)(3.2) nous obtenons $u \in Q(\omega)$ et d'autre part pour tout $z \in Q(\omega)$ et par condition $(\mathcal{H}_Q)$(i)(3.2) il éxiste une suite $v_n \subset K$ tel que $v_n \in Q(\omega_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $v_n \longrightarrow z, n \longrightarrow +\infty$ et lorsque $K \subset int(dom(j))$ alors $j$ est continue dans K. On pose $v = v_n$ dans (3.6) et passer à la limite sup quand $n \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle Az, z-u\rangle + j(z) - j(u) &\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Av_n - Az, v_n - u_n\rangle \\
&+ \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Az, v_n - u_n\rangle \\
&+ \limsup_{n\longrightarrow+\infty} j(v_n) - \liminf_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n) \\
&\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Av_n, v_n - u_n\rangle + \limsup_{n\longrightarrow+\infty} j(v_n) - \liminf_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n) \\
&\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\left(\langle Av_n, v_n - u_n\rangle + j(v_n) - j(u_n)\right) \\
&\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle m, v_n - u_n\rangle = \langle m, z-u\rangle \ \forall\ z \in\ Q(\omega)
\end{aligned}$$

Par le Lemme (3.2.1) $u \in S(\omega)$, il implique que le graphe de $S$ est séquentiellement faiblement fermé.

❸ $S(K)$ est bornée : Démontrer par contradiction :
On suppose que $S(K)$ non bornée et il éxiste deux suites $\{\omega_n\}, \{u_n\}$ tel que $u_n \in S(\omega_n)$ et $\|u_n\|_V \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty$. Donc $u_n \in Q(\omega_n)$ et

$$\langle Au_n, v - u_n\rangle + j(v) - j(u_n) \geq \langle m, v - u_n\rangle \forall v \in Q(\omega_n)$$

et par l'hypothèse $(\mathcal{H}_0)$ et (3.3), il éxiste une suite $\{v_n\} \subset K$ tel que $v_n \in K_0 \cap Q(\omega_n) \forall n \in \mathbb{N}$. On pose $v = v_n$ dans l'inéquation précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle Au_n, v_n - u_n\rangle + j(v_n) - j(u_n) \geq \langle m, v_n - u_n\rangle \\
\Longrightarrow\ &\langle m, u_n - v_n\rangle \geq \langle Au_n, u_n - v_n\rangle + j(u_n) - j(v_n) \geq h(\|u_n\|_V)\|u_n\|_V
\end{aligned}$$

quand

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\ avec\ h(r) \longrightarrow +\infty, r \longrightarrow +\infty \Longrightarrow h(\|u_n\|_V) \leq \|m\|_{V^*} \leq \left(1 + \frac{\|v_n\|_V}{\|u_n\|_V}\right)$$

et par passage à la limite on obtient que $h(\|u\|_V) \leq +\infty$. Contradiction avec $(\mathcal{H}_0)$ donc $S(K)$ est bornée.

Par conséquent tout les hypothèses de théorème (1.1.14) sont vérifiés, alors $S$ a un point fixe.
Alors l'inéquation (3.1) admet aux moins une solution. ■

## 3.2 Problème II

Soient $(V, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif et $(V^*, \|.\|^*)$ son dual et $K$ un sous-ensemble non vide, convexe et fermée de $V$.
On considéré un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ et une fonctionnelle $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$.
Nous considérons l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\begin{cases} Trouver\ u\ \in\ Q(u) \\ \langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0\ \ \forall v\ \in\ Q(u) \end{cases} \tag{3.7}$$

O$\grave{u}$ $\langle,\rangle$ désigne le produit de dualité entre $V$ et $V^*$. Soit $A : V \longrightarrow V^*$ un opérateur hémi-continue et monotone, c'est-a-dire

$$\langle Au - Av, u-v\rangle \geq 0\ \forall u, v \in V \tag{3.8}$$

On considère une fonction $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall u \in V,\ j(u,.) : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]\ est\ une\ fonction\ propre,\ convexe\ et\ semi-continue \\ suprieurement. \\ \bullet\ \forall v \in\ V,\ j(.,v) : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]\ est\ une\ fonction\ propre\ ,convexe\ et\ semi\ continu \\ inférieurement. \end{cases} \tag{3.9}$$

