UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et statistiques

Par : Belaid Safa

Thème

Equations différentielles stochastiques et simulation numérique

Version de : 04/07/2019

Devant le jury composé de :

Akti Mohamed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Behaddi Aiassa	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Boussad Abdelmalek	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédiece ce mémoire
A ma chére mére
qui m'a soutenue et encouragé durant mes années d'études. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.
A mon cher pére
qui m'a aide á affronter les diffécultés
A mes soeurs : ***Ichrake,Rahile,Messaouda,Mariam Batoule***
A mes frères : ***Okba,Zine eddine***
A mes amies : ***Rayan, Noura, Dounia zad, Amira, Sara, Safia, Safa, Hania***
*A mon fiancé "****Takie elddin Mehria****"*
A tous les membres de famille ***Belaid et Trad****, petite et grand*

REMERCIEMENT

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je remercie mon encadreur **Boussad Abdelmalek**. Pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour son aide, ses conseils, ses remarques et sa patience pendant ce travail.

Je remercie **M.Bahaddi Aissa** , de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **M. Akti Mouhamed** d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

J'adresse aussi des remerciements spéciaux tous les professeurs des mathématiques à l'université de Kasdi Merbah Ouargla.

Finalement, je tiens à exprimer mes profondes gratitudes à ma famille qui m a toujours soutenue et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire.

NOTATIONS

- Ω : un ensemble.
- $\mathcal{F}$: une tribu sur Ω.
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}$: est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: un espace de probabilité.
- $\mathbb{1}_A$: fonction indicatrice de l'ensemble A.
- v.a : variable aléatoire.
- $\mathbb{E}(X)$: l'espérance de variable aléatoire X.
- $\sigma(A)$: la plus petite tribu contenant A.
- $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$: l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: l'espace de variables aléatoires définies sur Ω, telles que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.
- $\perp$: indépendance ($X \perp Y$; X et Y sont des variable indépendantes).
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: une famille croissante de tribu $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.
- B_t : mouvement brownien.
- $\int_0^T \theta_s dB_s$: intéqrale stochastique.

— EDS : equation differentielle stochastique.

— $\mathbb{P}p.s$: presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$

— $s \wedge t$: min(s,t).

— $\|.\|$: la norme.

— randn() : fonction est générer une v.a qui suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Table des matières

TABLE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION

Les équations différentielles stochastiques, notées (EDS) jouent un rôle prédominant dans une large classe de domaine d'applications, y compris la biologie, la chimie, l'épidémiologie, la mécanique, la microélectronique, l'économie et les finances. Elles peuvent décrire des phénoménes physiques à variation rapide, et permettent de modéliser des trajectoires aléatoire comme les cours de la bourse ou le mouvement des particule soumises à des phénoménes de diffusion. L'EDS peut considérer comme une équation différentielle ordinaire perturbée avec un terme aléatoire. En général, une EDS se présente sous la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

avec la condition initiale $X_0 = x \in \mathbb{R}$, les fonctions $b(t, X_t)$ et $\sigma(t, X_t)$ sont mesurables de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $B_t, t \geq 0$ désigne le mouvement brownien standard. Le coefficient b est dite la dérive et σ s'appelle le coefficient de la diffusion. Dans ce contexte, ce mémoire est focaliser sur la notion des équations différentielles stochastique et quelques schémas numériques concernant leurs résolution qui sont proposés par [11]. Le présent manuscrit est structuré de la manière suivante :

Première chapitre : Donne d'une manière détaillé les rappels de base concernant la théorie des probabilités et le calcul stochastiques, mouvement brownien, intégral d'Itô, et les formules d'Itô.

Deuxième chapitre : Présente les grandes lignes à propos des équations différentielles stochastiques. Par la suite nous citons le théorème d'existence et l'unicité de la solution des EDS avec quelques propriétés qui concernent leurs solutions.

Troisième chapitre : Comporte les parties suivantes :
• Les simulations du mouvement brownien, des processus stochastiques qui sont sous la forme de fonctions en mouvement brownien et l'intégral de Ito.
• Le schéma de discrétisation d'une EDS et simulation d'un exemple proposé par [11].
A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer le travail.

CHAPITRE 1

RAPPELS DE PROBABILITÉ ET CALCUL STOCHASTIQUE

1.1 Rappels de probabilité

Voire [5] , [8]

1.1.1 La Tribu

Définition 1.1.1 *Soit Ω une ensemble.*
On note par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$= $\{A \setminus A \in \Omega\}$. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu (oú σ - algèbre) sur Ω si elle vérifie les proprietés suivantes :
• $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.
• *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.*
• *$\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable : $(A_n)_1^\infty \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$.*

En particulier : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$*, de měme* $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Remarque 1.1.1 *On dit que le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable tout espace muni d'une tribu $\mathcal{F}$ (dans notre cas un espace probabilisable).*

Définition 1.1.2 *(***Sous - tribu** *) On dit que $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega); A \in \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.3 *(***Tribu engendrée***) Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$,***la tribu engendrée par une famille de sous-ensembles** *$\mathcal{A}$ sur Ω est la plus petite tribu sur Ω contenant cette famille , on note $\sigma(\mathcal{A})$.Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$.*

1.1.2 Tribu borélienne

Définition 1.1.4 *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant tout les intervalles ouverts (ou fermés, semi-ouverts à droite ou à gauche,...). On note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

Exemple 1.1.1 *Soit* $\Omega = [0, 1]$.**La tribu borélienne sur** $[0, 1]$ *est la tribu engendrée par la famille de sous-esemble $\mathcal{A} = \{]a, b[: 0 \leq a < b \leq 1\}$ = {intervalles ouverts dans $[0, 1]$}. Elle est notée $\mathcal{B}_{[0,1]}$.*

1.1.3 Mesurabilité

Définition 1.1.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et (E, ξ) deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \longrightarrow E$ est dite mesurable par rapport à $(\mathcal{F}, \xi)$: $\forall A \in \xi$, si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, tel que*

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \setminus f(\omega) \in A\}.$$

1.1.4 Probabilité

Définition 1.1.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. On définit sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une probabilité $\mathbb{P}$ comme une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*
• $\mathbb{P}(\Omega)$ =1.
• $\mathbb{P}\,(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A)_n$ *pour des A_n appartenant à $\mathcal{F}$ deux disjoints.*

Remarque 1.1.2 $\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mathbb{P}$ *(ou $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A) définie par : $\mathbb{1}_A(\omega)$ = 1 si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega)$ = 0 si $\omega \notin A$.*

propriétés 1.1.1

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(A^c)$ = $1 - \mathbb{P}(A)$ *, pour tout A appartanant à $\mathcal{F}$.*
3. $\mathbb{P}(A \cup B)$ = $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *, $A \cap B$ = $\emptyset$,pour tout A et B appartanant à $\mathcal{F}$.*
4. *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B)$ = $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$, où B - A = B $\cap$ A^c.*
5. $\mathbb{P}(A \cup B)$ = $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ - $\mathbb{P}(A \cap B)$ *,pour tout A et B appartanant à $\mathcal{F}$.*
6. *Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ une suite croissante, $A_n \subset A_{n+1}$ et $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$= A, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(A_n)$ = $\mathbb{P}(A)$.*
7. *Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ une suite décroissante, $A_{n+1} \subset A_n$ et $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$= A, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.*

1.1.5 Espace de probabilité

Définition 1.1.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, on note le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité tel que :*
• *Ω est un ensemble non vide.*
• *$\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.*
• *$\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Un espace de probabilité est donc un cas particulier d'un espace mesuré.

1.1.6 Variable aléatoire

Voir [1]

Définition 1.1.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité.*
Une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *:*
X variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ *.*

remarques :

- *Il existe deux* ***types de variable aléatoire*** *discrètes et continues :*

1. *Une variable aléatoire discrète prend ses valeurs sur un ensemble fini ou dénombrable de points.*
2. *Une variable aléatoire continue prend ses valeurs sur ensemble infini non dénombrable de points.*

- ***La loi de variable aléatoire X*** *est la probabilité* $\mathbb{P}_X$ *définie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *par :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\{\omega, X(\omega) \in A\} = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A), \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

- ***L'espérance d'une variable aléatoire X*** *est définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

- ***La fonction de répartition d'une variable aléatoire X*** *est l'application* $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) &= \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, t])) \\ &= \mathbb{P}(\omega \in \Omega, X(\omega) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t). \end{aligned}$$

- *Si la loi de probabilité* $\mathbb{P}_X$ *admet* ***une densité*** *f, on peut écrire :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

tel que f est une fonction qui vérifie des deux conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq 0.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Définition 1.1.9 **(La tribu engendrée par une variable aléatoire)** *Soit X une variable aléatoire à valeur dans* $\mathbb{R}$*. On note par* $\sigma(X)$ *la tribu engendrée par X et on définie comme la plus petite tribu sur* Ω *qui rend X mesurable, ce qui est equivalent à :*

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B)/B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}).$$

Définition 1.1.10 **(Indépendance)** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilité*

1. *Soit A,B deux événement de* $\mathcal{F}$ *sont indépendantes si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

2. *Deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$ sont indépendants si et seulement si :*
$$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$
3. *Une variable aléatoire X est indépendance de la sous-tribu $\mathcal{F}_1$ si :*
$$\forall A \in \sigma(X), \forall B \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$
4. *X et Y deux variables aléatoires sont indépendants si et seulement si :*
$$\forall A \in \sigma(X), \forall B \in \sigma(Y) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

1.1.7 Espérance conditionnelle

Voir [2]

Définitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est espace de probabilité.

