UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculte des Mathematiques et des Sciences de la Matiere

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par : KHERROUBI FATIHA

Théorème

Représentation de fonctionnent des systèmes par les structures d'événements et systèmes de transitions et isomorphisme entre les deux représentation

Devant le jury compose de :

M.r.Y.Geurbousa Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
M.r.Benmoussa M-Tayeb Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
M.r.M.Boussaid Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Introduction

Depuis le début des années 1980 l'intérêt porter aux réseaux informatiques à donné naissance à une multitude de modèles de description de fonctionnement des système pour les étudier et décrire leur fonctionnement. Les machines parallèles : pour accélérer la réalisation d'une tache il y a l'idée de sa décomposition en tâches élémentaires qui peuvent être réalisées parallèlement, distribuées à des processeurs distincts chacune doit être réalisée en une unité de temps en suite les résultats partiels seront recomposes pour obtenir le résultat final. Parmi les principaux modèles pour décrire le fonctionnement d'un système : les structures d'événements qui se passent sur la connaissance des événements, l'ordre temporelle forcé et les incompatibilités qui peuvent exister entre les événements.Et les systèmes de transitions qui se base sur les actions qui fait passé le système d'un état a un autre. Dans ce travail nous allons regarder de prés ces deux représentation :

1. Structure d'événements définition et propriétés.

2. Système de transition définition et propriétés.

3. Passage de structure d'événements à système de transition et passage de système de transition à structure d'événements et isomorphisme.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **Boussaid Mohammed** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager.
Je tiens également mes remerciements à mes professeurs, surtout les professeurs de l'algèbre et géométrie à l'université de **ouargla**.
En fin, je remercie ma famille, surtout mes parents pour leur soutien moral, et toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

NOTATIONS

- ➤ $(E, \leq)$ Ensemble ordonné.
- ➤ $\#$ Relation de conflit.
- ➤ $(E, \leq, \#)$ Structure d'événement .
- ➤ $(E, \leq, \#, l, A)$ Structure d'événement étiquetée.
- ➤ $\#_I$ Relation de conflit immédiat.
- ➤ $\longleftrightarrow$ concurrent .
- ➤ $\nearrow$ consistant.
- ➤ $ST = (S, A, T)$ système de transition.
- ➤ $ST = (S, A, T, e)$ système de transition étiquetée.
- ➤ A^* l'ensemble des mots.
- ➤ ξ_s l'ensemble des calcules.
- ➤ $C_(E, \leq, \#)$ l'ensemble des configuration finies.
- ➤ $\wedge$ le mot vide.

Chapitre 1

Structures d'événements

1.1 Relation d'ordre

Définition 1.1.1 *Une relation R définit sur un ensemble E est appelle relation d'ordre si pour tout $x, y, z \in E$ R vérifie :*

1. *Réflexivité : xRx.*
2. *Antisymétrique : xRy et yRx alors $x = y$.*
3. *Transitivité : xRy et yRz alors xRz.*

R sera noté $\leq$.

Définition 1.1.2 *Un ensemble E ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. On noté cet ensemble $(E, \leq)$.*

1.2 Conflit

Définition 1.2.1 *Soient* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné,* R *une relation binaire sur* E*,* R *est dit de conflit si :*

1. $\forall x \in E$ *non*$(x\ R\ x)$ *(*R *est irréflexive).*
2. R *est symétrique (*$xRy \Longleftrightarrow yRx$*).*
3. $\forall x, y, z \in E$ *; (*$xRy, x \leq z$ *et* $x \neq z) \Longrightarrow yRz$*.*
   La relation R *de conflit sera note* $\#$ *.*

Définition 1.2.2 *Une structure d'événement est un triplet* $(E, \leq, \#)$ *ou* E *est un ensemble dont les éléments sont appelés événements,* $\leq$ *une relation d'ordre sur* E *et* $\#$ *est une relation de conflit sur* E*.*

Définition 1.2.3 $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements, un étiquetage de* $(E, \leq, \#)$ *est un couple* (e, A) *ou :* A *est un alphabet et* e *est une application de* E *dans* A

$$e : E \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto e(x)$$

le 5-uple $(E, \leq, \#, e, A)$ *est appelé une structure d'événement étiquetée.*

Définition 1.2.4 *On définit le passe et le future d'un élément* $x \in E$ *par* $\downarrow x = \{y \in E / y \leq x\}$, $\uparrow x = \{\ y \in E / x \leq y\}$*, (*$\downarrow x$ *pour le passe et* $\uparrow x$ *pour le future) alors* $x \# y \Longrightarrow (\uparrow x \bigcap \uparrow y = \varnothing$ *et* $y \notin \downarrow x$ *et* $x \notin \downarrow y$ *).*

Définition 1.2.5 *On appelle configuration de* $(E, \leq, \#)$ *tout* $B \subseteq E$
B *configuration* $\Longleftrightarrow \forall x \in B$, *le passe de* x *dans* B *(note* $\downarrow x \subseteq B$*).*

Proposition 1.2.6 *Si* $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements et* x *un élément de* E*, alors le passe de* x *est une configuration sans conflit.*
Toute configuration est reuion du passe de ses éléments.

