



UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la  
Matière

N° d'ordre :  
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Souigat Nabila

Thème

Interprétation de la forme d'un jet  
d'eau à surface libre par une équation  
d'onde

Soutenu publiquement le : / /

Devant le jury composé de :

Université KASDI Merbah- Ouargla

Universié KASDI Merbah- Ouargla

Université KASDI Merbah- Ouargla

Université KASDI Merbah- Ouargla

# Dédicaces

Je tiens à dédier cet effort scientifique à :

ma chère mère Zakhroufa

et mon cher père Mohammed

A mes frères Sedik, Nidal

et mes sœurs Iman, Widad, Manel, Fatima, Asil

La famille : Souigat

Tous mes amis en particulier : KHelif Messouda, Bouaza Dounia, Gouamid Asma

A tous mes amis de la promotion

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

# Remerciement

Tout d'abord, je tiens la grande remerciement au Dieu.

Je souhaite remercier les membres du jury, garants de la qualité de mon travail, et j'exprime toute ma reconnaissance à Mr. Mefflah Mabrouk d'avoir proposer et encadrer ce travail et sa confiance et ses conseils et ses encouragements.

Je tiens aussi à remercier toute ma famille et mes amis et toute qu' encourage et aide moi au prés ou au loin à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Dédication</b>   | <b>i</b>  |
| <b>Remerciement</b>   | <b>ii</b> |
| <b>Notations</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Introduction</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides</b>               | <b>4</b>  |
| 1.1 Résumé . . . . .  | 4         |
| 1.2 Descriptions du mouvement . . . . .                                   | 4         |
| 1.2.1 Méthode lagrangienne (description par les trajectoires) . . . . .   | 4         |
| 1.2.2 Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses) . . . . . | 5         |
| 1.2.3 Relation entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne . . . . .      | 5         |
| 1.3 Définitions . . . . .   | 6         |
| 1.3.1 Fluide incompressible . . . . .                                     | 6         |
| 1.3.2 Fluide irrotationnel . . . . .                                      | 6         |
| 1.3.3 Écoulement uniforme . . . . .                                       | 6         |
| 1.3.4 Ligne de courant . . . . .  | 6         |
| 1.3.5 Les trajectoires . . . . .  | 7         |
| 1.4 Quelques propriétés de l'écoulement . . . . .                         | 7         |
| 1.4.1 Définitions . . . . .   | 7         |
| 1.4.2 Potentiel de vitesse . . . . .                                      | 7         |
| 1.4.3 Fonction de courant . . . . .                                       | 8         |

*TABLE DES MATIÈRES*

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.5      | Notions de potentiel complexes et de vitesse complexe . . . . . | 9         |
| 1.6      | Équations du mouvement . . . . .                                | 10        |
| 1.6.1    | Loi de la conservation de la masse . . . . .                    | 10        |
| 1.6.2    | Équation de Bernoulli . . . . .                                 | 11        |
| <b>2</b> | <b>Quelques transformations conformes</b>                       | <b>13</b> |
| 2.1      | Résumé . . . . .  | 13        |
| 2.2      | Transformation d'hodographe . . . . .                           | 13        |
| 2.3      | Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .                 | 14        |
| 2.3.1    | Exemples . . . . .  | 15        |
| <b>3</b> | <b>Traitement analytique de problème sans effet de gravité</b>  | <b>18</b> |
| 3.1      | Résumé . . . . .  | 18        |
| 3.2      | Introduction . . . . .  | 18        |
| 3.3      | Formulation de problème . . . . .                               | 19        |
| 3.4      | Résolution de problème . . . . .                                | 20        |
|          | <b>Conclusion</b>   | <b>32</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>33</b> |

# Notations

- $p$  est la pression en un point (en Pa ou  $N/m^2$ )
- $\rho$  est la masse volumique en un point (en  $kg/m^3$ )
- $v$  est la vitesse du fluide en un point (en  $m/s$ )
- $g$  est l'accélération de la pesanteur (en  $N/Kg$  ou  $m/s^2$  ) .
- $h$  est l'altitude du point considéré (en m)
- **div** : Opérateur divergence  $V = (V_1, \dots, V_n)$  une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$   $\text{div } V$  est

$$\text{div } V(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$$

- $\Delta$  : Opérateur Laplace. Soit  $u$  une fonction :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

- $L$  est la profondeur
- $\sinh(\Omega) = \frac{\exp(\Omega) - \exp(-\Omega)}{2}$

# Introduction

Dans la mécanique des fluides, un écoulement de surface libre autour des objets de différentes formes, a été étudié de son importance pour l'application. Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à Jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables  $(x; y)$  de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$ . En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel. L'idée essentielle de la méthode de Kirchhoff est la suivante : on caractérise chacun des champs dans son espace

-le champ cinématique dans un espace  $f$ .

-le champ potentiel dans un espace  $\Omega$ .

On utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler  $\Omega$ . Il reste donc à déterminer les changements de variable  $\lambda(\Omega)$  et  $\lambda(f)$  à effectuer. Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre  $\lambda(\Omega)$  et  $\lambda(f)$ . On s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre. Ce mémoire de fin d'études comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons abordé les notions fondamentales de mécanique des fluides dont nous avons besoin dans notre étude.

Concernant le deuxième chapitre, on a étudié les transformations conformes en général, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de

*TABLE DES MATIÈRES*

---

Schwarz-Christoffel et la méthode de la ligne de courant libre.