1. *Soit $B \in \mathcal{F}$, On appelle et on note la probabilité conditionnelle de A sachant B la mesure $\mathbb{P}(A/B)$:*
$$A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)} \qquad ; \mathbb{P}(B) \neq 0.$$
2. *Pour toute variable aléatoire X dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, L'esperance conditionnelle de X sachant B est définie par :*
$$\mathbb{E}(X/B) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\int_B X dP}{\mathbb{P}(B)}$$
3. *soit $X \in L^1$ et Y est une autre variable aléatoire, on peut définir comme un cas particulier*
$$\mathbb{E}(X/Y = y) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{Y=y})}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\int_{Y=y} X dP}{\mathbb{P}(Y = y)}$$
4. *soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$. On note l'espérance conditionnelle de X schant $\mathcal{B}$ par $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire telle que :*
   • $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ *est $\mathcal{B}$-mesurable.*
   • $\int_A \mathbb{E}(X/\mathcal{B}) dP = \int_A X dP \quad \forall A \in \mathcal{B}.$

   Remarque 1.1.3 *$\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ est la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. En particulier $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*
5. *si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Y est une variable aléatoire . On peut définir aussi comme cas particulier*
$$\mathbb{E}(X/Y) = \mathbb{E}(X/\sigma(Y))$$

   propriétés 1.1.2

   Soit X, Z deux variables aléatoires dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
   (a) *Si $X \perp B$ alors :*
   $$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X).$$
   (b) *Si X est-$\mathcal{B}$-mesurable, alors :*
   $$\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = X.$$
   (c) *Linéarité :*
   $$\mathbb{E}(aX + Z/\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) + \mathbb{E}(Z/\mathcal{B}).$$

1.2 Rappels de calcul stochastique

1.2.1 Processus Stochastique

Définition 1.2.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* (E, ξ) *un espace de probabilisable . Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *á valeur dans* (E, ξ) *comme une famille de variables aléatoires indexées par le temps t ou un sous-ensemble de* $\mathbb{R}_+$ *, avec la manière suivante :*

$$\begin{aligned} X : \quad [0, +\infty[\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

remarques :

Un processus dépend de deux paramètres le temps $t \in \mathbb{R}_+$ *et l'aléatoire* $\omega \in \Omega$ *que l'on note* $X_t(\omega)$*, telle que :*
• *Pour* $t \in \mathbb{R}_+$ *fixé,* $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l' espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*
• *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t(\omega)$ *est une fonction à valeurs réelles, appellée trajectoire du processus.*
• *Pour* $\omega \in \Omega$ *et t*$\in \mathbb{R}_+$*, la quantité* $X_t(\omega)$ *est appelée état du processus â l'instant t .*
• *L'espace* (E, ξ) *appelé espace des états du processus , Dans ce mémoire on prendra E =*$\mathbb{R}$ *et* ξ *=*$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *la tribu des boréliens de* $\mathbb{R}$*.*

Voir [1]

1.2.2 Loi d'un processus aléatoire

Dans ce context de loi d'un processus aléatoire, chaque processus stochastique est considére comme une variable aléatoire de Ω dans E^T (E^T l'espace des trajectoires).

$$X : \Omega \longrightarrow E^T$$

alors on peut définir la loi d'un processus avec la façon suivante :

Loi d'un processus dans le cas générale

Définition 1.2.2 *Soit* X_t *est un processus stochastique définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *á valeur dans* (E, ξ)*. La loi du processus* X_t *est définie par :*

$$\forall B \in \xi^{\otimes T}, \forall t \in T; \qquad \mathbb{P}_{X_t}(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X_t(\omega)\} \in B).$$

avec $\xi^{\otimes T}$ *la tribu produit définie sur* E^T*.*

Loi de dimesion finie d'un processus

Définition 1.2.3 *Soit* X_t *est un processus stochastique et P=*$\{t_1, t_2, ..., t_n\}$$\subset$ *T.*
Posons X_p*=* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$*. La loi de* X_P *est définie par :*

$$\forall B \in \xi^{\otimes n} : \qquad \mathbb{P}_{X_p}(\{\omega \in \Omega \backslash (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega)\} \in B)$$

On appelle loi de dimonsion finie du processus X_t *la famille* $(\mathbb{P}_{X_P})_{p \in P_f(T)}$ *(*$P_f(T)$ *l'ensemble du parties finie de T).*

Voir [4] et Voir [10]

1.2.3 Filtration

Définition 1.2.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ sur cet espace est une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$.*
On a alors, pour tout $0 \leq s < t$;

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

On appelle espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ tout espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$.
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $\mathcal{F}_t^X$ par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t).$$

Alors $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ appelée filtration naturelle du processus aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$.

Voir [3]

1.2.4 Définitions

1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, la variable aléatoire $X_t - X_s$ où $s < t$ est **l'accroissement du processus** sur l'intervalle $[s, t[$.

2. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **á accroissements indépendants** si $\forall\ 0 \leq r < s < t$; les accroissements $X_s - X_r$ et $X_t - X_s$ sont indépendants.

3. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **á accroissements stationnaires** si la variable aléatoire ($X_{t+s} - X_t$) ne dépend pas de t (ou $\forall t \geq 0, h > 0 \qquad X_{t+h} - X_t \sim X_h - X_0$) .

4. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **continu** si la fonction t $\longrightarrow X_t(\omega)$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$. (Les trajoctroires sont continues)
5. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **mesurable** si la fonction :

$$\begin{aligned} X : \quad ([0, +\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}) \quad &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (t, \omega) \quad &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

   est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

6. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ si pour tout $t \geq 0$, X_t est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$.

Voir [3] , [1]

1.2.5 Processus Gaussien

Définition 1.2.5 *Un processus aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dit gaussien si tout les combinaisons linéaires finies du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire réelle gaussien (suivent une loi normale), c'est-à-dire si :*

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_t, \sigma_t^2)$$

tel que le processus gaussien est caractérisé par son espérance m_t et sa covariance σ_t. Voir [5]

1.2.6 Processus de Markov

Définition 1.2.6 *Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et une filtration naturelle $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leqslant s)$.*
On dit que le processus (X_t) de Markov $\Longleftrightarrow \forall\ 0 \leq s < t$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable est bornée, on a :

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s).$$

Voir [5]

1.2.7 Martingales

Définition 1.2.7 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est* ***intègrable*** *($E(|X_t|) < +\infty$) et* ***adapté*** *à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\forall t \geq 0$ alors :*

1. *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$* ***est une martingale*** *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s : \forall 0 \leq s < t.$$

2. *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$* ***est une sur-martingale*** *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s : \forall 0 \leq s < t.$$

3. *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$* ***est une sous-martingale*** *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s : \forall 0 \leq s < t.$$

propriétés 1.2.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus ;*

1. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est constante, telle que :*

$$\forall t \geq 0 : \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0).$$

2. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sur-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est décroissante.*
3. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale, la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}(X_t)$ est croissante.*

Voir [7]

1.2.8 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ un espace de probabilité filtré, on not $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geqslant 0}\mathcal{F}_t)$ est contenue dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.8 *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega/T(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On associe à un temps d'arrêt T une tribu que l'on note $\mathcal{F}_T$, définite par

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Cette tribu répresente des èvenements antèrieurs à T.

1.2.9 Mouvement Brownien

Définition 1.2.9 *On appelle un mouvement brownien et on le note par B_t un processus stochastique qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $B_0 = 0$ *p.s*
2. $t \rightarrow B_t$ *est continu p.s*
3. *pour* $0 \leq s < t < u < v$ *les accroissement* $B_t - B_s$ *et* $B_u - B_v$ *sont indépendants*
4. *pour* $0 \leq s < t$ $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Voir [11]

Remarque 1.2.1 *Un mouvement brownien est dite standard si :*

$$B_o = 0\mathbb{P}p.s. \qquad \mathbb{E}(B_t) = 0, \qquad \mathbb{E}(B_t^2) = t.$$

propriétés 1.2.2 *Soit B_t un mouvement brownien standard :*

1. B_t *est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne* $\mathbb{E}(B_t)$ *= 0 et covariance* $Cov(B_t, B_s)$*= min(t, s) .*
2. B_t *est un processus de Markov.*
3. *Le mouvement brownien* B_t *est une martingale par rapport à la filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^B$*.*
4. B_t *n'est pas à variation bornée.*
5. B_t *à variation quadratique.*

Démonstration : voir [8]

1.2.10 Intégrale stochastique

Voir [8]

Fonction à variation bornée

Définition 1.2.10 *Soit* $Q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $\forall t > 0$*,*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |Q(t_i) - Q(t_{i-1})| < \infty,$$

avec le sup est pris sur toutes les partitions $(t_0, ..., t_n)$ *de* $[0, t]$*, et n arbitraire.*

Intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition 1.2.11 *Soit* f *et* Q *deux fonction de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* f *est continue et* Q *à variation bornée , et pour tout* $t > 0$.
On définit

$$\int_0^t f(x)dQ(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(Q(t_i) - Q(t_{i-1})),$$

avec h= $\max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ *, et* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$*, et* (x_i) *est une subdivision de l'interval* $[0, t]$.