Preuve. Soit x un élément de la structure d'événement $(E, \leq, \#)$; le passe de x, $\downarrow x$, est clairement clos dans le passe.
Il est également sans conflit ; en effet, si g et f étaient dans $\downarrow x$ avec $g \# f$, alors on aurait : ($g < x$ et $g \# f$ d'ou $f \# x$) puis ($f < x$ et $f \# x$ donc $x \# x$) ce qui est absurde puisque la relation de conflit est irréflexive. Donc $\downarrow x$ est une configuration de $(E, \leq, \#)$ et x un élément de C. Puisque C est close dans le passe, le passe de x est inclus dans C, et on a bien $C = \cup_{x \in C} (\downarrow x)$ ■

1.3 Résultats

Soit $(E, \leq, \#)$ une structure d'événement, x, y deux événements :

1. On dit x est concurrent a y et on note $x \longleftrightarrow y$ si seulement si x et y ne sont pas en conflit et sont incomparable pour $\leq$.
   $x \longleftrightarrow y \iff$ non $(x \# y$ ou $x \leq y$ ou $y \leq x)$.

2. On dit que x et y sont en conflit immédiat et on note
   $x \#_1 y \iff (x \# y$ et $z \leq x$ et $z \neq x \implies$ non $(z \# y)$).

3. $(E, \leq, \#)$ est dite finitaire ssi le passé de tout élément est fini $\forall x \in E$ card$(\downarrow x)$ $=$ card$(\{f \in E/f < x\}) < \infty$.

4. Un sous-ensemble C de E est dit sans conflit ssi :
   $\forall x, f \in C$ non $(x \# f)$.

5. Le sous-ensemble C est clos dans le passe ssi :
   $\forall x \in C \downarrow x \subseteq C$

6. si $x \# y$ alors $\forall$ x', y' in E, $x \leq x'$ et $y \leq y' \implies x' \# y'$. (On dit que le conflit est hérité pour le future).

7. $x \# y \implies x$ et y sont incomparable pour l'ordre $\leq$.

8. $x \# y \implies x$ et y n'ont pas de majorant commun.

1.4 Étiquetage agréable

Définition 1.4.1 $(E, \leq, \#, e, A)$ *une structure d'événement étiquetée, l'étiquetage (e, A) est dit agréable ssi* ($\forall$ *x* $\in$ *E*, $\forall y \in$ *E ; x* $\#_I$ *y ou x*$\longleftrightarrow$ *y*) $\Longrightarrow e(x) \neq e(y)$. *(c-a-d les événement qui sont en conflit immédiat, ou qui sont concurrent non jamais la même étiquète) si on note x//y si (x* $\#_I$ *y ou x* $\longleftrightarrow$ *y).*
On appelé bloc d'événement toute partie de E dont les élément sont deux a deux en conflit immédiat ou concurrent.
$F \subseteq E, F$ *bloc d'événements* $\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in F, \forall y \in F; x//y)$ *et en fin le degré d'une structure d'événement* $(E, \leq, \#)$ *est le sup des cardinaux des bloc d'événements de* $(E, \leq, \#)$ *dans* $N \cup \infty$, $d^\circ(E, \leq, \#) = \sup\{|B|/B$ *est un bloc d'événement dans* $(E, \leq, \#)\}$.*[2]*

Théorème 1.4.2 *(Théorème de Dillworth)*
Soit $(E, \leq)$ *un ensemble ordonnée, le nombre minimum de chaines deux a deux disjointes recouvrant l'ensemble E est égal qu maximum fini de la taille des anti-chaine de (E,* $\leq$*). Dans une structure d'événement (E,* $\leq$*, #), si on a un étiquetage agréable les événement qui sont dans un ordre temporelle forcé peuvent avoir la même étiquète. Autrement dit la donné d'un étiquetage agréable revient a la donné d'un recouvrement de la structure par des chaines deux a deux disjointes.*

Remarque 1.4.3 *Tout structure d'événement sans conflit de degré n admet un étiquetage fini sur un alphabet de n lettre.*

Preuve. Si $(E, \leq, \#)$ est une structure d'événements sans conflit ; les bloc d'événement sont exactement les antichaine de $(E, \leq)$, $D(E, \leq, \#)= n$ donc la taille maximal des antichaine est n d'après dilworth ($(E, \leq)$ peut être recouvert par n chaine $E = \cup_{i=1}^{n} C_i$, $C_i \bigcap_{i \neq j} C_j = \varnothing$ Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ et $l : E \longrightarrow A$

l'application définie par : $e(x)= a_i$ $\forall$ $x \in C_i$ (e, A) est un étiquetage agréable de (E, $\leq$, $\#$). ∎