Dans le dernier chapitre, on a traité les écoulements plans incompressibles et irrotationnels afin de trouver la solution exacte du problème d'écoulement traité, où on a en négligé les tensions de surface et les forces de gravité.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

### 1.1 Résumé

Dans ce chapitre, ont présenté les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux

### 1.2 Descriptions du mouvement

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (méthode de Lagrange) où on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesses de toutes les particules fluides (méthode d'Euler)

#### 1.2.1 Méthode lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées .

Soit  $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$  le vecteur position d'une particule donnée et  $\vec{S}_0$  est sa position initiale au temps initial  $t_0$ . En coordonnées cartésiennes :  $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x_0, y_0, z_0$  sont les coordonnées initiales et  $x, y, z$  les coordonnées au temps  $t$  de la particule.

La vitesse  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  en  $\vec{S}_0$  peut être calculée par :

$$v_x = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; v_y = \left( \frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} ; v_z = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} \quad (1.2)$$

Les avantages de la représentation lagrangienne sont :

- La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- La conservation de la masse est satisfaite.

### 1.2.2 Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant  $t$  donnait l'ensemble des vitesses associé à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse :  $\vec{v}(\vec{S}, t)$  où  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$  et  $\vec{S} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ . Par ailleurs les composantes du champ de vitesses s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Relation entre la méthode Eulérienne et Lagrangienne

La méthode d'Euler permet d'exprimer la vitesse comme :

$$v(\vec{S}, t) = \frac{d\vec{S}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Si on intègre le système d'équations ci-dessus, on aboutit à des constantes d'intégration qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les équations de Lagrange :  $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$  et on retrouve le système d'équations (1.1). En principe la méthode lagrangienne peut donc être déduite de l'approche eulérienne.

## 1.3 Définitions

### 1.3.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours du mouvement se traduit par l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

### 1.3.2 Fluide irrotationnel

Un fluide est dit irrotationnel si

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

### 1.3.3 Écoulement uniforme

On appelle écoulement uniforme si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace, sinon il est non uniforme.

### 1.3.4 Ligne de courant

Sont les lignes qui en chaque point sont tangentes aux vecteur vitesses en ce point (pour un instant fixe). Où par conséquent :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (1.6)$$

Dans lequel  $t$  a la valeur fixée.

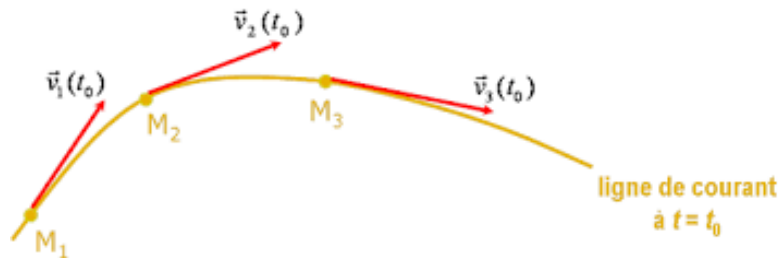


FIGURE 1.1 – Ligne de courant

### 1.3.5 Les trajectoires

On appelle trajectoire de la particule, l'ensemble des positions occupées par la particule au cours du temps.

1. La description de Lagrange donne directement la trajectoire, en effet :

$$x = \varphi(X, t) \quad (1.7)$$

est l'équation paramétrée par  $t$  de la trajectoire de la particule identifiée par  $X$ .

2. Si le mouvement est décrit par la méthode *d'Eulre* la connaissance des trajectoires reviennent à la description de Lagrange selon la méthode d'équivalence. Les trajectoires sont alors solution du système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.8)$$

alors :

$$\frac{dx_1}{dv_1} = \frac{dx_2}{dv_2} = \frac{dx_3}{dv_3} = dt \quad (1.9)$$

## 1.4 Quelques propriétés de l'écoulement

### 1.4.1 Définitions

Un écoulement est dit :

- 1) Irrotationnel si  $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- 2) Incompressible si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

### 1.4.2 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse  $\vec{v}$  est irrotationnel, on peut définir une fonction  $\varphi$  scalaire telle que

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1.10)$$

Le symbole  $\varphi$  représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.11)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad (1.12)$$

où  $\varphi$  vérifie l'équation de Laplace.

### 1.4.3 Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifié pour tout point de ce domaine, à l'instant  $t$  on a

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

Cela implique que la forme différentielle  $v_x dx + v_y dy$  est, à  $t$  fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction  $\psi$  :

$$\exists \psi, d(\psi) = v_x dx + v_y dy \quad (1.15)$$

Implique

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\psi$  s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_x = \partial \psi / \partial y & v_y = -\partial \psi / \partial x \end{vmatrix} = -\partial^2 \psi / \partial x^2 - \partial^2 \psi / \partial y^2 = 0$$

$\Rightarrow \Delta \psi = 0$   $\psi$ , vérifie aussi l'équation de Laplace.

## 1.5 Notions de potentiel complexes et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  ou  $z = x + iy$  est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe  $f(z)$  ( $\varphi$  et  $\psi$  représentent respectivement les fonctions potentielles et de courant).

La fonction  $f$  a les propriétés suivantes :

1 –  $f(z)$  est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de  $z$  correspond une seule valeur de  $f$

2 –  $f(z)$  est analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y \end{cases} \quad (1.17)$$

Ce système d'équations constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

**Conclusion** : pour que  $f(z)$  soit analytique, il faut que  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction  $f(z)$  est appelée potentiel complexe des vitesses.

**Propriétés** : On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant  $\psi$  et d'un potentiel des vitesses  $\varphi$ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace ( $\Delta\psi = 0$  et  $\Delta\varphi = 0$ ).