De plus on a pour $u_n \rightharpoonup u\ et\ v_n \rightharpoonup v$ dans $V$

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} j(u_n, v_n) \leq j(u,v) \\ \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} j(u_n, u_n) \geq j(u,u) \end{cases} \tag{3.10}$$

On considère une fonction $Q : K \longrightarrow 2^K$ tel que pour tout $u \in K$, l'ensemble $Q(u) \subset K$ est non vide, convexe et fermée et

$$\begin{cases} \bullet\ pour\ toute\ suite\ u_n \in K\ tel\ que\ u_n \rightharpoonup u, \forall v \in Q(u), \exists\ une\ suite\ v_n \in K, \\ tel\ que\ v_n \subset K/v_n \in\ Q(u_n)\ et\ v_n \longrightarrow v, n \longrightarrow +\infty. \\ \bullet\ pour\ tout\ u_n, v_n\ dans\ K\ telque\ u_n \in Q(v_n),\ si\ u_n \rightharpoonup u\ et\ v_n \rightharpoonup v,\ alors\ u \in Q(v). \end{cases} \tag{3.11}$$

On suppose que : $\exists K_0 \subset V$ bornée tel que $K_0 \cap Q(u) \neq \emptyset\ \forall u \in K$ et $\exists\ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $h(t) \longrightarrow +\infty, t \longrightarrow +\infty$ tel que

$$\langle Au, u - v_0\rangle + j(u,u) - j(u,v_0) \geq h(\|u\|_V)\|u\|_V\ \forall v_0 \in K_0, u \in K. \tag{3.12}$$

**Lemme 3.2.1** *On suppose que les hypothèses ce dessus sont vérifiés. Si $Q : K \longrightarrow 2^K$ est tel que pour tout $u \in K$, $Q(u) \subseteq K$ est non vide, fermée et convexe, alors l'inéquation quasi-variationnelle (3.7) est équivalente à l'inéquation suivante :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in Q(u) \\ \langle Av, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0 \text{ pour tout } v \in Q(u) \end{cases} \tag{3.13}$$

**Preuve:** ($\Longrightarrow$)
Soit $u$ solution du (3.7), alors $u \in\ Q(u)$ et :

$$\langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0\ \forall\ v \in\ Q(u)$$

Par la monotonicité de $A$ on a
$\langle Av - Au, v-u\rangle + \langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0\ \forall\ v \in\ Q(u)$
$\Longrightarrow\ \langle Av, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0$, alors u est solution de (3.13).
($\Longleftarrow$)
Soit $u \in\ K$ solution de (3.13), puisque $Q(u)$ est convexe, $\forall\ \omega\ Q(u)$ et $\lambda \in [0,1]$ on pose $v = u_\lambda := \lambda\omega + (1-\lambda)u\ \in\ Q(u)$ dans (3.13) on obtient :

$$\langle Au_\lambda, \lambda\omega + (1-\lambda)u - u\rangle + j(u, \lambda\omega + (1-\lambda)u) - j(u,u) = \lambda(\langle Au_\lambda, \omega - u\rangle + j(u,\omega) - \varphi(u,u)) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \langle Au_\lambda, \omega - u\rangle + j(u,\omega) - j(u,u) \geq 0\ \forall\ \omega \in\ Q(u)$$

puisque $A$ et hemi-continue on prend $\lambda = 0$ on confirme que $u \in\ Q(u)$ est un solution de (3.7). ■

## 3.3 Théorème d'existence de solutions du problème II

**Théorème 3.3.1** *Si les hypothèses ce dessus sont vérifiés, Alors l'inéquation quasi-variationnelle (3.7) admet aux moins une solution dans $V$.*

**Preuve:**

**Etape1 :**

Soit le problème auxiliaire suivant :

$$(P_\omega)\begin{cases} Trouver\ u \in Q(\omega) \\ \langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq 0 \quad \forall v \ \in \ Q(\omega) \end{cases} \tag{3.14}$$

$\omega$ fixé dans K.