Remarque 1.4.4 *(E, $\leq$, $\#$) est une structure d'événements si la taille maximal des antichaine de (E, $\leq$) est un nombre fini n ; alors (E, $\leq$, $\#$) admet un étiquetage agréable a l'aide d'un alphabet de n lettre.*

Preuve. D'après Dillworth E admet un recouvrement par n chaines deux a deux disjointes, et on étiquette agréablement la structure d'événements (E, $\leq$, $\#$) comme dans la remarque 1.1.4. ∎

Conjecture 1.4.5 *Si (E, $\leq$, $\#$) est une structure d'événement finitaire de degré n alors :*

1. *(E, $\leq$, $\#$) admet un étiquetage agréable sur un alphabet de n lettres au plus.*
2. *(E, $\leq$, $\#$) admet un étiquetage agréable sur un alphabet A dont le cardinal est bornée par un polynôme en n .*
3. *(E, $\leq$, $\#$) admet un étiquetage agréable sur un alphabet A fini.*
   - Pour n =0 ; E= $\varnothing$.
   - On prend A =$\varnothing$ et l'unique application de $\varnothing$ dans $\varnothing$ (e : $\varnothing \longrightarrow \varnothing$) ;(e,A) est un étiquetage agréable de (E, $\leq$, $\#$).
   - Pour n = 1 ; (E,$\leq$) est un chaine .
   - On prend A = $\{a\}$ et l l'application de E dans A définie par : $\forall$ $x \in$ E ; $e(x) = a$; (e, A) est clairement un étiquetage agréable de (E, $\leq$, $\#$).

Chapitre 2

Système de transitions du point de vue de la Théorie des mots

2.1 Système de transitions

Définition 2.1.1 *Un système de transition est un triple $ST = (S, A, T)$ tel que :*
-S est un ensemble dont les éléments sont appelés ***états*** *de ST.*
-T est une partie de $S \times A \times S$ dont les éléments $(x, a, y) \in T$ sont appelés ***transitions****.*
- A un ensemble, dit alphabet dont les éléments sont appelés ***actions*** *(ou lettres).*

Définition 2.1.2 *On appelle calcule dans ST tout suite finie de transition. d est un calcul de ST si :*
$d = (x_0, a_0, y_0)(x_1, a_1, y_1)...(x_n, a_n, y_n)$ avec $y_i = x_{i+1}$.
$d = x_0 a_0 x_1 ... a_{n-1} x_n$ tel que

$i(d) = x_0$ *état initiale,* $f(d) = x_n$ *état finale .*

Remarque 2.1.3 *On note* A^* *l'ensemble des mots finis tel que*
$A^* = \{a_0 a_1 ... a_n / n \in \mathbb{N} \quad et\ a_i \in A : i \leq n\}$*, et* $P(A^*)$ *est l'ensemble des langage sur* A*.*
On design par $\wedge$ *le mots vide .*

Définition 2.1.4 *On note* ξ_s *l'ensemble des calcules dans un système de transitions* ST *et on définit l'application*

$$e'' : \xi_s \longrightarrow A^*$$

$$d \longmapsto e''(d)$$

tel que si $d = x_0 a_1 x_1 ... a_{n-1} x_n$ *,* $e''(d) = a_0 a_1 ... a_{n-1}$*,* $e''(d)$ *est l'étiquette de* d*.*

Remarque 2.1.5 *L'image directe de* ξ_s *par l'application* e'' *est appelle le langage de système de transition* ST *et on note* $L_s = e''(\xi_s)$

2.1.1 Calculs entre les états d'un système de transitions

La **concaténation** de $m = a_0 a_1 a_2 .... a_n$ et $u = b_0 b_1 b_2 .... b_r$ et le mot $mu = a_0 a_1 a_2 .... a_n b_0 b_1 b_2 .... b_r$.
On prolonge la loi (.) à l'ensemble $P(A^*)$ et qu' on note (+). $X + Y = \{m.u/m \in X$ et $u \in Y\}$, $\forall X, Y \in P(A^*)$ le neutre de $(A^*, +)$ est $\wedge$ qu'on note 0. $\forall X \in P(A^*)$ on pose $X^0 = 0 = \{\wedge\} X^n = X^{n-1} + X$.On a $X^* = \cup_{n \geq 0} X^n$.
$\xi_s(x, y) = \{d \in \xi_s / i(d) = x\ et\ f(d) = y\}$,
$d_s(x, y) = \{e''(d)/d \in \xi_s(x, y)\}$.$d_1 = x_0 a_0 x_1 a_1 x_2 ... x_{n-1} a_{n-1} x_n$ et $d_2 = y_0 b_0 y_1 b_1 y_1 ... y_{r-1} b_{r-1} y_r$
si : $x_n = y_0$ la **concaténée** de d_1 et d_2 est le calcul note $d_1 d_2 = x_0 a_0 x_1 a_1 x_2 ... x_{n-1} a_{n-1} y_0 b_0 y_1 b_1 y_2 ... y_{r-1} b_{r-1} y_r$