1.2.10.1 Intégrale stochastique (ou Intégrale d'Itô)

Dans beaucoups d'application des mathématique financières ils ont trouvé des calculs similaire à l'intégrale de Riemann-Stieltjes. Donc dans ce cas l'idée de l'intégrale stochastique est proposée avec des processus stochastique sous la forme

$$\int_0^T \theta_s dB_s.$$

mais l'inconvénient du mouvement brownien n'est pas à variation bornée.
Dans ce mémoire nous focalisons sur la construction de l'intégrale de Itô.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espase de probabilité filtré, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standart par rapport à $\mathcal{F}_t$ et T un nombre positif. La téchnique de la construction est définit comme suit [6]

Promière étape : Intégrale de Itô pour les processus élémentaire

Définition 1.2.12 *On appelle processus élémentaire (ou étagé) $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un processus du type :*

$$\theta_t = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t), t \in [0, T]$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ forme une partition de $[0, T]$, et ϕ_i sont des variables aléatoires tel que est $\forall i = 1, n.\phi_i est \mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable.

L'intégrale de Itô dans ce cas est définit par :

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} \phi_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

propriétés 1.2.3 *Si $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un processus élémentaire, alors on a les égalités suivantes :*

1. $\mathbb{E}(\int_0^T \theta_s dB_s) = 0.$
2. $\mathbb{E}((\int_0^T \theta_s dB_s)^2) = \mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 ds).$
3. *Cette l'intégrale est linéaire en θ :*

$$\int_0^T (a\theta_s + \mu_s) dB_s = a \int_0^T \theta_s dB_s + \int_0^T \mu_s dB_s.$$

4. *Soit θ et μ deux processus élémentaire, l'isométrie d'Itô est vérifiée :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s dB_s \int_0^T \mu_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s \mu_s ds\right)$$

*La deuxième égalité s'appelle **l'isométrie** d'Itô.*

Démonstration :

1.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})/\mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) = 0,\end{aligned}$$

avec on a utilisé le fait que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$- mesurable et $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \perp \mathcal{F}_{t_{i-1}}$.

2. On a :
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i\phi_j(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))$$

• Si $i < j$; on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\phi_i\phi_j(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi_i\phi_j(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})/\mathcal{F}_{t_{j-1}}) \\ &= \mathbb{E}(\phi_i\phi_j(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}/\mathcal{F}_{t_{j-1}})) \\ &= 0.\end{aligned}$$

telle que B_i est une martingale, on a $\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}/\mathcal{F}_{t_{j-1}})$ = 0.

• Si $j < i$
On obtient le même résultat.

• Si $j = i$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i^2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi_i^2((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2/\mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i^2\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2).\end{aligned}$$

On a :
$\mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2)$= $t_i - t_{i-1}$.
Alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \theta_s dB_s\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\phi_i^2\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2(t_i - t_{i-1})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta_s^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right).\end{aligned}$$

donc l'isométrie est vérifiée.

Deuxième ètape : Intégrale de Itô sous la forme $\int_0^t \theta_s dB_s$
Soit $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ un processus élémentaire définie comme :

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^T (\theta_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s))dB_s = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}).$$

propriétés 1.2.4 *1. Cette intégrale est linéaire en θ et on a la proposition précédente :*

$$\bullet\ E\Big(\int_0^t \theta_s dB_s\Big) = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet\ E\bigg(\Big(\int_0^t \theta_s dB_s\Big)^2\bigg) &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (\theta_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s)dB_s)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s)ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right). \end{aligned}$$

2. Si $t \in [t_k, t_{k-1}[$, alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

3. Le processus $\int_0^t \theta_s dB_s$, $t \in [0,T]$ est une martingale continue de carrée intégrable.

Troisième ètape : La généralisation de l'intégrale de Itô
Dans cette étape nous exposons la manière de la généralisation de l'intégrale de Itô sur une classe des processus stochastiques ont des propriétés spécifiques.
Soit

$$\mathcal{H}_T = \left\{(\theta_t)_{t\in[0,T]} : \theta \text{ est adapté, continu à gauche, borné à droite et } \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right) < \infty\right\}.$$

et

$$\mathcal{M}_T = \left\{(\mathrm{M}_t)_{t\in[0,T]} \text{ martingale continue de carrée intégrable telle que } \mathrm{M}_0 = 0\right\}.$$

D'aprés [12] $\mathcal{H}_T$ et $\mathcal{M}_T$ passédent les proprietées suivantes

1. $\mathcal{H}_T$ muni par la norme
$$\|\theta\|_{T,1}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$
est un espace de banach ($\mathcal{H}_T$ est un espace vectoriel normé et complet).

2. $\mathcal{M}_T$ muni par la norme
$$\|M\|_{T,2}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} M_t^2\right)$$

3. L'ensemble des processus élémentaires est dans $\mathcal{H}_T$ ($\forall\theta \in \mathcal{H}_T$, $\exists(\theta_t^n)$ des processus élémentaires ; $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\theta_t^n - \theta\|_{T,1} = 0$)

Soit $\theta \in \mathcal{H}_T$, D'aprés (3) il existe une suite (θ_t^n) des processus élémentaires telle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\theta_t^n - \theta\|_{T,1} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\theta_s^{(n)} - \theta)^2 ds\right) = 0.$$

D'aprés (1) :
(θ_t^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_T \Longleftrightarrow \lim_{n,m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\theta_s^n - \theta_s^m)^2 ds\right) = 0.$
D'autre part on à (D'aprés l'inégalité de Doob [3])

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \left(\theta_s^{(n)} - \theta_s^{(m)}\right) dB_s\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\theta_s^n - \theta_s^{(m)}\right)^2 ds\right) \underset{n,m\to\infty}{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n,m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T (\theta_s^{(n)} - \theta_s^{(m)})^2 ds\right) = 0 \tag{1.1}$$

La propriété (3) dans deuxième ètape ;
On a

$$\int \theta_t^n dB_t \in \mathcal{M}_T.$$

$(1.1) \Longrightarrow \int_0^t \theta_s^n dB_s$ est suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$
puisque $\mathcal{M}_T$ est un espace complet $\Longrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_T$ tel que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \theta_s^n dB_s = M \equiv \int_0^t \theta_s dB_s.$$

1.2.10.2 Propriétés de l'intégrale stochastique :

1. Linéarité :
$$\int_0^t (c\theta_s + K_s)\, dB_s = c\int_0^t \theta_s dB_s + \int_0^t K_s dB_s.$$
2. Espérance nulle et isométrie :
$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = 0$$
et
$$cov\left(\int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t K_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge s} \theta_r K_r dr\right).$$
3. $\int \theta dB$ est une martingale continue de carré intégrable ;
$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right).$$

1.2.10.3 Approximation de l'intégrale de Itô avec un processus élémentaire

Soit $(\theta_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{H}_T$, on peut définir une suite des processus élémentaire avec façon suivante

$$\theta_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n \theta_{t_{i-1}} \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_{t_i}}(t),$$

avec $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ et $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} |t_i - t_{i-1}| = 0$.
Alors on a

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \theta_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

1.2.11 Formule d'Itô

voir[9]

Formule d'Itô en dimension 1

Théorème 1.2.1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement browien stantard, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f'(B_t)ds\right)^2 < \infty, \forall t > 0.$$

alors $\forall t > 0$

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)dB_s.$$

Exemple 1.2.1 *Soit $f(x) = x^2$, on a :*

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$$

et on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (2B_s)^2 ds\right) = \int_0^t 4sds = 2t^2 < \infty$$

Donc la formule d'Itô s'écrite alors

$$\begin{aligned} B_t^2 - B_0^2 &= 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds. \\ B_t^2 &= 2\int_0^t B_s dB_s + t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Formule d'Itô en dimension 2

Théorème 1.2.2 *Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement browien stantard et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, telle que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\right)^2 ds\right) < \infty, \forall t > 0.$$

Alors

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)ds.$$

Exemple 1.2.2 *Soit la fonction $f(t,x) = x^2 - 2t$, on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

et on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (2B_s)^2 \, ds\right) < \infty$$

Donc la formule d'Itô s'écrite alors

$$\begin{aligned} B_t^2 - 2t &= \int_0^t -2ds + \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ B_t^2 - t &= 2\int_0^t B_s dB_s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Processus d'Itô

Définition 1.2.13 *Voir [3]*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et B_t un mouvement brownien. On appelle processus d'itô, un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \leq T; X_t = X_0 + \int_0^t b_s(x_s)ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)dB_s,$$

la forme differentielle équivalente :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.2}$$

avec
- $X_0 est \mathcal{F}_0$*-mesurable.*
- $(b_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et s'applle la coefficient de derivé et* $\int_0^T |b_t|ds < +\infty$ $\mathbb{P}$*p.s.*
- $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et s'applle la coefficient de diffusionet* $\int_0^T |\sigma_t|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$*p.s.*

Chapitre 2

Équations Différentielle Stochastiques

2.1 Équations Différentielle Stochastiques

Voir [3]

Définition 2.1.1 *Soit T un nombre positif. On considére deux fonctions f et g mesurables de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne ègalement un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien B_t sur cet espace .*
On peut considérer une équation d'une forme plus générale

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

On appelle cet équations une équations différentielle stochastique.