D'aprés l'hypothèse $(\mathcal{H}_0)$ et (3.12) on a :

$$\begin{aligned} \langle Au, u-v\rangle + j(u,u) - j(u,v) \quad &\geq \quad h(\|u\|_V)\|u\|_V \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Au, u-v\rangle + j(u,u) - j(u,v)}{\|u\|_V} \geq \lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} h(\|u\|_V) = +\infty \end{aligned}$$

**Etape2 :**

Soit $S : K \longrightarrow 2^K$ et

$S(\omega) = \{u \in Q(\omega)/\ u\ solution\ de\ (3.14)\}$.

De (3.15), en appliquant le théorème (2.3.1), on obtient l'éxistence de la solution d'inéquation (3.14) donc l'application S est bien définit.

Il est claire que tout point fixe de $S$ est un solution d'inéquation (M I Q V) (3.7). Alors doit $S$ satisfait les hypothèse posées dans théorème (1.1.14).

❶ L'ensemble $S(\omega)$ est non vide, convexe et fermée :
D'aprés le théorème (2.3.1), il éxiste $u \in Q(\omega)$ solution de (3.5). De plus l'ensemble des solutions est non vide, convexe, fermée et bornée.

❷ Le graphe de $S$ est séquentiellement faiblement fermé :
Soit $u_n, \omega_n$ deux suites tel que $u_n \in S(\omega_n)$ et $u_n \rightharpoonup u, \omega_n \rightharpoonup \omega$. Alors $u_n \in Q(\omega_n)$ solution de (3.14) et par (3.2.1),on obtient

$$\langle Av, v-u_n\rangle + j(u_n, v) - j(u_n, u_n) \geq 0 \ \forall v \in Q(\omega)$$

D'aprés l'hypothèse (3.11) et (3.10), pour tout $z \in Q(\omega)$ il éxiste une suite $v_n \subset K$ tel que $v_n \in Q(\omega_n)$ et $v_n \longrightarrow z$ quand, $n \longrightarrow +\infty$

On pend $v = v_n$ dans l'inégalité précédente et passer à la limite supérieur on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle Az, z-u\rangle + j(u,z) - j(u,u) &\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Av_n - Az, v_n - u_n\rangle \\
&+ \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Az, v_n - u_n\rangle \\
&+ \limsup_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n, v_n) - \liminf_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n, u_n) \\
&\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle Av_n, v_n - u_n\rangle + \limsup_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n, v_n) - \liminf_{n\longrightarrow+\infty} j(u_n, u_n) \\
&\geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\left(\langle Av_n, v_n - u_n\rangle + j(u_n, v_n) - j(u_n, u_n)\right) \\
&\geq 0 \ \forall\ z \in\ Q(\omega)
\end{aligned}$$

Par conséquent $u$ est vérifié (3.14).

Et d'aprés (3.11) on a $u \in Q(\omega)$.

Alors $u \in S(\omega) \Longrightarrow$ graphe de $S$ est séquentiellement faiblement fermé.

❸ $S(K)$ est bornée :

Supposons que $S(K)$ non bornée $\Longrightarrow \exists u_n \in S(K)$ tel que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty, n \longrightarrow +\infty$ tel que $u_n \in S(\omega_n) \Longrightarrow u_n \in Q(\omega_n)$ solution de (3.14)

$$\langle Au_n, v - u_n\rangle + j(u_n, v) - j(u_n, u_n) \geq 0 \ \forall v \in\ K(\omega_n)$$

D'aprés l'hypothèse (3.12), $\exists$ ensemble $K_0 \subset V$ tel que $K_0 \cap Q(\omega_n) \neq \emptyset$, alors $\exists v_n \in K$ tel que $v_n \in K_0 \cap Q(\omega_n)$ on pend $v = v_n$

$$\begin{aligned}
\langle Au_n, v_n - u_n\rangle + j(z, v_n) - j(z, u_n) \geq 0 &\Longrightarrow \langle Au_n, u_n - v_n\rangle + j(z, u_n) - j(z, v_n) \leq 0 \\
&\Longrightarrow h(\|u_n\|)(\|u_n\|) \leq 0
\end{aligned}$$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient contraction avec (3.12). Que s'implique que $S(K)$ est borné.