## 1.6 Équations du mouvement

### 1.6.1 Loi de la conservation de la masse

Cette loi traduit le fait que la variation de masse  $m$  du volume matériel  $\Omega(t)$  au cours du temps est nul s'il n'y n'a pas de terme source ou puits en son sein. Ainsi :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = 0 \quad (1.18)$$

où  $\rho$  est la masse volumique.

En appliquant le théorème de transport à la relation  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\vec{x}, t) dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) dV + \int_{\Gamma(t)} f(\vec{x}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Gamma(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.19)$$

En utilisant le théorème de la divergence,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (1.20)$$

On aboutit donc à la relation fondamentale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.21)$$

**Remarque** : on peut exprimer la relation sous la forme équivalente :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.22)$$

### Cas particuliers

Lorsque l'écoulement est permanent alors la dérivée partielle de la masse volumique par rapport au temps est nul et d'après l'ECM se résume à :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.23)$$

Si, d'autre part, l'écoulement est incompressible alors la masse volumique est constant tout le domaine d'écoulement et donc :  $\vec{\nabla} \rho = 0$  Dans ce cas l'ECM devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.24)$$

Cette relation correspond bien à un écoulement incompressible et stationnaire.

#### 1.6.2 Équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli, qui a été établi en 1738 par Daniel Bernoulli, est la formulation mathématique du principe de Bernoulli qui énonce que dans l'écoulement d'un fluide homogène et incompressible soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, une accélération se produit simultanément avec la diminution de la pression. Dans un écoulement de fluide sans viscosité L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const} \quad (1.25)$$



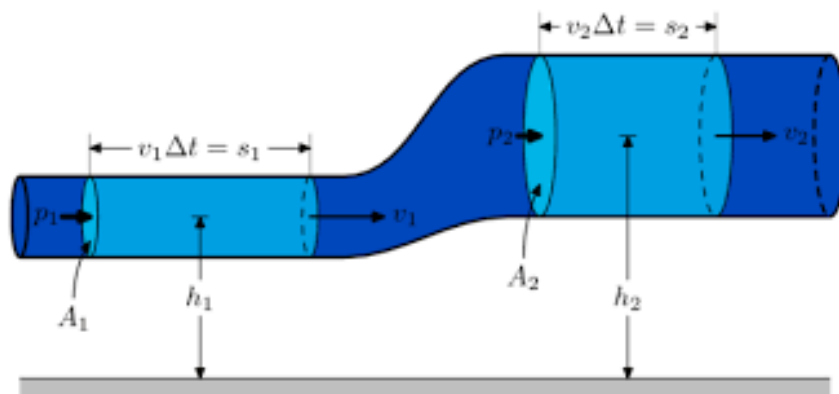


FIGURE 1.2 – théorème de Bernoulli

# Chapitre 2

## Quelques transformations conformes

### 2.1 Résumé

Dans ce chapitre, on va parler sur quelques particules de transformations conformes, telles que la transformation de Schwarz-Christoffel et transformation d'hodographe.

### 2.2 Transformation d'hodographe

Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte de problèmes d'écoulement potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur les quelles la pression est supposée constante . L'idée de base de cette transformation est l'introduction de la variable complexe  $\Omega$  définie par :

$$\Omega = \log \left( \frac{U}{df/dz} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right) = \log \left( \frac{U}{q} \right) + i\theta \quad (2.1)$$

ou  $z = x + iy$ ,  $f = \varphi + i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u - iv$  et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$  avec  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse  $V$ , est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction  $\Omega$  possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e.,

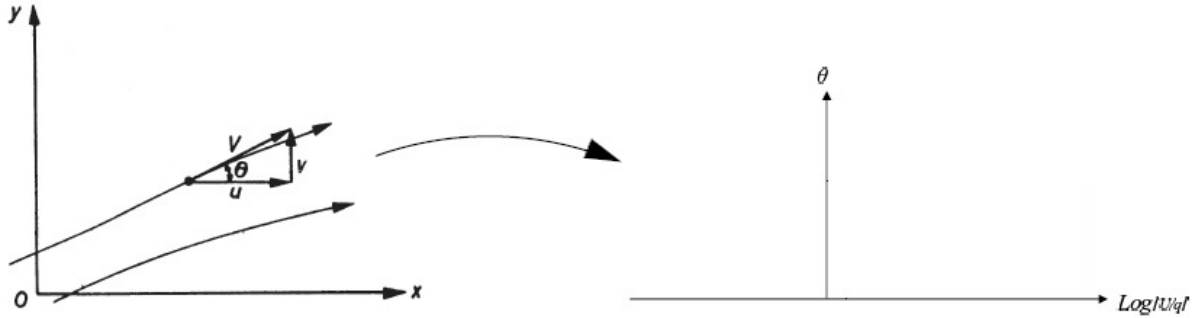


FIGURE 2.1 – transformation d'hodographe

$$\log \left( \frac{U}{q} \right) = \text{const}$$

- La partie imaginaire de  $\Omega$  est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e.,  $\theta = \text{const}$ . Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de côté rectiligne (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation  $f$ , qui transforme le plan physique  $z$  en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan  $\Omega$  vers la moitié supérieure ( resp. inférieure ) d'un autre plan d'une certaines variables complexes  $\lambda$ , alors la relation entre  $z$  et  $f$  ou entre  $df/dz$  et  $f$  est paramétriquement déterminée.