Dans cette équation, f et g sont les coefficients de l'èquation (2.1) (ce sont des fonctions scalaires), et x une variable aléatoire tel que ($\mathbb{E}(|x|^2) < +\infty$) est la condition initiale. La deuxième intégrale représente l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien.

L'inconnue est le processus stochastique $(X_t)_{t\geqslant 0}$, il représente une solution (forte) de l'équation (2.1) , et appelé processus de diffusion.

On récrite l'équation (2.1) sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x \end{cases}$$

Définition 2.1.2 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geqslant 0}$ dans $\mathbb{R}$ est appelé une solution de l'équation (2.1) si qui vérifie les propreités suivantes :*

1. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est continu et adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.
2. *les intègrales* $\int_0^t f(s,X_s)ds$ *et* $\int_0^t g(s,X_s)dB_s$ *ont un sens et l'ègalitè*
$$f(X_t,t)\in\mathcal{L}^1([0,T],\mathbb{R}) \qquad , \qquad g(X_t,t)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}).$$
3. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *vérifie* (2.1) *c'est-à-dire :*
$$X_t = x + \int_0^t f(s,X_s)ds + \int_0^t g(s,X_s)dB_s.$$
Pour tout t , $\mathbb{P}$. *ps.*

2.2 Existence et unicité de la solution

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur f et g pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (2.1)

Théorème 2.2.1 *Voir[3]*
Si f et g sont des fonctions continues.

1. **Condition de lipschitz locale** *:*
il existe une constante K telle que : $|f(x,t)-f(y,t)|+|g(x,t)-g(y,t)|\leq K|x-y|$
pour tout les $x,y\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,T]$.
2. **Condition de croissance** *:*
il existe une constante L telle que : $|f(x,t)|^2+|g(x,t)|^2\leq L^2(1+|x|^2)$
pour tous $x\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,T]$.
3. *La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$ et X est carré integrable. ($\mathbb{E}(|X_0|^2)<+\infty$).*

Alors, pour $t\leqslant T$, l' EDS (2.1) admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$ á trajectoires continues.De plus cette solution vérifie
$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2)<+\infty$$
L'unicité signifie que si $(X_t)_{t\geqslant o}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ sont deux solution de l'équation (2.1), donc $\mathbb{P}$-presque sûrement $\forall t\geqslant 0$, $(X_t)_{t\geqslant 0}=(Y_t)_{t\geqslant 0}$, alors
$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|=0)=1$$

2.3 Propriété de Marckov des solutions d'équations différentielles stochastique

Voir [5]
On note $(X_s^{t,x}, s\geq t)$ la solution de l'équation (2.1) partant de x à l'instant t. Le processus $X^{t,x}$ vérifie pour $s\geq t$
$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r,X_r^{t,x})dr + \int_t^s g(r,X_r^{t,x})dB_r$$

Sous les conditions du théorème (2.2). On peut montrer que :

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_s^{0,x}} \quad \forall s \geq t$$

ce qui montre que la solution de (2.1) est un processus de Marckov par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$. On a

$$\mathbb{E}(f(X_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_s)|X_t) = \Phi(s,t,X_t)$$

où $\Phi(s,t,x) = \mathbb{E}(f(X_s^{t,x}))$, $s \geq t$. Ce résultat permet de calculer facilement des espèrances conditionnelles. En particulier si

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x})du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x})dB_u$$

on obtient un processus de Marckov homogène

$$\mathbb{E}(f(X_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_s)|X_t) = \Phi(s,t,X_t) = \Psi(s-t,X_t)$$

où $\Phi(s,t,X_t) = \mathbb{E}(f(X_s^{t,x})) = \mathbb{E}(f(X_{s-t}^{0,x}))$ et $\Psi(u,x) = \mathbb{E}(f(X_u^{0,x}))$.

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1 *(**Martingale exponentielle**) Voir [5]*

Proposition 2.4.1 *Soit $\delta \in \Lambda$ et M_0 une constante. La solution de $dM_t = \delta_t M_t dB_t$ est*

$$M = M_0 \exp\left(\int_0^t \delta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \delta_s^2 ds\right)$$

Si de plus $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \delta_s^2 ds\right)\right) < \infty$, le processus $(M_t, t \leq T)$ est martingale d'espérance M_0.

Exemple 2.4.2 *Soit l'EDS linèaire $dX_t = -\alpha X_t dt + dB_t$ admet une solution forte.*
La formule de d'Itô montre que cette solution peut s'écrire sous la forme d'intégrale suivante :

$$\mathbf{X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}$$

On doit verifier les condition du théorème d'existance.
On a :

$$f(x,t) = -\alpha X_t \qquad , \qquad g(x,t) = 1.$$

les fonctions f et g sont continues.

1. *il existe une constante K telle que : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*

$$|-\alpha x + \alpha y| + |1-1| = |\alpha||x-y| \leq K|x-y| \Rightarrow K = |\alpha|$$

2. *il existe une constante L telle que : pour tous $x \in \mathbb{R}$*

$$|-\alpha x|^2 + |1|^2 = |\alpha|^2|x|^2 + 1 \leq |\alpha|^2|x|^2 + |\alpha|^2 = |\alpha|^2(1+|x|^2)$$

3. *Alors l'EDS $dX_t = -\alpha X_t dt + dB_t$ admet pour tout condition initiale une solution forte $(X_t)_{t\geq 0}$ P.s continue et unique.*

Recherche de la solution :
On pose : $X_t = f(x,t)$.
D'aprés le développement limite de Taylor d'ordre 2 dt et dB_t

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}dtdB_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dB_t^2\right)$$

On a : $dt^2 = 0$, $\qquad dtdB_t = 0$, $\qquad dB_t^2 = dt$.

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \\ dX_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t \end{aligned}$$

par identfication :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\alpha X_t \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\alpha f \Rightarrow f(x,t) = Ke^{-\alpha t} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

avec $f(x,t) = K(X_t)e^{-\alpha t}$.

$$\begin{aligned} f(x,t) &= K(X_t)e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = K'(X_t)e^{-\alpha t} = 1 \\ K'(X_t) &= e^{\alpha t} \Rightarrow K(X_t) = X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}dB_s \\ \Rightarrow X_t &= f(x,t) = e^{-\alpha t}(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}dB_s) \end{aligned}$$

$$\mathbf{X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}$$

CHAPITRE 3

SIMULATION NÉMURIQUE

3.1 Mouvement Brownien

La simulation d'un mouvement brownien nécessite de considérer sa version discrète avec la manière suivante proposé par [11] :
Soit B_t un mouvement brownien standard tel que : $0 \leq t \leq T$, posons $h = \frac{T}{N}$/ $N \in \mathbb{N}$, $t_i = i.h$ / i= 1,N est une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ et $B_{t_i} = B_i$. De la défitition du mouvement brownien on peut obtenir les propriétés suivantes :

1. $B_0 = 0$ p.s

2. $B_i = B_{i-1} + dB_i$ (avec $dB_i = B_i - B_{i-1}, i = 1, N$).

3. Les dB_i sont des variables aléatoires indépendantes et sous forme $\sqrt{h}.\mathcal{N}(0, 1)$.

D'aprés les trois propriétés précédentes l'algorithme de simulation d'un mouvement brownien est définit par :

1. $T = 1, N = k, h = \frac{T}{N}$ (initialiser la valeur de T est le nombre de points de discrétisation pour l'intervalle $[0, T]$)

2. $dB_1 = B_1 - B_0 = B_1 = \sqrt{h}.randn()$ (Générer une v.a qui suit $\mathcal{N}(0, h)$).

