Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle

Saoud Widad

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
saoudwidad@gmail.com

Résumé

Établir l'éxistence d'inéquation quasi-variationnelle , pour ce but on utilise le th'eorème du point fixe.

Mots clés: *Problème de l'obstacle, inéquation variationnelle elliptique, Point fixe, existence .*

1. Introduction

Ce chapitre a pour but de résolue les inéquation quasi-variationnelles dans un éspace de Banach réflexif muni d'un norme $(V, \|.\|_V)$ et produit dual $\langle ., . \rangle$.

2. Les inéquations variationnelles

L'objectif de ce travail est d'établir le solution d'inéquation variationnelle elliptique de 2^e éspèce liné et non linéaire

Définition 1 *On appelle Inèquation variationnelle elliptique de 2ᵉespèce linéaire toute inéquation de la forme:*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq f(v-u)\ \forall v \in K$$

Proposition 1 *Soient V un espèce de Hilbert, $K \neq \emptyset$ convexe fermè de V , $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue infèrieurement, $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinèaire continue et coercive , $f \in V$*
Alors l'inèquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) + j(u) \geq (f, v-u)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{1}$$

admet une solution unique.

Définition 2 *On appelle Inèquation variationnelle elliptique de 2ᵉespèce non linéaire toute inéquation de la forme:*

$$\begin{cases} \text{Trouve} u \in K \text{ tel que} \\ \langle Au, v-u \rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2}$$

ou $A : V \longrightarrow V^*$ monotone et hémicontinu, $j : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe sémicontinue infèrierment propre, $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé.

Théorème 2.1 *Dans les hypothèses ci-dessus, si une des trois condition est satisfaite*

$$i) K \text{ est borné} \tag{3}$$

$$ii) 0 \in K, j(0) = 0 \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle + j(v)}{\|v\|} = +\infty \tag{4}$$

$$iii) \exists v_0 \in K \text{ tel que} \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v-v_0 \rangle + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{5}$$

alors, pour tout $f \in V^*$, il éxiste $u \in K$ solution de (2). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2) est un convexe fermé et borné de V (donc faiblement compact) Si, de plus, j est strictement convexe ou A est strectement monotone, soit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v$$

alors la solution de l'inéquation variationnelle (2) est unique.

3. Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle elliptique

Dans ce séction on tudiant l'éxistence et l'unicité de la solution pour les inéquation qui s'appelle l'inéquation quasi-variationnelle. On considère un opérateur $T : B \times V \longrightarrow V^*$ et une fonction $\varphi : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
pour $a \in A$ et $m \in V^*$ donnés nous considérons l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\begin{cases} trouver\ u \in C\ avec\ u \in K(u) \\ \langle T(a, u), v-u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle m, v-u \rangle\ \forall\ v \in\ K(u) \end{cases} \tag{6}$$

L'éxistence de solution du problème (6) (en cours d'achèvement)

Références

[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Impulse control and quasi-variational inequalities, Gauthier Villars, Paris (1982).
[2] A. Benssoussan and J. L. Lions, Applications des inÃľquations variationnelles en contrÃťle stochastique, Dunod, Paris, (1978)