2.2 Système de transition restreints

Définition 2.2.1 *$ST = (S, T, A)$ un système de transitions on à $s, s' \in S$ et le mot $m \in A^*$*

1. *On définit une relation binaire notée $<$ dans S et on posant :*
   $s < s' \iff \exists m \in A^* : (s, m, s')$ *est une relation d'ordre.*
2. *On note $\uparrow S = \{s' \in S / s < s'\}$ pour le future et $\downarrow S = \{s' \in S / s' < s\}$ pour le passé d'un élément $s \in S$.*

2.2.1 Axiomes des systèmes des transitions restreints

Axiome T_0 **:**la relation T dans $S \times A^* - \{\wedge\} \times S$ est acyclique c'est-à-dire :
$\forall m \in A^* - \{\wedge\} \forall s, s' \in S : (s, m, s') \Longrightarrow s \neq s'$.
Axiome T_1 **:** tout élément de S est atteint en un nombre fini d'étapes à partir de s_0.

$$S = \uparrow s_0$$

. **Axiome** T_2 **:** on a deux axiomes :
$T_2^{'} : \forall s, s', s'' \in S \ \forall a, b \in A \ s' \neq s''(s, a, s')$ et $(s, b, s'') \Longrightarrow a \neq b$
$T_2^{''} : \forall s', s'' \in S \ \forall a, b \in A \ s' \neq s''(s', a, s'')$ et $(s', b, s'') \Longrightarrow a = b$
Axiome T_3 **:** : c'est la propriété du carreau vers le future $\forall s, s_1, s_2 \in S \ \forall a_1, a_2 \in A$ (s, a_1, s_1) , (s, a_2, s_2) et $s_1 \neq s_2$ et $(\uparrow s_1) \bigcap (\uparrow s_2) \neq \varnothing$
$\Longrightarrow \exists s' = sup\{s_1, s_2\}$ et (s_1, a_2, s'), (s_1, a_1, s').
Axiome T_4 **:** c'est la propriété du carreau vers le passé $\forall s, s_1, s_2 \in S \ \forall a_1, a_2 \in A$ (s_1, a_1, s) , (s_2, a_2, s) et $s_1 \neq s_2$
$\Longrightarrow \exists s' = inf\{s_1, s_2\}$ et (s', a_1, s_2), (s', a_2, s_1).
Axiome T_5 **:** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S, \forall s_1, s_2, ..., s_n \in S \ \forall a_1, a_2, ..., a_n \in A$,

$\forall(s, a_1, s_1)$ et $\forall i, j, (\uparrow s_i) \bigcap (\uparrow s_j) \neq \varnothing$
$\Longrightarrow \bigcap(\uparrow s_i / i = 1....n) \neq \varnothing$.

SYSTÈME DE TRANSITION ACYCLIQUE DISTRIBUÉ RESTREINT

2.2.2 Notation et définition

$ST = (S, T, A, s_0)$ système de transition.

Définition 2.2.2 *Un multi-ensemble fini d'action est un couple* (A', m)*, ou :*
-A' *un sous ensemble de* A*.*
-m *une application* $m : A' \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *tel que :*

$$\sum\{m(a)/a \in A'\} < +\infty$$

Si (A', m) *est multi-ensemble fini d'action,* S' *un sous ensemble de* S *et* s *un élément de* S*, on écrira* $s\{(A', m) > S'\}$ *ssi les conditions suivants sont satisfaites :*

1. S' *est constant par paire.*
2. $\forall a \in A' card\{(s \in S'/(s, a, s'))\} = m(a)$.
3. $\sum\{m(a)/a \in A'\} = card(S')$.

2.2.3 Axiomes des système de transition acyclique distribués

Axiome A_0 : c'est l'axiome T_0. La relation T est acyclique.
AxiomeA_1 : C'est l'axiome $T_1 = S = \uparrow s_0$.
Axiome A_2 : C'est l'axiome T_2''.
$\forall s, s' \in S \forall a, b \in A : (s, a, s')$ et $(s, b, s') \Longrightarrow a = b$.

Axiome A_3 : $\forall s \in S, \forall S' \subset S, \forall (A', m)$ multi-ensemble fini d'action $(s\{(A', m) > S'\}) \Longrightarrow \exists s' \in S : s' = \cup S'$ et $s\{sh(A', m) > s'\}$

Axiome A_4 : $\forall s \in S, \forall S' \subset S, \forall (A', m)$ multi-ensemble fini d'action, $(S'(A', m) > s) \Longrightarrow \exists s' \in S : s' = \bigcap S'$ et $s'(sh(A', m) > S)$.

Définition 2.2.3 *Un système de transition acyclique distribué est un système de transition qui vérifie les axiomes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.*
Leur classe sera notée DTS.

On à encoure des axiomes :

AxiomeA_6 : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s, s_1, ..., s_n \in S, \forall a \in A$ $\forall i(s, a, s_i), \forall i \neq j, s_i \neq s_j$ et $s_i \nearrow s_j$ $(\exists s' = sup\{s_i / i = 1....n\}$ et $\forall i(s_i, a^{n-1}, s')$.