Alors d'aprés (1.1.14) l'inéquation (3.7) admet aux moins une solution.

■

### 3.3.1 Application : Inéquation quasi-variationnelle avec l'opérateur $p$-laplacien

Dans ce section on étudier l'éxistence du solution d'inéquation quasi-variationnelle non linéaire d'opérateur $p$-laplacien. Nous considérons le problème suivant :
Trouver $u \in Q(u)$

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx + \int_{\Omega} \phi\left(u(x), v(x)\right) dx - \int_{\Omega} \phi\left(u(x), u(x)\right) dx \geq 0 \; \forall v \in Q(u) \tag{3.15}$$

tel que $2 \leq p < \infty$ et $u, v \in V = \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega), \Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe et semi continue inférieurement tel que $x \mapsto \phi(v(x))$ appartient à $L^1(\Omega)$. Nous donnons un constant $k_0$ et une fonction continue $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$0 < k(s) \leq k_0, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

nous considérons un sous ensemble $K$ convexe et fermée de V et $Q : K \longrightarrow 2^K$ définissent par :

$$K := \{u \in V |\, |\nabla u(x)| \leq k_0, x \in \Omega\} \tag{3.17}$$

$$Q(u) = \{v \in V |\, |\nabla v(x)| \leq k(u(x)), x \in \Omega\} \tag{3.18}$$

**Théorème 3.3.2** *Si les hypothèses de théorème (3.3.1) sont vérifiés, Alors l'inéquation précédente admet une solution.*

**Preuve:** On pose $V = \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $A = -\Delta_p$ *tq* $2 \leq p < +\infty$

$$\langle Au, v-u\rangle = \int_{\Omega}\left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx$$

et

$$j(u,v) = \int_{\Omega} \phi\left(u(x), v(x)\right) dx$$

1. On montre que l'opérateur A suive les conditions $(\mathcal{H}_A)$ :

   • A est borné : De l'expression de la norme dans un espace dual, on déduit

$$\forall u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega); \quad \|-\Delta_p(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \|v\| \leq 1} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle|$$

   Pour tout $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$|\langle -\Delta_p(u), v\rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{p/q} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\| \leq \left( \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{p/q} \right) \|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

   Donc

$$\|-\Delta_p(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)} \leq \|u\|^{p/q}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

   Soit $B$ un borné de $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\exists M > 0; \forall u \in B; \|u\| \leq M \Longrightarrow \|-\Delta_p(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)} \leq M^{p/q}$$

   Ainsi l'image par $-\Delta_p$ d'un borné $B$ de $\|-\Delta_p(u)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ est un borné de $\|-\Delta_p(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)}$.

   • A est hémicontinu : D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que pour tout $(u, v, \omega) \in (\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega))^3$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$t \longrightarrow \langle -\Delta_p(u + tv), \omega\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx$$

   est continue.

   • A est monotone :L'application qui à $t$ de $\mathbb{R}$ associe $|t|^p$ dans $\mathbb{R}$ étant convexe, on déduit que sa dérivée est une fonction croissante, donc

$$\forall (t, r) \in \mathbb{R}^2, (|t|^{p-2}t - |r|^{p-2}r)(t - r) \geq 0.$$

   D'où

$$\langle -\Delta_p(u) - (-\Delta_p(v)), u - v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \geq 0.$$

   Par conséquent $-\Delta_p$ est monotone.