### 2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel réalise une transformation du demi-plan supérieur( ou inférieur) vers un polygone simple quelconque. On définit la transformation de Schwarz-Christoffel par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + M \tag{2.2}$$

où  $k$  et  $M$  sont des constantes complexes,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des nombres réels et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les angles intérieurs au polygone

La transformation  $\Omega(\lambda)$  est conforme sauf aux points  $\lambda_i$ . Le point anguleux est transformé en points non anguleux. Notons que si dans la transformation  $\alpha_i \rightarrow \infty$ , alors on omet le facteur  $(\lambda - \lambda_n)$  dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0, on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

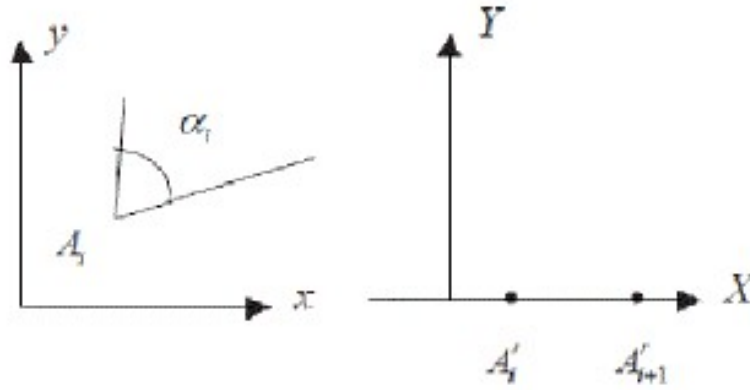


FIGURE 2.2 – Transformation d'une ligne brisée en axe horizontal

### 2.3.1 Exemples

#### Exemple 1

Dans le plan image,  $A$  est situé  $-\infty$ ,  $B$  en  $b$ ,  $C$  en  $c$ , et  $D$  en  $\infty$  ( voir figure 2.1) . Les angles dans plan  $x-y$  son :  $\alpha_B = \pi/2$ ,  $\alpha_C = \pi/2$  L'équation de Schwarz-Christoffel donne par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - a)^{\frac{\alpha_B}{\pi}-1}(\lambda - b)^{\frac{\alpha_C}{\pi}-1} \quad (2.3)$$

Alors

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - b)^{-1/2}(\lambda - c)^{-1/2} = \frac{k}{(\sqrt{\lambda - b})(\sqrt{\lambda - c})} \quad (2.4)$$

par intégrale

$$\Omega(\lambda) = 2k \ln(\sqrt{\lambda - b} + \sqrt{\lambda - c}) + M \quad (2.5)$$

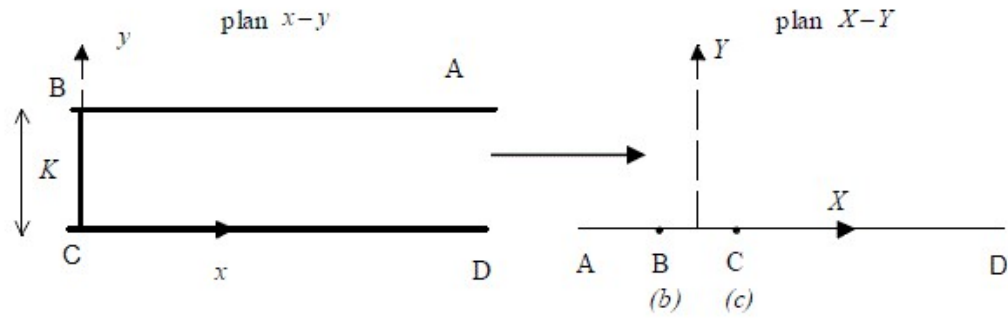


FIGURE 2.3 – passage du plan  $x - y$  au  $X - Y$

**Exemple 2**

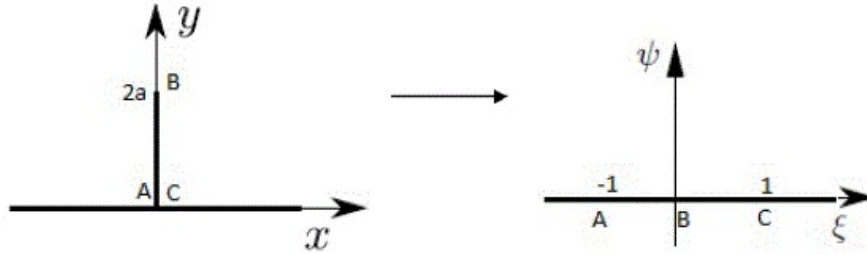


FIGURE 2.4 – Écoulement passé d'une plaque plate verticale

$$\frac{dz}{d\xi} = k(\xi - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\xi - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\xi - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \quad (2.6)$$

on pose  $a = -1, b = 0, c = 1$  et  $\alpha = \pi/2, \beta = 2\pi, \gamma = \pi/2$   
Alors

$$\frac{dz}{d\xi} = k(\xi + 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}\xi^{\frac{2\pi}{\pi}-1}(\xi - 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} \quad (2.7)$$

$$\frac{dz}{d\xi} = k \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (2.8)$$

par intégrale

$$\begin{aligned} dz &= k \int \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \\ \Rightarrow z &= k \sqrt{\xi^2 - 1} + D \end{aligned} \quad (2.9)$$

on pose  $k = 2a, D = 0$

$$z = 2a \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.10)$$

# Chapitre 3

## Traitement analytique de problème sans effet de gravité

### 3.1 Résumé

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables  $(x, y)$  de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$ . En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwarz-Christoffel.

### 3.2 Introduction

Nous étudions un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel dans un domaine délimité par une infinité de murs rigides et au-dessus par une surface libre.

Le fluide est supposé être incompressible et irrotationnel, l'écoulement est uniforme avec une vitesse constante  $U$  et une profondeur constante  $L$ .