3. Pour $i = 2, N$
   $dB_i = \sqrt{h}.randn()$
   $B_i = B_{i-1} + dB_i$
   Fin

Des différentes simulations concernant le mouvement brownien sont effectuées avec la maniére suivante :

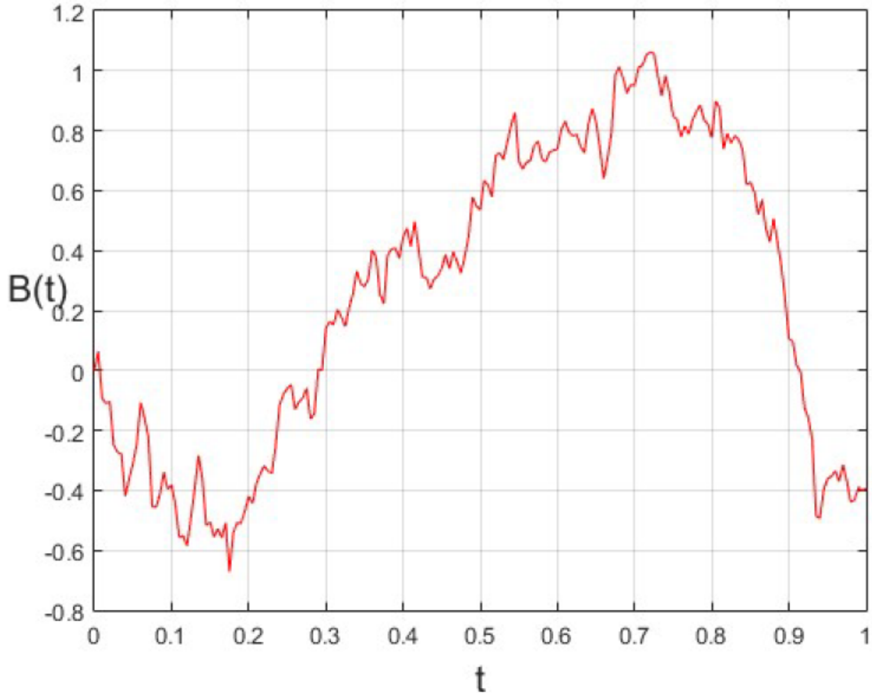


FIGURE 3.1 – Trajectoire d'un mouvement brownien discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 200 points

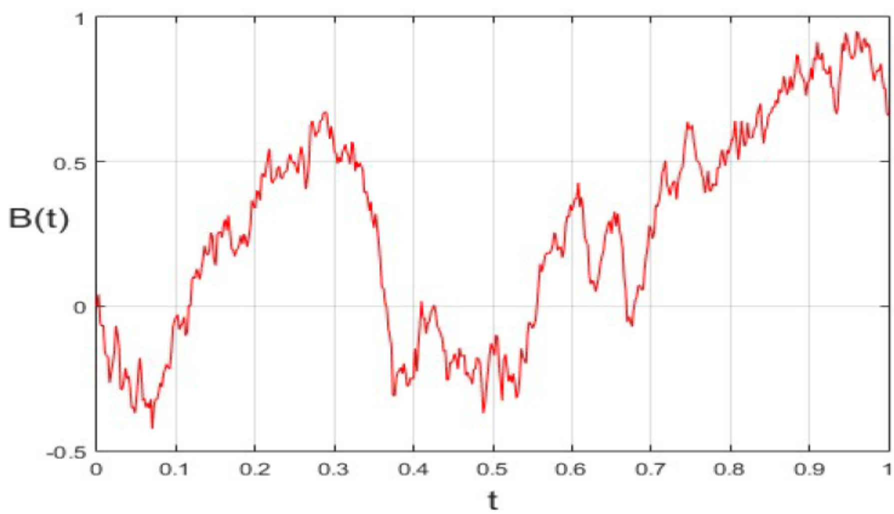


FIGURE 3.2 – Trajectoire d'un mouvement brownien discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 500 points

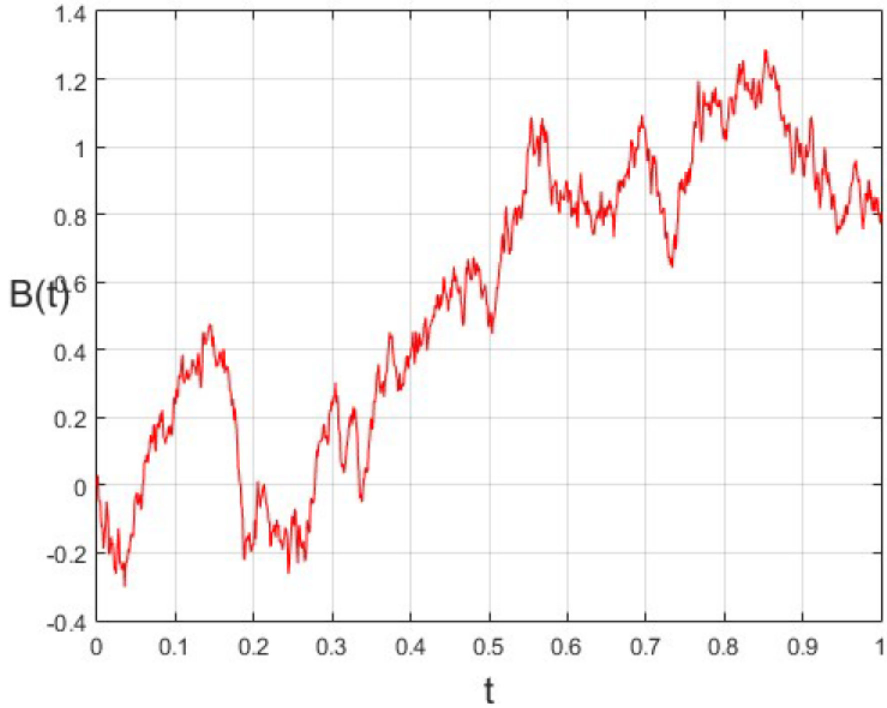


FIGURE 3.3 – Trajectoire d'un mouvement brownien discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 1000 points

3.2 Simulation d'un processus stochastique sous la forme $f(B_t)$:

Dans cette partie nous effectuons la simulation du processus suivant :

$$X_t = f(B_t) = \exp(t + \frac{1}{2}B_t)$$

tel que : X_t représente dans ce cas une solution d'une équation différentielle stochastique linéaire. La technique de la simulation est basée sur la partie précédente concernant le mouvement brownien et en substituant dans la formule de f nous obtenos les figures des résultats ci-dessous

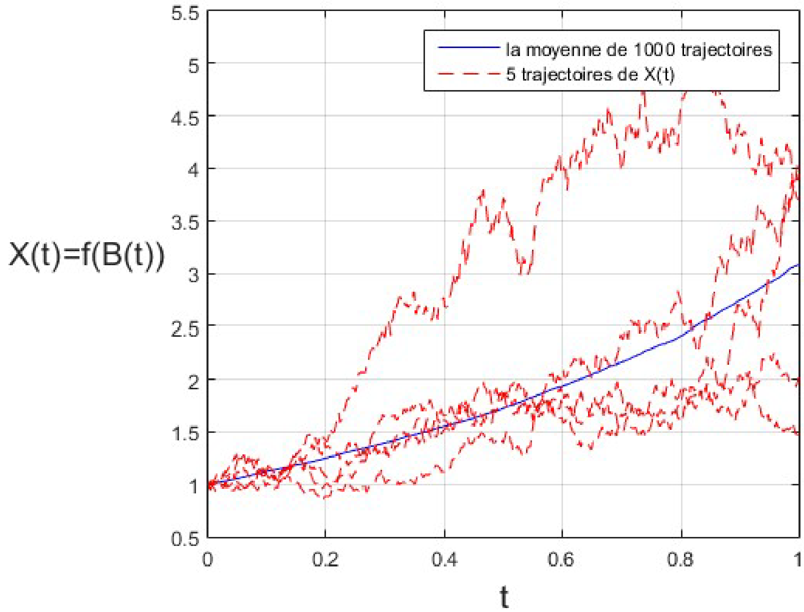


FIGURE 3.4 – 5 trajectoire du processus $X_t = f(B_t)$ discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 500 points et la moyenne de 1000 trajectoires de X_t

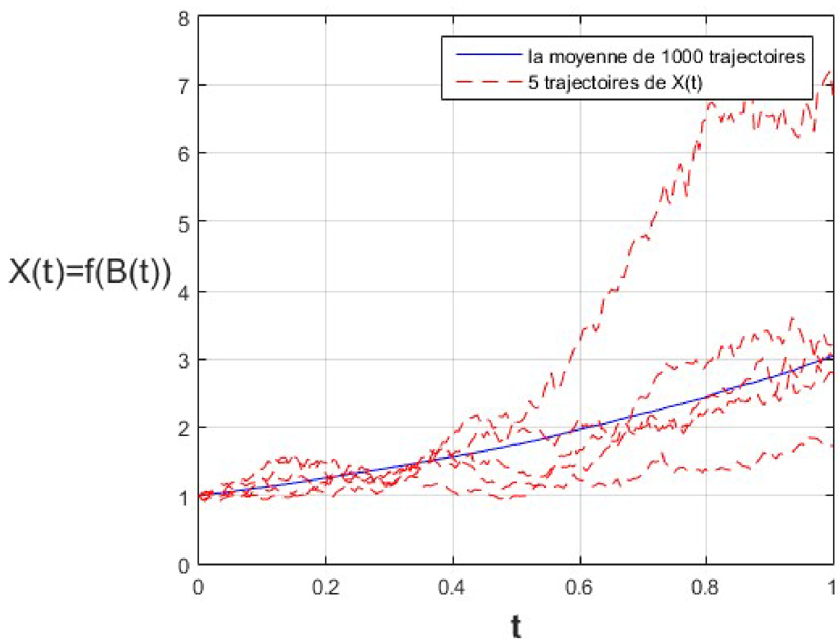


FIGURE 3.5 – 5 trajectoire du processus $X_t = f(B_t)$ discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 200 points et la moyenne de 1000 trajectoires de X_t

