Equations différentielles stochastiques et simulation numérique

Belaid Safa

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
safabelaid95@gmail.com

Abstract

Ce travail focalise sur quelques méthodes numériques appliquées aux équations différentielles stochastiques et leurs type de convergence proposé par [1]. Des simulations sont élaborées avec Matlab dans les sujets suivants: Mouvement brownien, Intégration stochastique, Méthodes d'Euler-Maruyama et Méthode de Milstein.

Mots Clés: Equations différentielles stochastiques, Intégral de Itô, Mouvement brownien, Simulation stochastique

1. Introduction

Une équation différentielle stochastique autonome est définie sous la forme intégrale par:

$$X_0 + \int_0^t f(X(s))\,dx + \int_0^t g(X(s))\,dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

avec f et g sont des fonctions scalaires, la variable aléatoire X_0 est la condition initiale.
La deuxième intégrale représente l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Le processus stochastique $X(t)$ est la solution de l'équation (1.1).

L'équation (1.1) est équivalente à:

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dB_t, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.2}$$

Pour appliquer une méthode numérique à (1.2) sur [0,T] nous discrétisons d'abbord l'intervalle avec la façon suivante:
Posons $\triangle t = \frac{T}{N}$ et $n_j = j\triangle t$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $j = \overline{1,N}$. Enfin notre approximation numérique à $X(n_j)$ sera noté X_j.

Concernant ce mémoire, trois méthodes numériques qui seront appliquées au shéma de discritisation des problèmes de type (1.2) avec une étude comparative de convergence

2. Préliminaires

Dans cette section, nous éxposons quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et les équations différentelles stochastiques

Définition 2.1 *On appelle un mouvement brownien et on le note par B_t un processus stochastique qui vérifie les conditions suivantes:*

1. $B_0 = 0$ *p.s*
2. *t$\mapsto$ B_t est continu p.s*
3. *pour $0 \leq s < t < u < v \leq T$ les accroissement $B_t - B_s$ et $B_u - B_v$ sont indépendants*
4. *pour $0 \leq s < t \leq T$ $B_t - B_s \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$*

Définition 2.2 *Soit B_t est un mouvement brownien sur [0,T], $X(t)$ est un processus stochastique adapté à la filtration naturelle de B_t.*
L'intégrale de Itô $\int_0^T f(X(t))\,dB_t$ est définie par:

$$\lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{k-1} X(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Avec

$$0 = t_0 < t_1 .... < t_n = T \quad et \quad \pi_n = \max_{i=0,n} |t_{i+1} - t_i|$$

Théorème 2.3 *Soit b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K, telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ on à:*

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|$ *(la condition de Lipshitz)*
2. $|$b(t,x)$|$ $+ \|\sigma(t,y)\| \leq K(1+|x|)$ *(croissance linéaire).*
3. $E[X_0^2] < +\infty$

Alors l'EDS admet une unique solution X_t tq: $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X(s))\,dx + \int_0^t \sigma(s,X(s))\,dB_s$ vérifiant $E[X_t^2] \leq +\infty$. Le processus X_t est appelé processus de diffusion