### 3.3 Formulation de problème

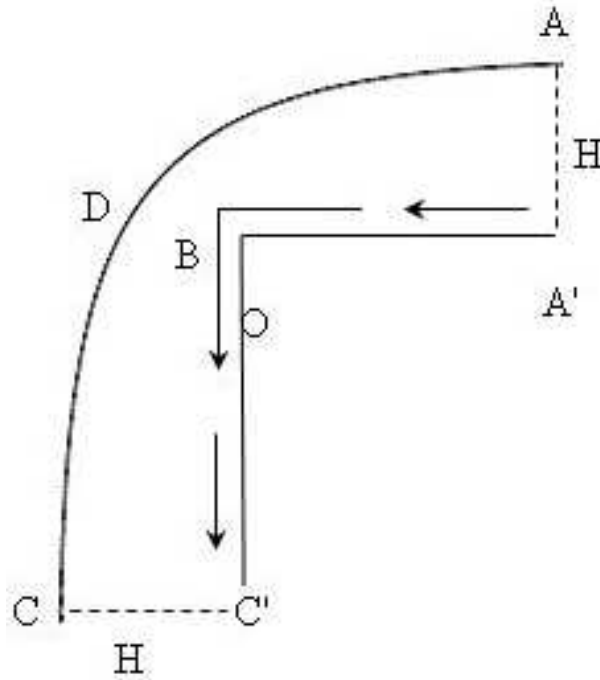


FIGURE 3.1 – Schéma de l'écoulement et des coordonnées ( $z - p$  lan)

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution exacte du problème défini comme suit. Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, On suppose que l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse  $U$  et la pression est constante sur la ligne de courant libre. On choisit  $A'B$  sur l'axe  $XOX'$  et  $BC'$  sur l'axe  $YOY'$  (figure3.1).

Le débit est limité supérieurement par le linge du courant  $AC$ , On désigne par  $\xi = u - iv$  la vitesse complexe tel que  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse, et par  $f = \varphi + i\psi$  la fonction de potentiel complexe être respectivement  $\varphi$  et  $\psi$  la fonction potentielle et la fonction de courant. La fonction  $f$  transforme  $z$  -plan en une bande infinie. (voir Figure 3.2).



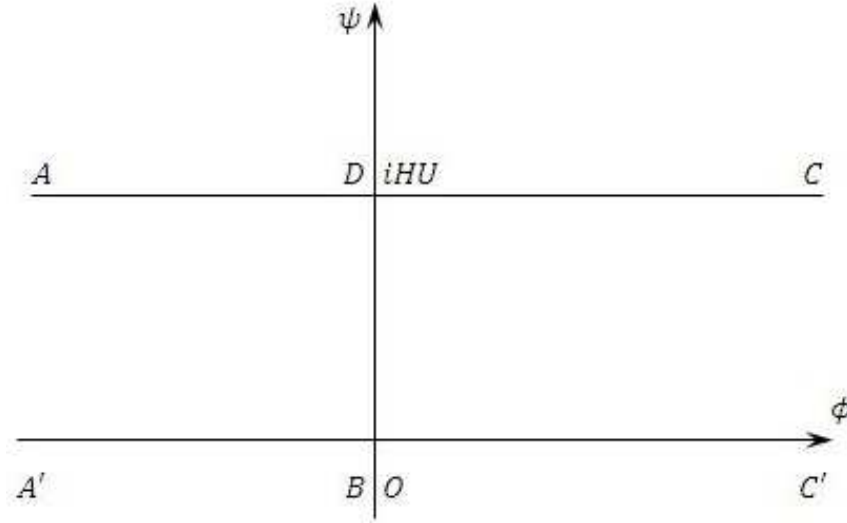


FIGURE 3.2 –  $f - p$  plan

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentielle  $\phi$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans le domaine d'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } A'B \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \text{ sur } BC' \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right) = C^{st} \text{ sur } AC \end{cases}$$

### 3.4 Résolution de problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème. Pour résoudre ce problème, nous utilisons d'abord la méthode de la théorie courante libre introduit par Kirchhoff, basée sur la transformation d'hodographe. la transformation complexe est définie par :

$$\Omega = \log \left( \frac{U}{df} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right) = \log \left( \frac{U}{q} \right) + i\theta$$

Ou  $z = x + iy$ ,  $q$  et  $\theta$  sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe horizontale, respectivement. Par cette dernière transformation, le champ occupé par le fluide dans le  $z$ -plan et transformé en bande semi-infinie dans le  $\Omega$ -plan (voir figure 3.3) La transformation conforme

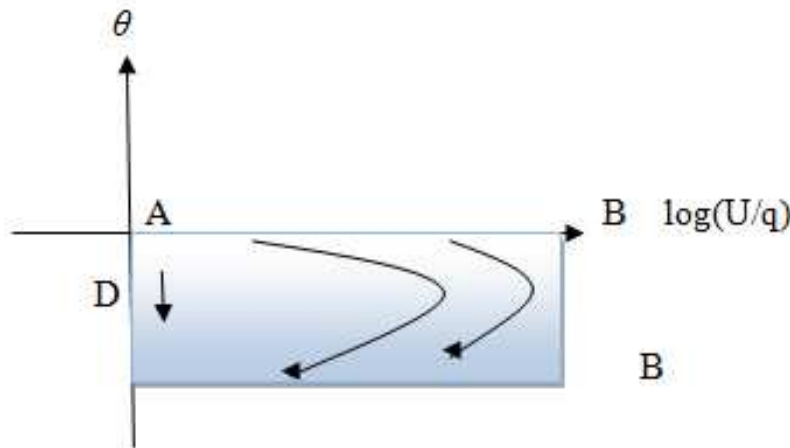


FIGURE 3.3 –  $\Omega$  – plan

d'une bande semi-infinie dans (figure 3.3) a en demi-plan  $\lambda$ -plan), est donné par le théorème de Schwarz-Christoffel, en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement (voir Figure 3.4)