2. D'aprés [9, [23]], (3.17) et (3.18) vérifient les hypothèse $(\mathcal{H}_Q)$.
   • Soient $v \in K, \omega_n \in Q(v_n)$ $t.q$ $v_n \rightharpoonup v$ $et$ $\omega_n \rightharpoonup \omega$ $ds$ $V$, alors $v_n \longrightarrow v$ $alors$ $K_c(v_n) \longrightarrow K_c(v)$ $ds$ $C(\bar{\Omega})$.
   Par conséquent, étant donné $\epsilon > 0, \exists n_\epsilon > 0$ tq
   $$|K_c(v_n) - k_c(v)| < \epsilon \ on\ \Omega\ \forall n \geq n_\epsilon \tag{3.19}$$
   Ceci montre que
   $$|\nabla(\omega_n)| \leq K_c(v_n) \leq K_c(v) + \epsilon \quad on\ \Omega, \qquad \forall n \geq n_\epsilon \tag{3.20}$$
   On a l'ensemble $K_\epsilon(v) = \{\omega \in V, |\nabla\omega| \leq K_c(v) + \epsilon\ on\ \Omega\}$ est bornée, fermée et convexe dans V.
   $\Longrightarrow K_\epsilon(v)$ est faiblement compacte.Par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ $dans$ (3.20) on trouve que $\omega \in K_\epsilon(v)$.
   Lorsque $\epsilon$ est arbitraire, nous avons que $\omega \in K(v)$.
   • Soit $v \in K, \omega \in Q(v)$ et $v_n \subset K$ tq $v_n \rightharpoonup v$ dans $V$ puisque K est compacte dans $C(\bar{\Omega})$ on a $v_n \longrightarrow v$ dans $C(\bar{\Omega})$. Quand $c\omega \in Q(v) \forall c \in [0,1]$ et $c\omega \longrightarrow \omega, c \uparrow 1$ $dans$ $V$
   $\Longrightarrow \exists\ \tilde{\omega_n}\ t.q\ \tilde{\omega_n} \in Q(v_n), \quad \tilde{\omega_n} \longrightarrow \tilde{\omega}$
   Lorsque $\tilde{\omega} = c\omega$ on pend $\epsilon > 0$ assez petit t.q
   $$|\nabla\tilde{\omega}| \leq K_c(v) - \epsilon \quad on\ \bar{\Omega}$$
   Pour $\epsilon > 0$, on peut trouver $n_\epsilon$ t.q $K_c(v) \leq K_c(v_n) + \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |\nabla\tilde{\omega}| \leq K_c(v_n)$
   Alors $\tilde{\omega} \in K(v_n), \quad \forall n \geq n_\epsilon$. On définit :
   $$\tilde{\omega_n} = \begin{cases} \tilde{\omega} & n \geq n_\epsilon \\ des\ fonctions\ dans\ Q(v_n) & 1 \leq n < n_\epsilon \end{cases}$$
   Clairement, il s'agit d'une séquence requise en condition $Q(i)$.
3. Puisque $\phi$ est convexe et semi continue inférieurement, alors $j$ aussi convexe et semi continue inférieurement.
4. Et pour l'hypothèse $(\mathcal{H}_0)$ on prend $K_0 = K$ quand elle est bornée.

Alors, d'aprés le théorème (3.3.1) l'inéquation (3.15) admet une solution. ■

# Conclusion

*De ce travail, On établit des résultats d'éxistence et d'unicité d'IVE linéaire et non linéaire de deuxième espèce en plus l'éxistence des inéquation quasi-variationnelles élliptique, et nous appliquons comme éxemple l'opérateur de p-laplacien .*
*Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver les conditions qui assurent l'unicité du solution. Et aussi l'éxistence pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.*

# Bibliographie


[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Impulse control and quasi-variational inequalities, Gauthier Villars, Paris (1982).

[2] A. Benssoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod, Paris, (1978).

[3] S.Merabet. Théorèmes de point fixe pour les fonctions multivoques et application, Université Larbi ben Mhidi Oum-El-Bouaghi, 03/06/2014.

[4] M. Boulbrachene, Pointwise error estimates for a class of elliptic quasi-variational inequalities with nonlinear source terms, Appl. Math. Comput., 161, pp. 129-138, (2005).