Axiome A_7 : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s, s_1, ..., s_n \in S, \forall a \in A$ $\forall i(s_i, a, s), \forall i \neq j, s_i \neq s_j$ et $(\exists s' = sup\{s_i / i = 1....n\}$ et $\forall i(s', a^{n-1}, s_i)$.

Chapitre 3

Passage d'une structure d'évènement à un systèmes de transitions et l'inverse

Pour cela nous avons besoin de certaines définition classique de la théorie des ensembles ordonnés. Le système de transition correspondant à une structure d'événement comme nous allons voir est l'ensemble des configuration sans conflit.

Passage d'une structure d'évènement à l'ensemble des ensembles ordonnée

Définition 3.0.1 $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements.* $C \subseteq E$ *;* C *est dit configuration sans conflit* $\Longleftrightarrow$ C *configuration et* $\forall x, y \in C$ *on a non(*$x\#y$*) .*
L'ensemble des toutes les configurations finies et sans conflit sera noté $C_{(E,\leq,\#)}$.

Définition 3.0.2 *$(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $B \subseteq E$.*

-B est dit consistant si $\exists x \in E : \forall y \in E x \leq y$.

-B est dit consistant par pair si $\forall x, y \in B$ $Maj(x, y) \neq \varnothing$ et on noté $(x \nearrow y)$.

- $(E, \leq)$ est dit cohérent si $B \subseteq E$ consistant par pair alors $supB \in E$.

-$(E, \leq)$ est dit finiment cohérent si toute partie finie $B \subseteq E$, B consistante par paire alors $supB \in E$.

-$(E, \leq)$ est dit algébrique $\Longleftrightarrow$ $supA_x = x$ ou $A_x = \{p \in E/p \leq x$ p premier$\}$.

-On a $x, y \in E$ on dit que x prédécesseur de y ssi $x \leq y(x \neq y)$ et $\forall z \in Ex \leq z \leq y \Longrightarrow x = z$ où $y = z$.

Remarque 3.0.3 *Soit $(E, \leq, \#)$ une structure d'événement. $(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$ est finiment cohérent.*

Preuve.

On a $B = \{c_1, c_2, ..., c_n\} \subseteq C_{(E,\leq,\#)}$, B consistant par paire on va montre que $c_1 \cup c_2 ...., \cup c_n$ est une configuration ?

Si $x \in \cup_{j=1}^{n} c_j$ et $\forall y \leq x$ alors $y \in \cup_{j=1}^{n} c_j$. donc $\cup_{j=1}^{n} c_j$ est une configuration.

Soit $x, y \in \cup_{j=1}^{n} c_j : x \in c_i, y \in c_j$ alors $c_i \subseteq J, c_j \subseteq J$ (C consistant par paire) donc $x, y \in J \in C_{(E,\leq,\#)}$ d'ou non$(x\#y)$. $\cup_{j=1}^{n} c_j$ est une configuration sans conflit.

Soit M un majorant de B et $\forall c_i \in B$ alors $c_i \subseteq M$ et $\cup_{i=1}^{n} c_i \subseteq M$, donc $supB = \cup_{i=1}^{n} c_i$, et $\cup_{i=1}^{n} c_i$ est un majorant de B. D'ou $(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$ est finiment cohérent. ■

Définition 3.0.4 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $p \in E$.*

p est dit premier $\Longleftrightarrow$ p n'est pas minimal dans E et $\forall B \subseteq E, supB \in E, p \leq supB \Longrightarrow \exists x \in B : p \leq x$.

l'ensemble des éléments premier de X est noté $PR(X)$.

$(E, \leq)$ est dit algébrique $\Longleftrightarrow$ $supA_x = x$ ou $A_x = \{p \in E/p \leq x$ p premier$\}$

Remarque 3.0.5 *$(E, \leq)$ un ensemble ordonné, p est premier alors p n'est pas le sup de deux éléments incomparable .*

Proposition 3.0.6 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événements finitaire, alors : $(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq$ $)$ est un ensemble ordonné algébrique tel que $PR(C_{(E,\leq,\#)}) = \{\downarrow x / x \in E\}$.*

Preuve. $(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$ est un ensemble ordonné :
$\subseteq$ relation d'ordre : $x, y, z \in E$

1. Réflexivité : $\downarrow x \subseteq \downarrow x$.

2. Antisymétrique : $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ et $\downarrow y \subseteq \downarrow x$ alors $\downarrow x = \downarrow y$.

3. Transitivité : $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ et $\downarrow y \subseteq \downarrow z$ alors $\downarrow x \subseteq \downarrow z$.