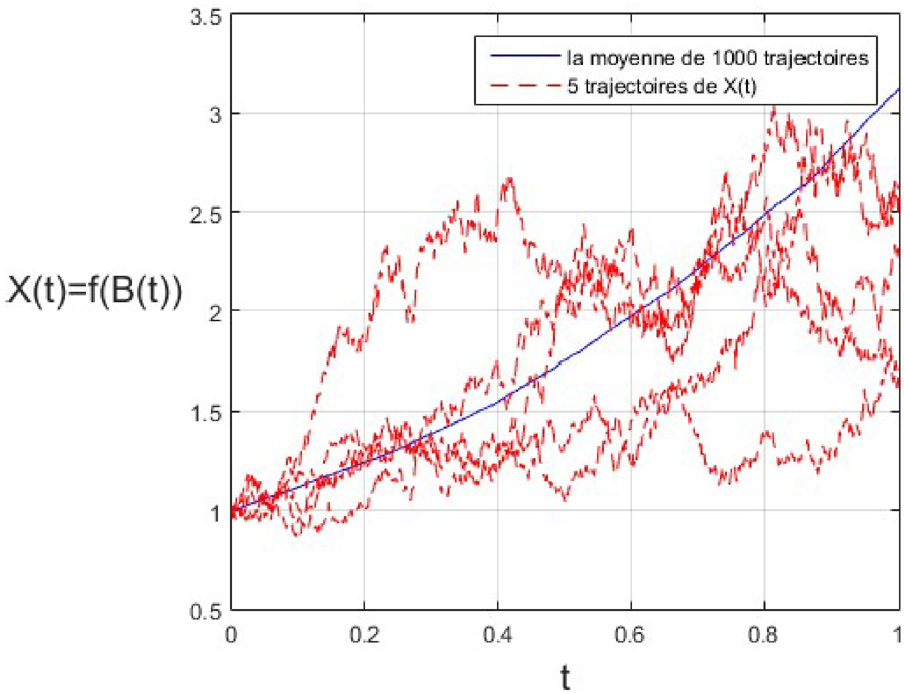


FIGURE 3.6 – 5 trajectoire du processus $X_t = f(B_t)$ discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 1000 points et la moyenne de 1000 trajectoires de X_t

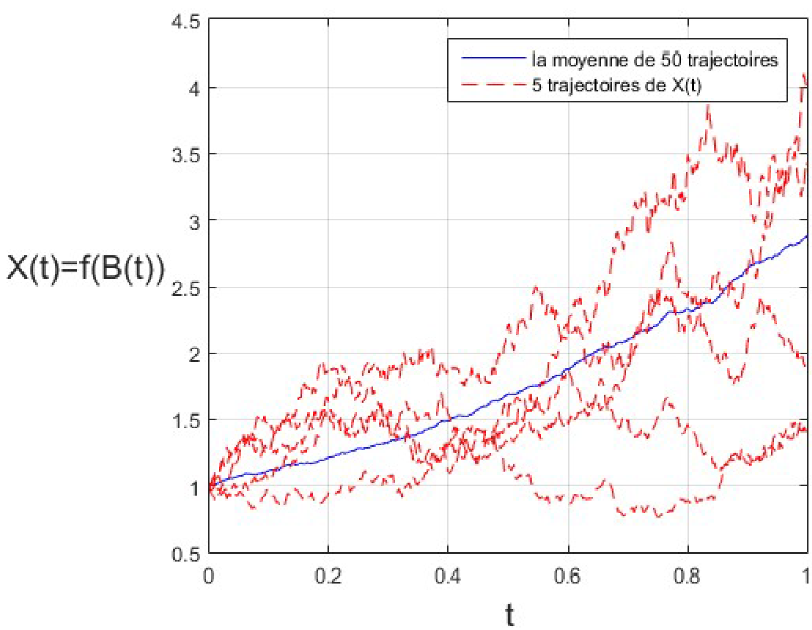


FIGURE 3.7 – 5trajectoire du processus $X_t = f(B_t)$ discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 500 points et la moyenne de 200 trajectoires de X_t

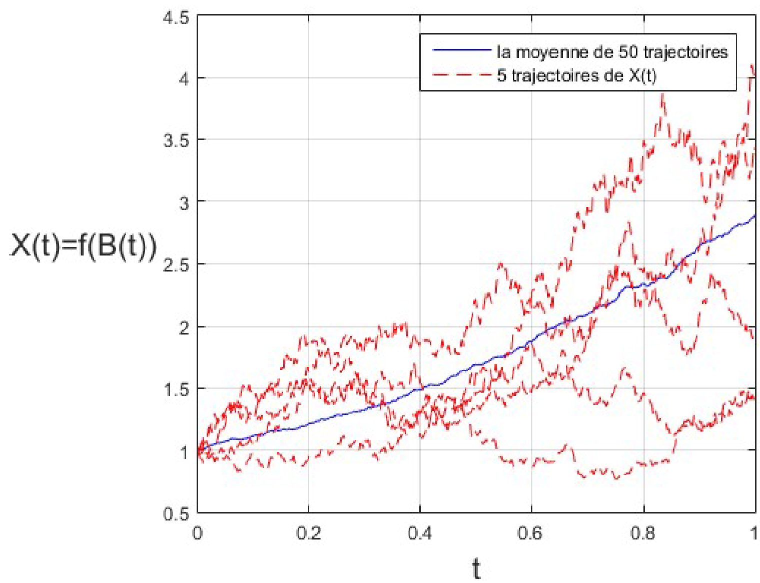


FIGURE 3.8 – 5 trajectoire du processus $X_t = f(B_t)$ discrétisées dans l'intervalle $[0, 1]$ avec N= 500 points et la moyenne de 50 trajectoires de X_t

Discussion :
Dans les figures de note simulation nous voyons que la trajetoire moyenne est lisse par rappot aux autres trajectoires individuelles du processus X_t, et surtout dans la figure (3.6), elle est presque sous la forme d'une fonction exponentielle. Du point de vu théorique cette remaque confirme le résultat suivant :

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\exp(t + \frac{1}{2}B_t)) = \exp(t).\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}B_t)).$$

On a : $\mathbb{E}(\exp(\lambda B_t)) = \exp(\frac{\lambda^2}{2}t)$.
Dans notre cas $\lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathbb{E}(X_t) = \exp(t).\exp\left(\frac{1}{8}t\right) = \exp\left(\frac{9}{8}t\right)$.
La mesure $Averr = \|Ac_t - \exp(\frac{9}{8}t)\|_\infty$ a été introduite pendant les simulation pour analyser le comportement de la courbe moyenne Ac_t autour de $\exp(\frac{9}{8}t)$ et nous obtenous le tableau suivant :

Nombre des trajectoires	M= 200	M= 500	M= 1000	M= 2000	M= 4000
Averr	0.0679	0.1171	0.0273	0.0273	0.0268

Remarque 3.2.1 *A partir de ce tableau nous pouvons prédire que Averr est décroissant par rapport au nombre des trajectoires.*

3.3 Simulation de L'intégrale de Itô :

Dans cette partie une approximation numérique a été faite pour un exemple de l'intégrale de Itô $\int_0^T B_t dB_t$ est basée sur les étapes suivantes :

Première étape

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{h \longrightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{N-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)$$

avec $h = \frac{T}{N}/T \in \mathbb{N}$ et $t_i = i.h/i = 0, N$ est une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Preuve :

$$\sum_{i=0}^{N-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{N-1} B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2 - (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right) = \frac{1}{2}\left(B_T^2 - B_0^2 - \sum_{i=0}^{N-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right)$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{2}\left(B_T^2 - B_0^2 - \sum_{i=0}^{N-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right) = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

D'aprés la formule de Itô on a :

$$\frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T = \int_0^T B_t dB_t$$

Donc le la résultat est vrai.

