MODÉLISATION ET RÉSOLUTION DE QUELQUE PROBLÈMES DES ONDES

KHELIF MESSAOUDA

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
messakhelif25@gmail.com

résumé

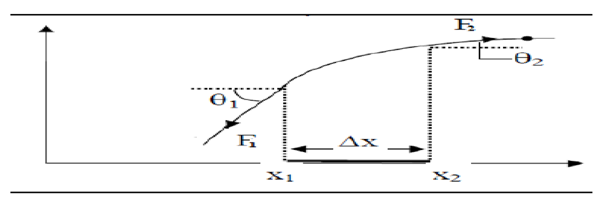
Dans ce travail on étudie quelque problèmes des ondes, En résolvant et en modélisant de ces équation propagation (onde acoustique, onde électromagnétique et onde élastique), Puis nous appliquons numériquement ces équations sous **matlab** en utilisant la méthode des différences finies.////
Cette recherche supervisée par: **Meflah Mabrouk**
mot-clé: *onde acoustique, onde électromagnétique, onde élastique, modélisation, propagation*

1. Introduction

Dans les phénomènes physiques, il existe de nombreux types d'ondes (mécaniques et électromagnétiques)
Mécanique: Ce sont des équations acoustique, électromagnétiques, élastique (corde vibrante)
électromagnétiques: Sont représentés dans des phénomènes (ondes radio, ondes optique, rayons X, etc.)
Le but de ce travail est de rappeler certaines caractéristiques et de chercher résolution et modélisation de chaque probléme.

2. Position des problèms

1. **des ondes électromagnétiques**: le base de cette équation est un équation de maxwell
   - Equation de Maxwell-Faraday: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
   - Equation de Maxwell-Ampère: $r\vec{o}t\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$
   - Loi de Gauss pour le champ électrique: $Div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$
   - Loi de Gauss pour le champ magnétique: $Div\vec{B} = 0$
2. **Ondes acoustiques** Les équation de base est:
   - l'équation de conservation de la masse: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0$
   - l'équation de conservation de la quantité de mouvement: $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$
   - relation thermodynamique: $\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho \chi}$
3. **corde vibrante**
   Considérons une corde maintenue par deux extrémités. Dans le mode de vibration le plus simple



3. L'idée de modélisation et résolution

1. **électromagnétiques**
   la Loi de Maxwell- Faraday:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En prenant le rotationnel

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}) = -\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Longrightarrow \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{B})$$

par Loi de Maxwell – Ampère

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \mu_r \vec{J} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

et avec Loi de Gauss – électrique :$Div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$
Il vient finalement :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} gr\vec{a}d\rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

De la même maniére on obtient:

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu r\vec{o}t\vec{J}$$

dans un milieu diélectrique parfait le charges $\rho = 0$ et courants $\vec{J} = 0$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{Et} \qquad \Delta\vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

2. **acoustique**
   les équations linéaires de la base sont écrites sous la forme [4] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 & (1) \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 & (2) \\ \chi \rho_0 p_1 = \rho_1 & (3) \end{cases}$$

En injectant la relation (3) dans la relation (1), on obtient

$$\chi \rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

en dérivant la relation (4) par rapport au temps et en dérivant la relation (2) par rapport à la variable d'espace x , et avec la soustraction le deux relation on obtient:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \quad c_a = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho_0}}, \qquad \chi = \frac{1}{E}$$

3. **corde vibrante**: Par d'Alembert on pose

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Pour modélisons cette équation
on a

$$\sum F_i = ma_i$$

$$F_2 \sin\theta_2 - F_1 \sin\theta_1 = \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (*)$$

En appliquant la loi aux mouvements de l'élément selon x,

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow F_1 \cos\theta_1 = F_2 \cos\theta_2 = F$$

En remplaçant F_1 par $F/\cos\theta_1$ et F_2 par $F/\cos\theta_2$ dans l'équation en (*) , on obtient :

$$F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$F\left\{\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1}{\Delta x}\right\} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

si on remplace $\frac{\partial u}{\partial x}$ par une fonction $f(x)$, on obtient:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{f_2(x) - f_1(x)}{\Delta x}\right\}$$

nous donne la dérivée de $f(x)$, donc la dérivée seconde de u par rapport à x:

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donc l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{F}{\mu}$$