$(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$ est un ensemble ordonné algébrique et $PR(C_{(E,\leq,\#)}) = \{\downarrow x / x \in E\}$ on va montre que $supA_c = c$ tel que $A_c = \{\downarrow x \subseteq C_{(E,\leq,\#)} / \downarrow x \subseteq c\}$.
On a $\downarrow x \subseteq c$ alors $x \in c$ et c configuration donc est clos dans le passe donc $c = \cup_{x \in c} \downarrow x$ a partir proposition1.2.5.On suppose que $supA_c = \cup_{x\in c}(\downarrow x)$ donc $supA_c = c$. ∎

Remarque 3.0.7 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événements finitaire.*
$(C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$ est un ensemble ordonné, finitaire, finiment cohérent et algébrique et $PR(C_{(E,\leq,\#)}) = \{\downarrow x / x \in E\}$. cette remarque définit une application de l'ensemble des structure d'événements finitaire dans l'ensemble des ensemble ordonnés finitaire, finiments cohérents et algébrique

$$SE_f \longrightarrow EO_A$$

$$(E, \leq, \#) \longmapsto (C_{(E,\leq,\#)}, \subseteq)$$

Inversement *il y a un isomorphisme entre les ensembles ordonnes EO_A et les structures d'événements SE_f tel que : soit $PO = (X, <)$ un ensemble partiellement ordonné, finitaire, algébrique et finiment cohérent; notons $PR(X)$ l'ensemble des éléments premiers de $PO(X)$, et encore $<$ pour la restriction à $PR(X)$ de la relation* *d'ordre $<$ de X ; définissons sur PO une relation de conflit en posant :*

$p_1, p_2 \in PR(X)$

$$(p_1 \# p_2) \Longleftrightarrow non(p_1 \nearrow p_2)$$

alors $(PR(X), \leq, \#)$ est une structure d'événement.

Passage d'une structure d'évènement a un système de transition

Notation

LTS et LES et DTS_r classes respectivement des systèmes de transitions étiquetés et des structures d'événements étiquetées et la classe des systèmes des transitions acyclique distribué restreint.

Proposition 3.0.8 *Soit* $LES = (E, <, \#, e, A)$ *une structure d'événements étiquetés.*
On notée $S = C(E)$ *l'ensemble des configuration finies de* LES *et définissons la relation* T *dans* $S \times A \times S$ *par :*$\forall c, c' \in S, \forall e \in E$

$$(c, e, c') \in T \Longleftrightarrow c' = c \cup \{e\}, e \notin c$$

alors $\triangle\ (LES) = (S, E, T, c\varnothing, e, A)$ *est un système de transitions étiquetées. (*$c\varnothing$ *est la configuration vide).*

Proposition 3.0.9 *Soit* $LTS = (S, A', T, s_0, e, A)$ *un système de transitions étiquetées.*
On notée $E = PR(S)$ *pour l'ensemble des éléments premiers de* S*.*
Définissons :
une relation d'ordre $<$ *sur* E *comme restriction à* $PR(S)$ *de la relation d'ordre* $<$ *sur* S*.*
Une relation de conflit $\#$ *sur* E *par*

$$e\#e' \Longleftrightarrow non(e \nearrow e')$$

et soit une fonction d'étiquetage $e'' : S \longrightarrow A$ *composée de* e *et de la fonction* $\underline{der}$ *tel que* $e'' = e \circ \underline{der}$ *alors* $\nabla(LTS) = (E, <, \#, e'', A)$ *est une structure d'événements*

étiquetés.
On définit une application : $\underline{der} : PR(S) \longrightarrow A$ *tel que : pour tout premier* p *et* p' *son unique prédécesseur :*

$$\underline{der} : PR(S) \longrightarrow A$$

$$\underline{der}(p) = e(a)$$

ou la lettre a *est l'unique élément de* A *tel que* $\exists! p'$ *:* (p', a, p) *dans* T *.*

Théorème 3.0.10 *: l'application* $\nabla\circ\vartriangle$ *est un isomorphisme de la classe des structures finitaires d'événements étiquetés.*
tel que : $\nabla : LTS \longrightarrow LES$ *et une structure d'événements étiquetés.* $\vartriangle: LES \longrightarrow LTS$ *est un système de transition étiquetés.*

Preuve.

$$\nabla\circ\vartriangle: LES \longrightarrow LTS \longrightarrow LES$$

$$(E, \leq, \#, e, A) \longmapsto (C_{(E,\leq,\#)}, E, T, c\varnothing, e, A) \longmapsto (PR(C_{(E,\leq,\#)}), \subseteq, \#, e'', A)$$

Premièrement on va vérifier que les configuration sont des éléments premiers pour l'ordre sur $C_{(E,\leq,\#)}$, cet ordre est l'inclusion restreinte aux configuration finies de E.
Si $c \in C_{(E,\leq,\#)}$ (configuration premier), alors c admet un seul prédécesseur c' et : $c = c' \cup \{x\}$ avec $x \notin c'$.
Si $x' \in c$ (non comparable à x) alors c contiendrait $x'' \in c$ (maximal non égale a x) : $c'' = c/\{x\}$ donc c'' un second prédécesseur de c distinct que c' un seul prédécesseur de c ; l'élément x est maximum dans c et $c =\downarrow x$ le passé de l'élément x.
Si $c =\downarrow x$, pour $x \in E$, alors c est un configuration finie et c' n'admet qu'un unique prédécesseur, $c/\{x\}$, et donc est un élément premier.
les ensembles E et $PR(C)$ sont donc on bijection par les deux application f, f' tel que :

$$f : E \longrightarrow PR(C)$$

$$x \longmapsto \downarrow x$$

et

$$f' : PR(C) \longrightarrow E$$

$$\downarrow x \longmapsto x$$

La relation d'ordre :on a x_1, $x_2 \in E$ $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow ? \downarrow x_1 \subseteq \downarrow x_2$.