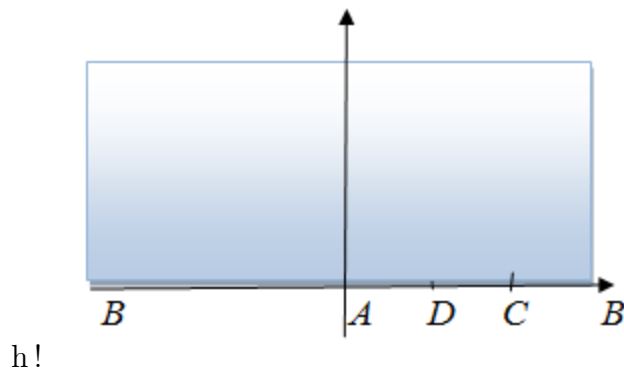


FIGURE 3.4 –  $\lambda$  – plan

- On va chercher une relation entre  $\lambda$  et  $\Omega$  :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} + \dots (\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{et } p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \quad (3.1)$$

on utilise les points ( $A(0, 0), C(1, 0)$  dans  $\lambda - \text{plan}$ ) et ( $A(0, 0), C(0, -i\pi/2)$  dans  $\Omega - \text{plan}$ )

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -1/2 \text{ alors : } p_A = -1/2 \\ p_C &= \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -1/2 \text{ alors : } p_C = -1/2 \end{aligned}$$

on substitue ces données dans l'équation( 3.1) on trouve :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M(\lambda - 0)^{-\frac{1}{2}} (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= \frac{M}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1}} \\ \Rightarrow \int d\Omega &= M \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1}} \\ \Rightarrow \Omega &= N + 2M \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ensuite on va déterminer la valeur  $N, M$

On remplace le point  $C (\lambda = 1, \Omega = -i\frac{\pi}{2})$  dans l'équation (3.3) trouve :

$$\begin{aligned} -i\frac{\pi}{2} &= N + 2M \ln(\sqrt{1} + \sqrt{1-1}) \\ \Rightarrow N &= -i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La détermination de valeur  $M$  : en substitue le point  $A(\lambda = 0, \Omega = 0)$  dans l'équation (3.3) on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= -i\frac{\pi}{2} + 2M \ln(\sqrt{0} + \sqrt{0-1}) \\ \Rightarrow i\frac{\pi}{2} &= 2M \ln(\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{i^2} = 2M \ln i \\ &\Rightarrow M = i\frac{\pi}{2} \frac{1}{2\ln i} \\ &\Rightarrow M = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{i}{\ln i} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 \implies e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\
 \implies \ln\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) &= \ln i \\
 \implies i\frac{\pi}{2} &= \ln i \\
 \implies M &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \\
 \implies M &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

alors :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1}}$$

donc :

$$\Omega = -i\frac{\pi}{2} + \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}) \tag{3.5}$$

L'équation(3.5)

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow e^{\Omega} &= e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1})} \\
 \implies e^{\Omega} &= -i(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}) \\
 \implies \frac{-e^{\Omega}}{i} &= \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1} \\
 \implies \frac{-e^{\Omega}}{i} - \sqrt{\lambda} &= \sqrt{\lambda-1} \\
 \implies \left(-\sqrt{\lambda} - \frac{e^{\Omega}}{i}\right)^2 &= (\sqrt{\lambda-1})^2 \\
 \implies \left(\lambda - e^{2\Omega} + \frac{2}{i}\sqrt{\lambda}e^{\Omega}\right) &= \lambda - 1 \\
 \implies 1 - e^{2\Omega} &= -\frac{2\sqrt{\lambda}e^{\Omega}}{i} \\
 \implies \left(\frac{-1 + e^{2\Omega}}{2e^{\Omega}}\right) i &= \sqrt{\lambda} \\
 \implies \sqrt{\lambda} &= i \sinh(\Omega)
 \end{aligned}$$

donc :

$$\lambda = -\sinh^2 \Omega \quad (3.6)$$

• On va chercher la dépendance entre  $f$  et  $\lambda$  :

On utilise la transformation christoffel-schwarz :

$$\frac{df}{d\lambda} = M (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{et} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$$

et les points :

$A(\infty, iHU)$ ,  $C(\infty, iHU)$ ,  $D(0, iHu)$ ,  $B(0, 0)$  dans le  $f$ -plan

$A(0, 0)$ ,  $D(1/2, 0)$ ,  $C(1, 0)$ , dans le  $\lambda$ -plan

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda)^{-1}(\lambda - 1)^{-1} = \frac{M}{\lambda(\lambda - 1)} \quad (3.7)$$

En intégrer cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \int df &= M \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} \\ \implies f - f_0 &= M \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} \\ \implies f - f_0 &= M \left( \int \frac{d\lambda}{\lambda - 1} - \int \frac{d\lambda}{\lambda} \right) \\ \implies f - f_0 &= M \left( \int \frac{d\lambda}{\lambda - 1} - \int \frac{d\lambda}{\lambda} \right) \\ \implies f &= M[(\ln(\lambda - 1) - \ln \lambda)] + f_0 \\ f &= M \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) + f_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