Deuxième étape
Dans notre simuiation nous approximons numériquement l'intégrale à l'aide de la formule

$$aprox = \int_0^T B_t dB_t \simeq \sum_{i=0}^{N-1} B_{t_i} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

avec une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ fine, ce la veut dire que le pas de la discrétisation tend vers zéro $(h \longrightarrow 0)$

Troisième étape
En fin nous calculons l'erreur commise de cette approximation qui est définit par :

$$err = |aprox - (\frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T)|$$

Concernant notre simulation, nous proposons de différentes valeurs de T et N (N le nombre de points de discrétisation l'intervalle $[0, T]$), puis nous approximons l'intégrale $\int_0^T B_t dB_t$, et enfin nous calculons l'erreur commise.
Les tableaux ci-dessous présentent les résultats de la simulation

T	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
aprox	-0.0535	-0.0802	-0.1070	-0.1337	-0.1604	-0.1872	-0.2139	-0.2407	-0.2674
err	0.0032	0.0047	0.0063	0.0079	0.0095	0.0110	0.0126	0.0142	0.0158

TABLE 3.1 – La valeur approximée de l'intégral et l'erreur, le nombre de points de discrétisation est $N = 500$

T	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
aprox	-0.0319	-0.0478	-0.0638	-0.0797	-0.0957	-0.1116	-0.1276	-0.1435	-0.1595
err	0.0034	0.0050	0.0067	0.0084	0.0101	0.0118	0.0134	0.0151	0.0168

TABLE 3.2 – La valeur approximée de l'intégral et l'erreur, le nombre de points de discrétisation est $N = 1000$

T	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.10
aprox	0.0043	0.0065	0.0087	0.0108	0.0130	0.0152	0.0173	0.0195	0.0217
err	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012

TABLE 3.3 – La valeur approximée de l'intégral et l'erreur, le nombre de points de discrétisation est $N = 4000$

Remarque 3.3.1 *Dans le dernier tableau nous observons que l'erreur d'approximation est presque nulle, donc nous pouvons déduire que cette méthode d'approximation estefficace si le choix du pas de la discrétisation est au voisinage de zéro.*

3.4 Le Schéma de discrétisation d'une EDS par la méthode d'Euler-Maruyama

voir[11]
Dans le premier volet de cette demière partie de simulation nous expliquons le schéma de discrétisation numérique d'une EDS par la méthode D'Euler-Maruyama, puis nous appliquons cette dernière à un exemple d'EDS linéaire.
Soit l'équation différentielle stochastique suivante sous la forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.1}$$

telle que : f, g deux fonctions scalaires, X_0 est une variable aléatoire qui représente la condition initial, et X_t la solution de l'équation (3.1) qui est un processus aléatoire.
L'équation (3.1) peut s'écrire sous la forme différentielle comme suit :

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.2}$$

Dans notre cas nous intéressons par l'équation (3.2). La méthode D'Euleur-Maruyama pour la résolution numérique de l'équation (3.2) dans l'intervalle $[0, T]$ est définit par les étapes suivantes :
Première étape
Discrétisons l'intervalle $[0, T]$ avec un pas $\Delta t = \frac{T}{N}$, puis nous obtenons les points $\tau_j = j\Delta t / \; j = 0, N$.
Deuxième étape
Posons X_j l'approximation de X_{τ_j}, donc la méthode D'Euleur-Maruyama prend la forme suivante :

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}}) / \; j = 1, N \tag{3.3}$$

Avec l'accroissement $((B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}}))$ est généré par la méthode précédente du mouvement brownien.

Dans l'implémentation de cette méthode, il est utile de choisir le pas de la discrétisation Δt comme un multiple de δt, où δt est le pas de la discrétisation du mouvement brownien ($\Delta t = K\delta t$ avec $K > 1$), ce qui assure que l'ensemble des points $\{t_j\}$ sur lequel est basée la trajectoire du mouvement brownien discrétisée contient les points $\{\tau_j\}$ auxquels la solution est calculée par la méthode EM.

Concernant notre simulation nous appliquons la méthode d'Euleur-Maruyama au probléme suivant :

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dB_t, X_0 = a, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.4}$$

Avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le problème (3.4) est connue dans les mathématiques financières sous le nom équation de Black-Scholes [12]. A l'aide de la formule de Itô nous pouvons montrer que la solution exacte de l'équation (3.4) est sous la forme

$$X_t = a \exp((\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu B_t)$$

Dans notre cas nous choisissons le problème (3.4) avec les paramètres suivants :
• $\lambda = 2, \mu = 1, a = 1$ et $[0, T] = [0, 1]$
• Le pas de la discrétisation du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$ est : $\delta t = \frac{1}{2^l}$
• Nous appliquons la méthode EM avec un pas $\Delta t = K\delta t$
Enfin notre algorithme de simulation est structuré comme suit :

1. Choisissons les nombres entiers l et K .

2. Calculons une version discrétisée d'une trajectoire du mouvement brownien dans la grille des points $t_j = \frac{j}{2^l}/j = 0, 2^l$

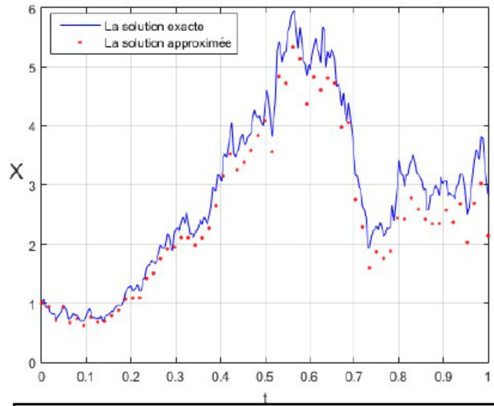
3. Evaluons la solution exacte $X_{t_j} = a \exp((\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu B_t)$ (La solution exacte est stockée dans un vecteur X_{exacte})

4. A partir de (3.3) nous calculons la solution approximée X_j sur la grille des points $\tau_j = j\frac{K}{2^l}/j = 1, \frac{2^l}{K}$ (La solution approximée est stockée dans un vecteur $X_{approxime}$)

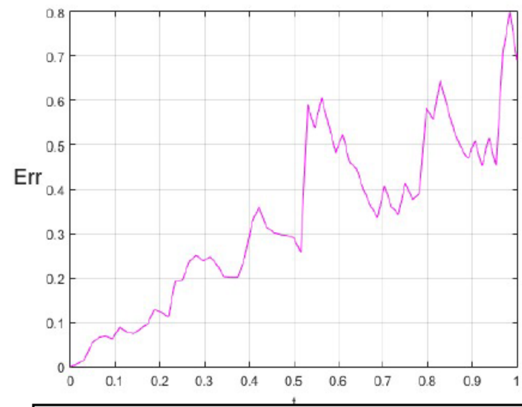
5. Mesurons l'erreur de la méthode EM par la relation suivante :

$$Err = |X_{exacte} - X_{approxime}|$$

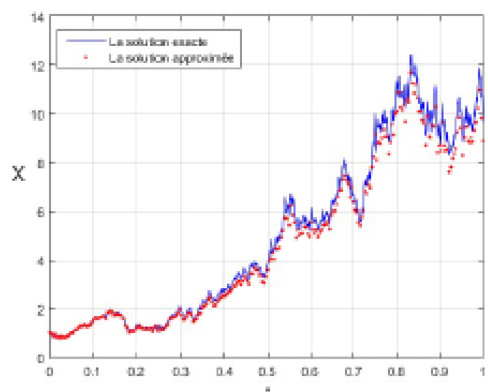
Résultats obtenus :