$\forall x \in \downarrow x_1$

$\Longrightarrow x \leq x_1 et\ x_1 \leq x_2.$

$\Longrightarrow x \leq x_2.$

$\Longrightarrow x \in \downarrow x_2.$

$\Longrightarrow \downarrow x_1 \subseteq \downarrow x_2.$

La relation de conflit :on a $x_1, x_2 \in E$ $x_1 \# x_2 \Longrightarrow ?$ non $(\downarrow x_1 \nearrow \downarrow x_2)$ avec $(\downarrow x_1 \# \downarrow x_2) \Longleftrightarrow$ *non* $(\downarrow x_1 \nearrow \downarrow x_2)$.

Suppose que $(\downarrow x_1 \nearrow \downarrow x_2)$ dans $PR(C)$, soit $\downarrow z \in PR(C)$ tel que $\downarrow x_1 \subseteq \downarrow z$ et $\downarrow x_2 \subseteq \downarrow z \Longrightarrow x_1 \leq z$ et $x_2 \leq z \Longrightarrow$ non $x_1 \# x_2$.

Si maintenant $e : E \longrightarrow A$ la fonction de l'étiquetage de la structure d'événement originelle, alors $e'' : E \longrightarrow A$ définit par $e'' = e \circ f'$.

On a donc $(E, \leq, \#, e, A) \approx (PR(C), \leq, \#, e'', A)$ [1] . ■.

Exemple 3.0.11 $E = \{1, 2, 3, ..., 20\} \subseteq \mathbb{N}$.

On définit la relation d'ordre sur E *par* $x \leq y \Longleftrightarrow x$ *divise* y*, et la relation de conflit par* $x \# y \Longleftrightarrow x$ *et* y *n'ont pas de multiple commun dans* $E.1 \leq 2$ *et* 1 *divise* 2*,* $5 \# 6$*,* $3 \# 10$

Donc $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événement.*

$C_{(E,\leq,\#)} = \{\downarrow 1, \downarrow 2, \downarrow 3, \downarrow 3 \cup \downarrow 4, ...\}$*, on définit les transition par :* $c, c' \in C_{(E,\leq,\#)}$ *alors* $c' = c \cup \{x\}$ *et* $x \notin c$. $c = \downarrow 1$ *et* $c' = \downarrow 2 = \downarrow 1 \cup \{2\}$.

Donc $(C_{(E,\leq,\#)}, T, c\varnothing)$ *un système de transition.*

$PR(C_{(E,\leq,\#)}) = \{\downarrow 1, \downarrow 2, \downarrow 3, \downarrow 4, \downarrow 5, ...\}$.

La relation d'ordre et l'inclussions sur $PR(C_{(E,\leq,\#)})$ définit par : $x \leq y \Longleftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$, *et la relation de conflit par :* $x\#y \Longleftrightarrow$ *non* $(\downarrow x \nearrow \downarrow y).\downarrow 2 \subseteq \downarrow 4$ *et* $\downarrow 1 \subseteq \downarrow 2$,

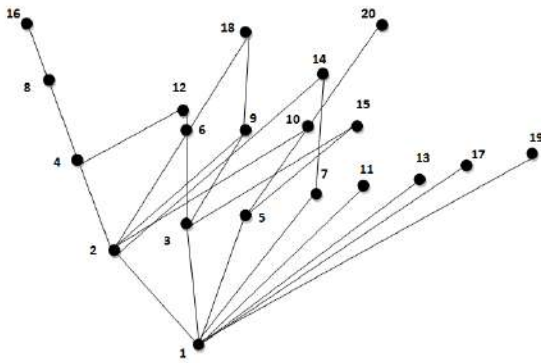

FIGURE 3.1 :

PASSAGE D'UN SYSTÈME DE TRANSITION A UN STRUCTURE D'ÉVÉNEMENT

Théorème 3.0.12 *: l'application* $\triangle \circ \nabla$ *est un isomorphisme de la classe des systèmes des transitions étiquetés.*
tel que : $\triangle$: $LES \longrightarrow LTS$ *est un système de transition étiquetés.*∇ : $LTS \longrightarrow LES$ *et une structure d'événements étiquetés.*

Preuve.