On va déterminer les valeurs  $f_0$  et  $M$  :

on choisit le point  $B(\lambda = \infty, f = 0)$  on trouve :

$$0 = M \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) + f_0$$

On a :  $\lim \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) = 0$  quand  $\lambda \mapsto \infty$

$$\implies f_0 = 0$$

alors l'équation (3 :8) devient :

$$f = M \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)$$

Pour déterminer M, on choisit le point  $D(\lambda = 1/2, f = iHU)$  :

$$\begin{aligned} iHU &= M \ln \left( \frac{1/2 - 1}{1/2} \right) \\ \implies iHU &= M \ln(-1) \\ \implies iHU &= M \ln(i^2) = 2M \ln(i) \\ \implies M &= \frac{iHU}{2 \ln i} \end{aligned}$$

on utilise :

$$\frac{\ln i}{i} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$M = \frac{2HU}{2\pi} = \frac{HU}{\pi}$$

L'équation (3.8) devient

$$\begin{aligned} f &= \frac{HU}{\pi} \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \\ \implies \frac{f\pi}{HU} &= \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \\ \implies e^{f\pi/HU} &= 1 - \frac{1}{\lambda} \implies \frac{1}{\lambda} = 1 - e^{f\pi/HU} \end{aligned}$$

donc :

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{f\pi/HU}} \quad (3.9)$$

• La recherche de la relation entre  $z$  et  $\lambda$  :

On utilise la fonction de kirchoff :

$$\Omega = \log \left( U \cdot \frac{dz}{df} \right) \quad (3.10)$$

$$\implies e^{\Omega} = U \cdot \frac{dz}{df}$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^{\Omega} \quad (3.11)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \frac{HU}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda} \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{1}{U} \cdot e^{\Omega} \cdot \frac{HU}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{e^{\Omega}H}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \end{aligned}$$

On utilise la relation précédente :

$$e^{\Omega} = -i(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1})$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{-Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}) \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= +\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \cdot (\sqrt{\lambda} + \sqrt{-(1-\lambda)}) \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= +\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \cdot (\sqrt{\lambda} + \sqrt{i^2(1-\lambda)}) \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \cdot (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{(1-\lambda)}) \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} - \frac{H}{\pi} \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{H}{\pi} \left[ -\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} + i\frac{1}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \right] \end{aligned}$$

donc

$$dz = \frac{H}{\pi} \left[ -\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} + i\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \right] \quad (3.12)$$

l'équation (3.12)  $\implies$

$$\int dz = \frac{H}{\pi} \left[ - \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} + i \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \right] \quad (3.13)$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{d\lambda}{\lambda(\sqrt{1-\lambda})}$$

On utilise le changement de variable :

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= t^2 \\ \implies -d\lambda &= 2tdt \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-2t}{(1-t^2)t} dt \\ I_1 &= \int \frac{-2}{(1-t^2)} dt = - \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} \\ I_1 &= \ln(1-t) - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \end{aligned}$$

alors :

$$I_1 = - \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

donc :

$$I_1 = - \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-\lambda}}{1 - \sqrt{1-\lambda}}\right)$$

On calcule  $I_2$  :  $I_2 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}$

On pose :

$$\lambda = t^2 \implies d\lambda = 2tdt \quad \text{et, } \sqrt{\lambda} = t$$



alors :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{2t}{t(1-t^2)} dt \\
 \Rightarrow I_2 &= \int \frac{2}{(1-t^2)} dt \\
 \Rightarrow I_2 &= \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) \\
 \Rightarrow I_2 &= \ln \left( \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \right)
 \end{aligned}$$

donc l'équation (3.14) devient :

$$\begin{aligned}
 z - z' &= \frac{H}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} \right) + i \ln \left( \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
 \Rightarrow x + iy - x' - iy' &= \frac{H}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} \right) + i \ln \left( \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \right) \right] \\
 \Rightarrow x - x' + i(y - y') &= \frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} + i \frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \\
 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} + x' \\ y = \frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} + y' \end{cases}
 \end{aligned}$$

puisque l'écoulement est :  $y < 0$  et  $x > 0$  alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} + x' \\ y = -\frac{H}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} + y' \end{cases} \quad (3.14)$$

on choisit le point  $D; z_0 = -L + iL$  et le point  $D; \beta = 1/2$ , on trouve :

$$\begin{cases} -L = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1 - 1/2}}{1 - \sqrt{1 - 1/2}} + x' \\ L = \frac{-H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1/2}}{1 - \sqrt{1/2}} + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -L = \frac{H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})^2 + x' \\ L = \frac{-H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})^2 + y' \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} x' = -L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\ y' = L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda}}{1 - \sqrt{1 - \lambda}} - L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\ y = -\frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} + L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \quad (3.15)$$

L'amplitude du jet de l'origine est :

$$H = \lim_{\lambda \rightarrow 0} y(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} + L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})$$

donc :

$$H = L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \quad (3.16)$$

On représente  $C$  comme le degré de l'écoulement de contraction :

$$C = \frac{H}{L} = \frac{L + 2H/\pi \log(1 + \sqrt{2})}{L}$$

$$C = 1 + \frac{2H}{\pi L} \log(1 + \sqrt{2}) = 1$$

$$\begin{aligned}
 C &= 1 + \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\
 C - \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) &= 1 \\
 C \left( 1 - \frac{2}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \right) &= 1 \\
 C &= \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})}
 \end{aligned}$$

$$C = 0.64 \quad (3.17)$$

On substitue l'équation (3.16) dans l'équation (3.15) on trouve :

$$\begin{cases}
 x = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda}}{1 - \sqrt{1 - \lambda}} - H & , 0 \leq \lambda \leq 1 \\
 y = -\frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} + H
 \end{cases} \quad (3.18)$$

On écrit :  $\bar{x} = \frac{x}{H}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{H}$ , l'équation (3.18) devient :

$$\begin{cases}
 \bar{x} = \frac{x}{H} = \frac{1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda}}{1 - \sqrt{1 - \lambda}} - 1 & , 0 \leq \lambda \leq 1 \\
 \bar{y} = \frac{y}{H} = -\frac{1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} + 1
 \end{cases} \quad (3.19)$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre.