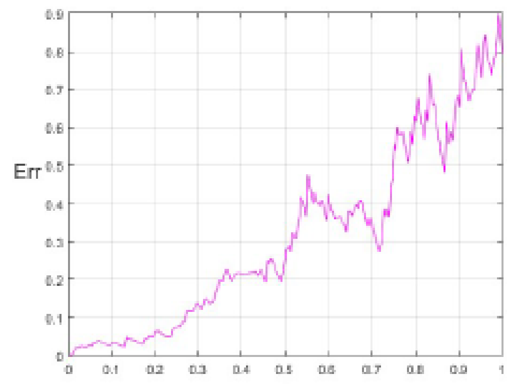
La méthode EM : l=8, K=4



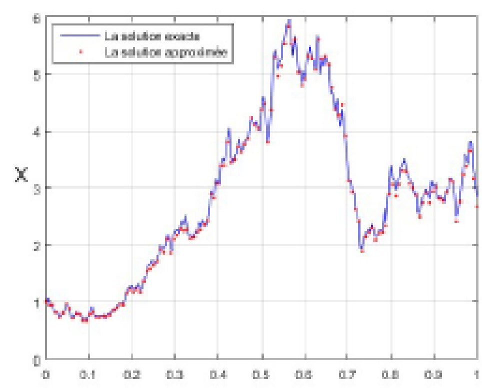
L'erreur de la méthode EM : l=8, K=4



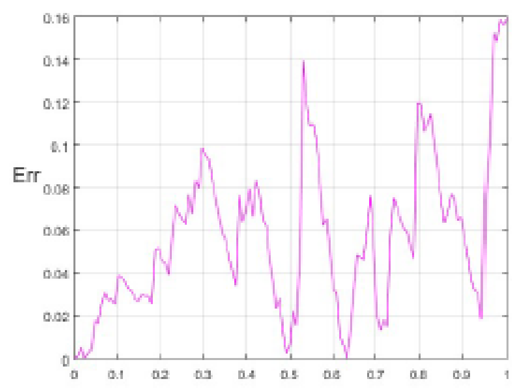
La méthode EM : l=10, K=4



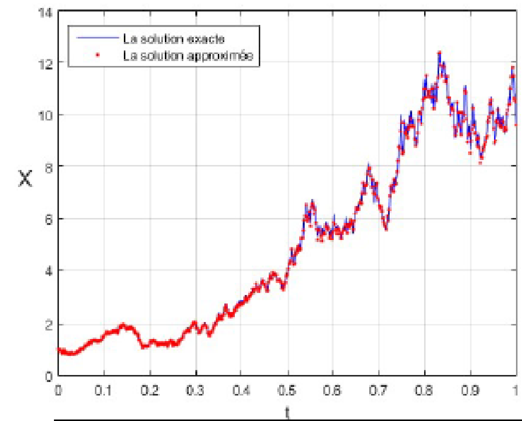
L'erreur de la méthode EM : l=10, K=4



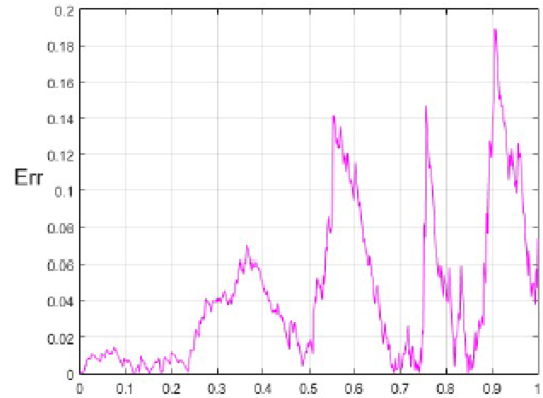
La méthode EM : l=8, K=2



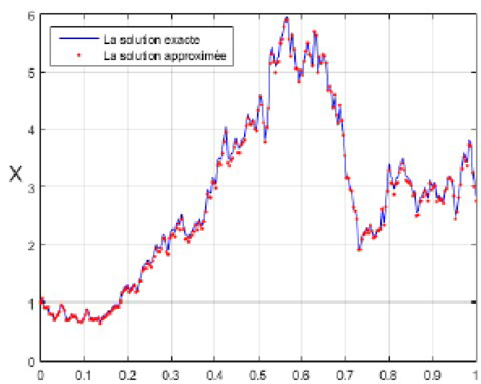
L'erreur de la méthode EM : l=8, K=2



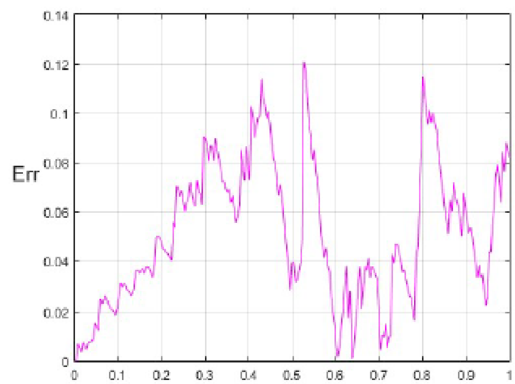
La méthode EM avec l=10, K=2



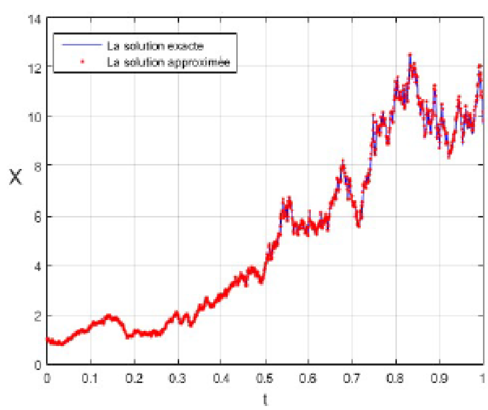
L'erreur de la méthode EM : l=10, K=2



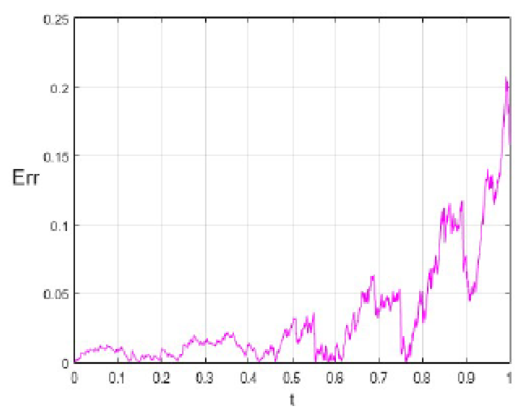
La méthode EM avec l=8, K=1



L'erreur de la méthode EM : l=8, K=1



La méthode EM avec l=10, K=1



L'erreur de la méthode EM : l=10, K=1

D'après les simulations précédentes nous remarquons que dans les dernières figures la solution approximée par la méthode d'Euleur-Maruyama presque identique avec la solution exacte et l'erreur négligeable, dans ce cas nous avons choisir les paramètres de la méthode EM avec la manière suivante

1. Le pas de la discrétisation du mouvement brownien $\delta t = \frac{1}{2^{10}}$, ce qui implique que l'en-

semble des points sur lequel est basée la trajectoire du mouvement brownien discrétisée est $\{t_j = j\frac{1}{2^{10}}/j = 1, 2^{10}\}$

2. Le pas de la méthode EM est $\Delta t = K\delta t = \delta t$, ce qui implique aussi le même ensemble de poitns $\{\tau_j = j\frac{1}{2^{10}}/j = 1, 2^{10}\}$ auxquels la solution est calculée par la méthode EM.

Donc nous pouvons déduire, si on choisit la même grille de discrétisation pour le mouvement brownien et la solution approximée avec un pas fine, la méthode EM offre une bonne approximation à la solution de l'EDS avec une erreur presque nulle.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Durant l'élaboration de ce modeste travail que nous nous sommes fixé, nous avons essayé de contourner la majorité des outils concernant la théorie des probabilités et le calcul stochastique dans le premier volet, puis nous avons englobé d'une manière suffisante la notion des équations différentielles stochastiques (EDS) et leurs théorèmes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution . A la fin de ce mémoire nous avons réalisé des simulations numériques basées sur les techniques de la discrétisation du mouvement Brownien standard avec quelques types de processus stochastiques, et la méthode d'Euler-Maruyama pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques. Finalement, nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste monde des équations différentielles stochastiques

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dunod.Statistique et probabilités 2014 Paris ISBN 978-2-10-071449-0

[2] J.Jacques Ruch et M.Line Chabanol Espérance conditionnelle martingales 2012-2013

[3] Lamberton D. and Lapeyre B. Introduction au calcul stochastique appliaué à la finance. ellipses,1997.

[4] L.Gallardo Mouvement brownien et calcul d'Itô 6 rue de sorbonne 75005 Paris 2008,hermann éditeurs isbn 978 27056 67979

[5] M. Jeanblanc cours de Calcul stochastique septembre 2006

[6] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, Hermann, 1986
.

[7] N.GUILLOTIN-PLANTARD Inroduction au calcul stochastique 13 nouvembre 2009.

[8] O.Lévéque Cour de probabilités et calcul stochastique EPFL 2004-2005.

[9] P. Billingsley. Probability and measure, Wiley, 1995.

[10] T.Chonavel processus alétoires traitement des signaux mineure TSI avril2007.

[11] Desmond J. Higham, "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations" *SIAM Review*, pp. 525-546, Vol. 43, No. 3, (Sep., 2001)

[12] B. Oksendal.Stochastic Differential Equations "An Introduction With Applications"(corrected 5th ed.), Springer Verlag, 2000..

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est d'englober la majorité des outils théoriques concernant les équations différentielles stochastiques, de proposer des simulation numériques basées sur un schéma de discrétisation du mouvement Brownien standard avec quelques types de processus stochastiques et la méthode de d'Euler-Maruyama pour la résolution numérique des EDS.

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques, intégrale de Itô, mouvement Brownien, méthodes numériques stochastiques, processus aléatoire.

Abstract

Our aim in this dissertation is to cover the majority of theoretical tools concerning stochastic differential equations, propose numerical simulations based on a discretization scheme of a standard Brownian motion with some types of stochastic processes and the Euler-Maruyama method for numerical resolution of SDE.

Key Words: Stochastic differential equations, Ito integral, Brownian motion, stochastic numerical methods, random process.

الملخص

هدفنا في هذه المذكرة هوالتغطية على غالبية الأدوات النظرية فيما يتعلق بالمعادلات التفاضلية العشوائية، وتقدم المحاكاة العددية على أساس مخطط تقديري للحركة البراونية القياسية مع بعض أنواع العمليات العشوائية وطريقة Euler-Maruyama للقرار الرقمي من EDS .

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية ، تكامل ايتو، الحركة البراونية، الطرق العددية العشوائية، العملية العشوائية.