3. Énoncé de quelques résultats de simulation

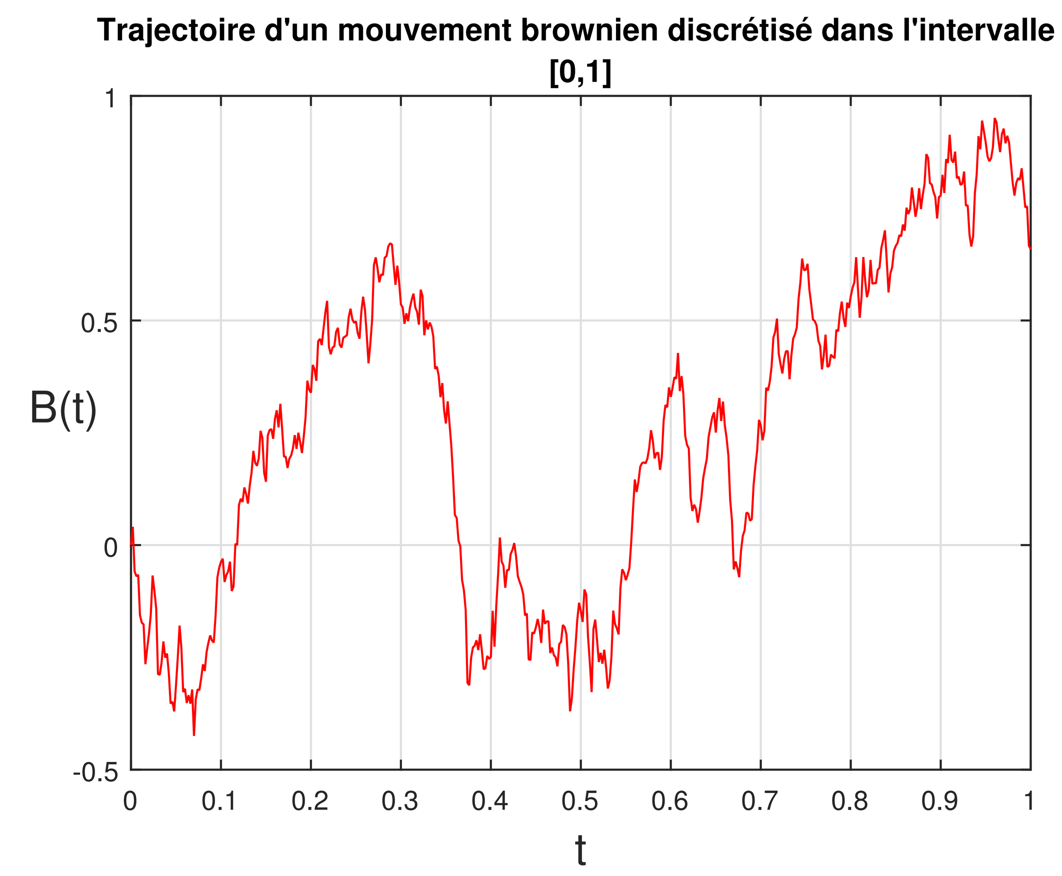

figure-01-

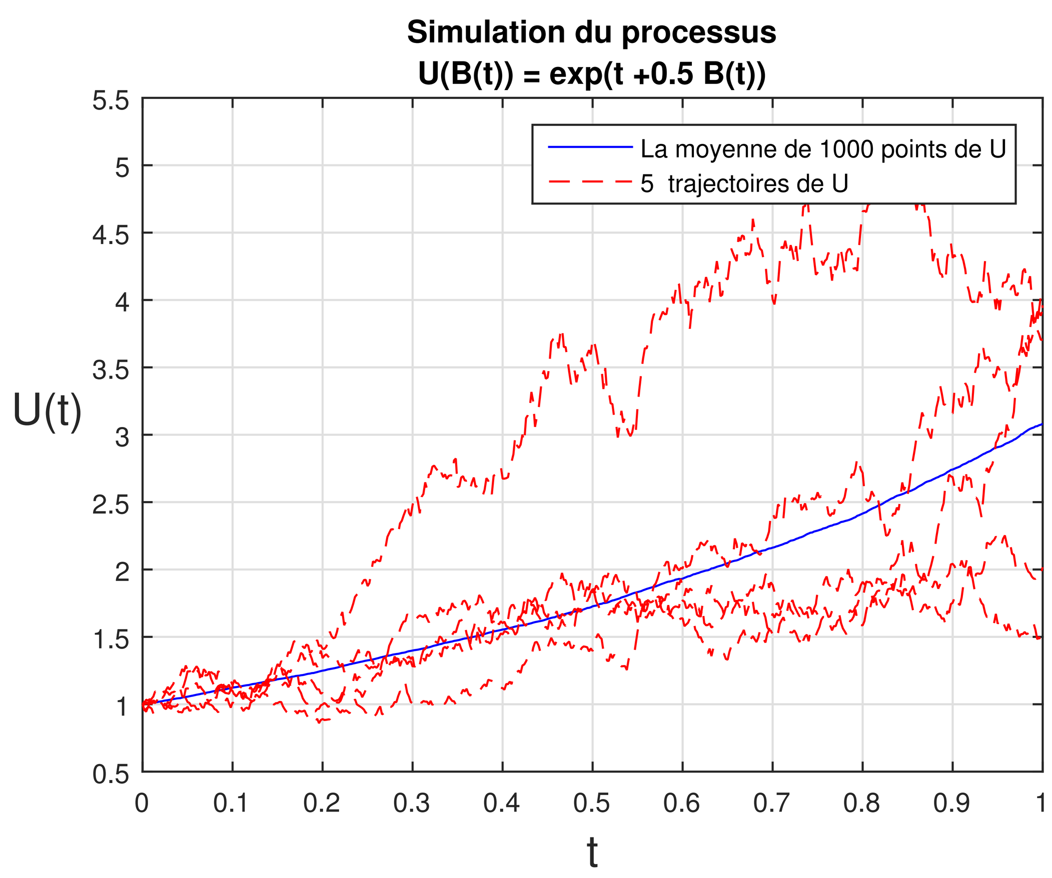

figure-02-

References

[1] Desmond J. Higham, "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations" *SIAM Review*, pp. 525-546, Vol. 43, No. 3, (Sep., 2001)

Mastériales 2019. Mastériales 2019. Mastériales 2019. Mastériales 2019. Mastériales 2019. Mastériales 2019.