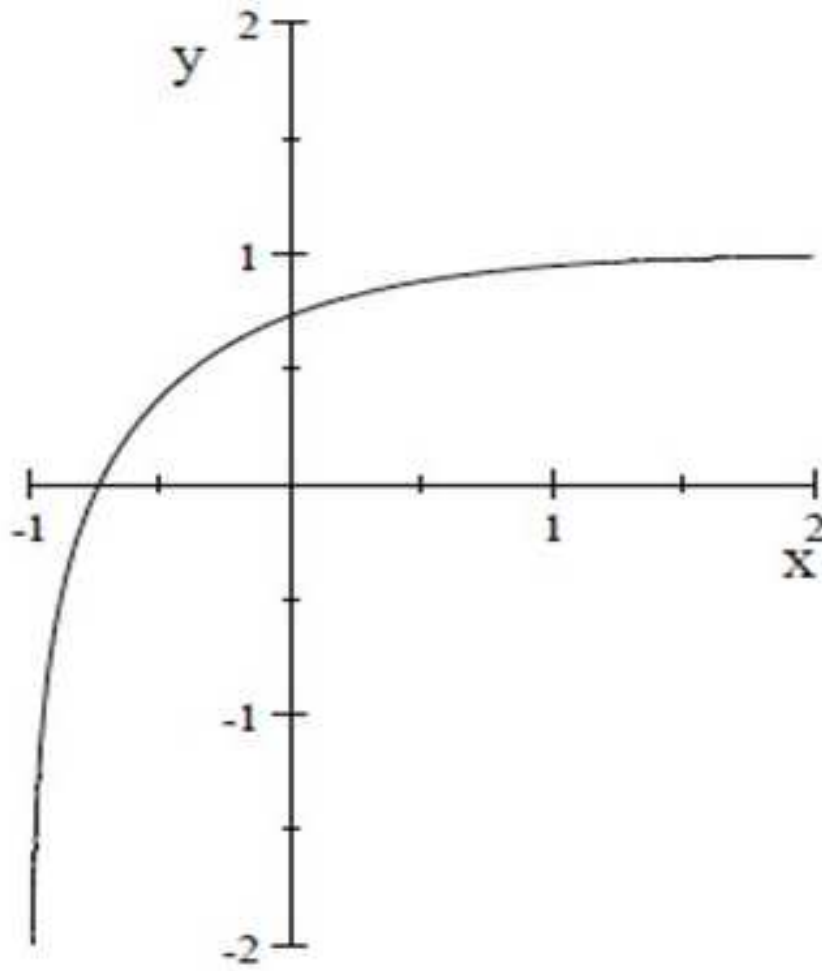


FIGURE 3.5 – forme de la surface libre

# Conclusion

On étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux . Traitement analytique de ce problème dans cas où les effets de gravité et de la tension de surface sont négligés en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la forme de surface libre.

# Bibliographie

- [1] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi , Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall, Applied Math Sciences , vol.1,2007, no. 47, 2313 - 2326.
- [2] B.Bouderah, A.Gasmi and H.serguine , Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow, International Mathematical Forum,2,2007,no.66,3273-3277.
- [3] Christophe Ancey, Analyse différentielle outils mathématiques pour la dynamique des fluides, école polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [4] D. Daboussi, F. Dias, J.M. Vanden Broeck, Gravity flows with a free surface of finite extent, Eur. J. Mech B-Fluids. 17 (1998).
- [5] F. Guechi, M. Khermache, Free streamline for a flow over a step , Ferhat Abbas University 19000, S’etif, ALGERIA.
- [6] J.Bouttier, Transformations Conforme Et Hydrodynamique, (08/11/2010).
- [7] Jean-Marc Vanden-Broeck, The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle, J. Fluid. Mech. (1983), vol.133, pp 255 - 264
- [8] Laiadi abdelkader, effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles ,thèse magistère de universite de ouargla(2012).
- [9] Riadh Ben Hamouda, Notions de Mécanique des Fluides (cours et exercices corrigés), Centre de publication universitaire.
- [10] Sakir Amiroudine, Jean-Luc Battaglia, Mécanique des Fluides, DUNOD, Paris,( 2011).

## ملخص

في هذا العمل ، درسنا التدفق المحتمل ثنائي الأبعاد في مجال محدد من قبل لانهائي من الجدران الجامدة وما فوقها من خلال سطح حر ، وإهمال التوترات السطحية وقوى الجاذبية ، استخدمنا بعض طرق التحولات المطابقة لدراسة السطح الحر للسائل .  
الكلمات المفتاحية: السطح الحر ، السائل ، التدفق ، الوظيفة المحتملة ، خطوط التيار .

## Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié un écoulement potentiel, bidimensionnel dans un domaine délimité par une infinité de murs rigides et au-dessus par une surface libre, en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, nous utilisons quelques transformations conformes pour réduire le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre.

**Mots-clés:** Surface libre, Fluide, écoulement , Fonction potentielle, ligne de courant

## Abstract

In this work, we studied a potential two-dimensional flow in a domain delimited by an infinity of rigid walls and above through a free surface, neglecting the surface tensions and the forces of gravity, we use some conforming transformations to reduce the discretization problem only on the free surface.

**Keywords:** Free Surface, Fluid, Flow, Potential Function, Stream-line