[5] Georges Comte. Licence de mathématiques - MATH 401 Convexité, Analyse Asymptotique et Séries UMR CNRS 5127, Laboratoire de Mathématiques de l'Université Savoie-Mont Blanc Bâtiment Chablais, Campus scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac cedex, France.[pp 5-7]

[6] B.Bensalem. Les inéquations variationnelles et leurs application aux problèmes de Signorini. Université Kasdi Merbah Ouargla. 13/09/2012

[7] N.Ouldkada. Espaces de Sobolev. Université Dr Tahar Moulay - Saïda. 22 Mai 2017 .

[8] Z.H. Liu, Existence results for quasilinear parabolic hemivariational inequalities, J. Differential Equations 244 (2008), 1395–1409.

[9] Z.H. Liu, On boundary variational-hemivariational inequalities of elliptic type, P. Roy. Soc. Edinb. A. 140 (2010), 419–434.

[10] M. Sofonea, A. Matei, History-dependent quasi-variational inequalities arising in Contact Mechanics, Eur. J. Appl. Math. 22 (2011), 471–491.

[11] G.J. Tang, N.J. Huang, Existence theorems of the variational-hemivariational inequalities, J. Global Optim. 56 (2013), 605–622.

[12] A.A. Khan, D. Motreanu, Existence theorems for elliptic and evolutionary variational and quasi-variational inequalities, J. Optim. Theory Appl. 167 (2015), 1136–1161.

[13] Z.H. Liu, B. Zeng, Optimal control of generalized quasi-variational hemivariational inequalities and its applications, Appl. Math. Optim. 72 (2015), 305–323.

[14] Z.H. Liu, D. Motreanu, S.D. Zeng, On the well-posedness of differential mixed quasivariational-inequalities, Topol. Methods Nonlinear Anal. 51 (2018), 135–150.

[15] D. Aussel, A. Sultana, V. Vetrivel, On the existence of projected solutions of quasi-variational inequalities and generalized Nash equilibrium problems, J. Optim. Theory Appl. 170 (2016), 818–837.

[16] A.A. Khan, C. Tammer, C. Zalinescu, Regularization of quasi-variational inequalities, Optimization 64 (2015), 1703–1724.

[17] H.Brézes,Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[18] M. Sofonea, A.Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics /London Mathematical Society Lecture Note Series : 398

[19] S. Agmon,A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.

[20] Anca Capatina,Variational Inequalities and Fractional Contact Problems. Advances in Mechanics and Mathematics Volume 31.

[21] R. Kluge, (ed.) : On some parameter determination problems and quasi-variational inequalities.In : Theory of Nonlinear Operators, vol. 6, pp. 129–139. Akademie-Verlag, Berlin (1978).

[22] R.Glowinski.Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems.Bombay 1980.

[23] R. Kano, N. Kenmochi, Y. Murase, Existence theorems for elliptic quasi-variational inequalities in Banach spaces, In : M. Chipot, C.S. Lin, D.H. Tsai, (eds.) Recent Advances in Nonlinear Analysis. pp. 149–169. World Scientific Publishing, Hackensack, 2008.

[24] Anca Capatina, Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement. 3.21.1, pp.45. Romanian Academy (2011)

[25] Stanis law Migórski Akhtar A. Khan. Shengda Zeng , Inverse Problems for Nonlinear Quasi-Variational Inequalities with an Application to Implicit Obstacle Problems of p-Laplacian Type.(20/01/2019).

## ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة وجود الحل للمتراجحات الشبه تغايريه و ذلك باستعمال نظرية النقطة الثابتة ، ثم قمنا بتطبيق النظرية على مؤثر p- لابلاس.

**الكلمات المفتاحية** : المتراجحات التغايرية، النقطة الثابتة، الوجود.

## Abstract

In this work, we have discussed the existence of the elliptic quasi-variational inequality solution, by using fixed point theory, We applied the theory to the Laplace application.

**Key words :** - variational inequality, fixed point, existence.

## Résumé

Dans ce travail, nous avons abordé l'éxistence de la solution d'inéquation quasi-variationnelle elliptique, en utilisant la théorie de point fixe et Nous avons appliqué la théorie à l'application p-Laplace.

**Mots clés :** - inéquation variationnelle, point fixe, éxistence.