$$\triangle \circ \nabla : LTS \longrightarrow LES \longrightarrow LTS$$

$$(S_1, A_1', T_1, x_0, e_1, A) \longmapsto (PR(S_1), \leq, \#, e_1', A) \longmapsto (C(PR(S_1)), PR(S_1), T_2, x_0', e'', A)$$

On défint la relation d'ordre sur S_1 par : $x, y \in S_1$ $x \leq y : \xi_s(x, y) \neq \varnothing$.
On défint l'application :

$$g : S_1 \longrightarrow C(PR(S_1))$$

$$x \longmapsto g(x) = \{y \in PR(S_1)/y \leq x\}$$

c-a-dire $g(x) = \downarrow x \bigcap PR(S_1)$ on va montre que g est un bijection. L'injection : $g(x) = g(x')$ alors $\downarrow x \bigcap PR(S_1) = \downarrow x' \bigcap PR(S_1)$ d'où $x = x'$. La surjection : soit j est un configuration fini sans conflit si $maxj \in j$, $maxj = x$ alors $j = g(x)$.
Si $maxj$ n'existe pas alors $\exists x_1, x_2, x_3, ..., x_i$ des maximaux de j alors $\exists x = sup\{x_i/i = 1, 2, ...n\}$ donc g est surjection d'après l'axiome A_7.
On démontre que g est un homomorphisme. $(x, a, y) \in T_1 \Longrightarrow ?(g(x), p, g(y)) \in T_2$.
On défint l'application h tel que :

$$h : A \longrightarrow PR(S_1)$$

$$a \longmapsto h(a) = p$$

tel que $p \neq x$ et $x \leq y/(x \neq y)$ alors $g(x) \subseteq g(y)$.
On suppose que il existe $p_1, p_2 \in g(y)$ et $p_1, p_2 \notin g(x)$, alors $p_1 \leq y$ et $p_2 \leq y$ donc y n'est pas premier.
Soit B partie de S_1, $B = \{x, p\}$ tel que $supB = y$ et $p_1 \leq y$. p_1 premier donc $\exists b \in B$ tel que $p_1 \leq b$ absurde (absurde que p_2 premier), donc p_1 est unique où $p_1 \leq p_2$.
C-a-dire y admet un seul prédécesseur premier p, $h(a) = p$ l'unique prédécesseur de y qui n'est pas dans $g(x)$, donc si y est premier alors $h(a) = y$.
h est surjective ?
Soit $p \in PR(S_1)$ alors il existe $I_1, I_2 \in C(PR(S_1))$ tel que $I_2 = I_1 \cup \{p\}$ et $(I_1, p, I_2) \in T_2$ alors $\exists x, y \in S_1 : I_1 = g(x), I_2 = g(y)$ (g surjective), alors $g(y) = g(x) \cup \{p\}$ et $(p \notin g(x))$ $g(x) \subseteq g(y)$ il existe deux cas :
Premier cas si x premier et y non premier donc $x \in g(x) p$ prédécesseur unique de y et $\exists b \in A$ tel que $(p, b, y) \in T_1, h(b) = p$.
Deuxième cas : y premier et $x \leq y$ et $p = y$ $\exists b$ tel que $(x, b, y) \in T_1, h(b) = y$ donc h surjective. Alors $(g(x), h(a), g(y)) \in T_2$ donc g est homomorphisme. ■

Conclusion

En conclusion, il est possible de passer de toute représentation par structure d'événements de fonctionnement d'un système (où machine) a la représentation de ce même fonctionnement par la représentation par système de transition et vis-vers-ca. Dans la représentation de fonctionnement des systèmes par structure d'événement. Il y a la notion de étiquetage agréable une question se pose comment est représenter l'étiquetage agréable dans un système de transition.

Bibliographie

[1] B.Rozoy, Un modèle de parallélisme le monoïde distribue, Laboratoire d'informatique université de caen 1987.

[2] Djerraya.Faten, Ensemble Ordonnes Treillis et Algèbre de Boole et leurs utilisation dans les représentation des fonctionnements des systèmes

Résumé

Dans ce travail, nous avons représenter de deux façons différente le fonctionnement d'un système. Structure d'événement et système de transition après avoir donner les principaux définitions et résultat des deux représentation on a réaliser un isomorphiseme entre les deux représentations.

Mots clés: système de transition, structure d'événement.

الملخص

في هذا العمل لقد قمنا بتمثيل اشتغال نظام بطريقتين مختلفتين:

بنية الحوادث ، نظام النقلات بعد ذكر أهم النتائج والتعاريف للتمثيلين.

قمنا بتكوين ايزومورفيزم بين التمثيلين كونهما تمثيلين لاشتغال نفس النظام .

الكلمات المفتاحية : النظام الانتقال، بنية الحدث، نظام .

Abstract

In this work we have represented a system operation in two different ways: the structure of event, the system of transition. After mentioning the most important representative results and definitions. We have formed isomorphism among representatives as they are represented to operate the same system

Key-word : system transition, system event.