- **Résolution de l'équation d'onde**

(a) méthode de séparation des variables
(b) méthode de caractéristique

4. Travaux pratiques

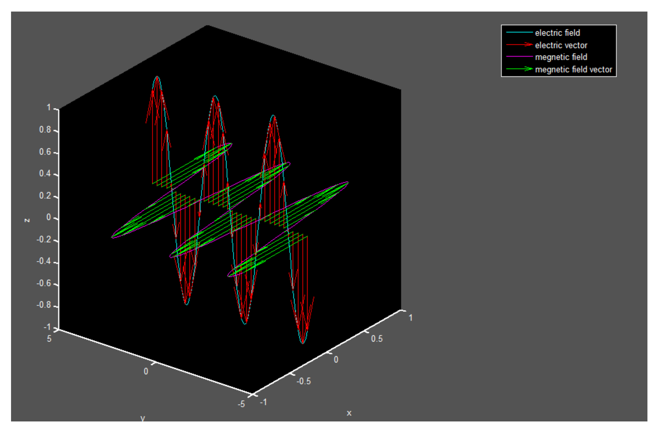


Figure 2: *Maxwelle*

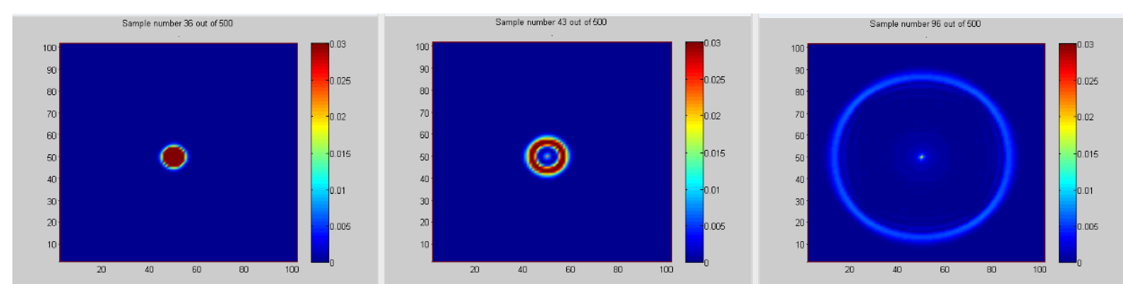


Figure 3: *Des ondes acoustique*

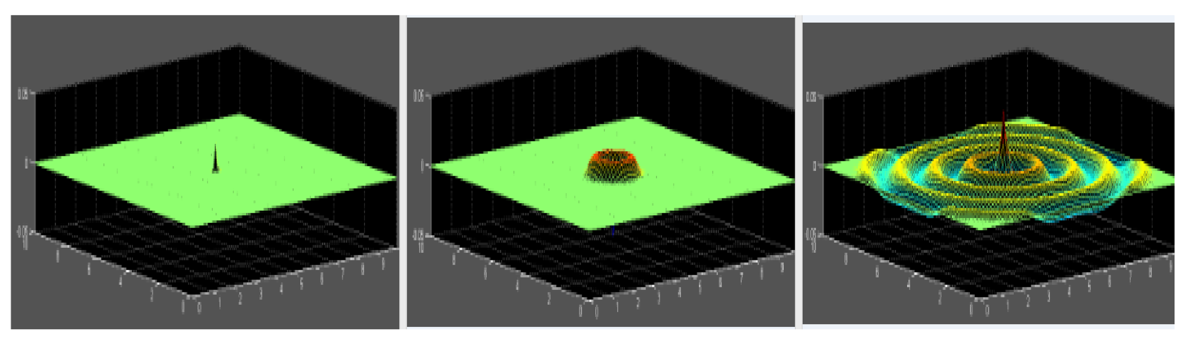


Figure 4: *des ondes 2D*

ref

[1] H. Sazdjian, ondes, Cordes vibrantes, ondes sonores, ondes optiques, Université Paris XI, 2006-2007

[2] J.-J. Labarthe , corde vibrante & acoustique, Université Paris-Sud Orsay DEUG S3 SMR,

[3] José-Philipe Pérez, électromagnétisme fondements et application, Dunod , Paris, 2002,

[4] Maxime Nicolas - Ondes et électromagnétisme , PeiP 1er cycle ingénieur prépa intégrée (2009, Dunod)