..

UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Bouazza Dounia

Thème

Sur Un Probleme Hyperbolique Gouvernée Par Un Terme Viscoélastique

Soutenu publiquement le : 09/07/2019

Devant le jury composé de :

Dr.Boussaad Abdelmalik	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Mr.Agti Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Mr. M. Meflah	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dèdis mon modeste travail :

mes trés chers parents.

A mes frères et mes seours

Toute ma famille

A mes chers amies

Je dédie mon mémoire de mastre ma reconnussance et mon amour , pour tous aux qui m'ont aider,tous les memmbres de ma class ,tous mes professeurs .

Remerciement

Je remercie Allah avant tout car á lui seul revient les louanges.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, M, Meflah, je lui en suis très reconnaissant, Merci.

Je profite de cette occasion pour remercier tous mes enseignants, sans oublié mes

Je tiens à remercier, Monsieur Boussaad Abdelmalik de me faire l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie d'avoir Agti Mohamed accepté de faire partie de ce jury.

A toute ma famille.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.

A tous mes amis.

Table des matières

Notations

➤ m : Masse (kg)

➤ l : longueur

➤ t : temps

➤ T : température

➤ v : vitesse

➤ f : force

➤ p : pression

➤ e : énergie

➤ f : fonction

➤ $H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour m $\in N$; par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$)

➤ $L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$

−Si $1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

− Si $p = \infty, \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess}_{x\in\Omega} |f(x)|$

➤ $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Laplacien de u.

➤ $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = grad\, u$: le gradient de u .

On note

➤ D(A) : Domaine de l'opérateur A.

➤ R(A) : Image de l'opérateur A.

➤ d(,) : Distance sur un ensemble .

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

- ➤ $(.,.)_X$: le produit scalaire de X
- ➤ $\|.\|_X$: la norme de X

Introduction

Les premières recherches sur le problème de vibrations d'un fil élastique ont été traitées par d'Alembert $(1717-1793)$ et Euler $(1707-1783)$, a proposé le modiele suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

il a remarqué que les configurations du déplacement du fil sont données par :

$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

Dans ce travail, le problème principal est un problème hyperbolique gouverné par un terme viscoelastique.

Le travail est divisé de deux parties :

La première partie : en particulier, on peut citer les problèmes d'ondes de vibration que se propagent dans un milieu élastique homogène $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. La deuxième partie qu'étudier l'équation d'onde avec un terme viscoelastique.

En est passe par trois chapitres.

Dans le premier, on donne des rappels d'analyse fonctionnelle utilises dans les deux autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, je travaille sur la modélisation de l'équation des ondes pour trouver l'équation suivent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u} = 0$$

Et on pose le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0 \qquad sur \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0,+\infty[\quad (I) \\ u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0,+\infty[\quad (II) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (III) \\ u_t(x,0) = u_1(x), \ \text{sur} \quad \Omega \quad (IV) \end{cases}$$

Et étudie l'existence, l'unicité dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ bornée et de forntiere Γ reguliere avec :

une condition aux limites $u = 0$ sur Γ, et condition untial

Et condition initiales : déplacement initial u_0 et la vitasse initiale u_1.

Dans le chapitre trois on s'intéresse, un problème hyperbolique par un terme viscoelastique

Et on pose le problème suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau = 0, \quad dans \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \forall t \geqslant 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

g la fonction de relaxation. On établit alors facilement par la méthode de Galerkin, un théorème d'existence et d'unicité.

Le but de ce chapitre est d'étudier la décroissance d'un système.

On trouve que les problèmes généralisent qui est proposé par J.L Lions [4], perturbé avec un terme linéaire viscoélastique.

Dans ce travail on suivra le plan suivant :

Chapitre 01 : Dans ce chapitre, on introduit l' espace de Sobolev et le théorème de Hill-yosida .

Chapitre 02 : Dans ce chapitre, on donne le théorème de Hill-yosida d'étude le problème .

Chapitre 03 : Dans ce chapitre, on donne le méthode de Galerkin d'étude le problème et le méthode d'énergie pour la décriossant d'énergie .

1 Notations et Prémilinaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle qui vont être utilises dans les différents chapitres de cette thèse [3]
Quelques résultats sont donnés sans démonstration, car ils sont standards et connus chez les lecteurs comme elles peuvent être trouvées dans beaucoup de références de mathématiques Néanmoins, nous allons réserver une attention particulière pour les résultats utilises dans le chapitre suivant.

1.2 La viscoélasticité

La viscoélasticité sert à décrire le comportement de matériaux réversibles, mais sensibles à la vitesse de déformation. On peut citer par exemple les polymères et dans une moindre mesure, le béton et le bois, comme matériaux à comportement viscoélastique. Une des propriétés essentielles définissant la viscoélasticité est la relaxation qui est a propriété que possedent certains systèmes, lorsqu'ils sont sollicités, de réagir avec un certain retard, globalement défini comme le temps de relaxation. La sollicitation pouvant etre une contrainte ou une deformation, le processus correspondant est appelé respectivement relaxation de déformation (fluage/recouvrance) ou relaxation de contrainte. La durée de ces processus correspond au temps de relaxation. Les temps réels de relaxation peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeurs. Ainsi, quand un polymère est soumis à une sollicitation de déformation, sa premiere réponse est le développement d'une contrainte locale relativement élevée, qui a tendance à diminuer au cours du temps. C'est le phénomene de relaxation de contrainte. Les longues chaines sous forme de pelotes retrouvent, en fonction du temps, une position d'équilibre par l'intermédiaire de mouvements plus au moins rapides. A contrario, il existe aussi, par comparaison, une relaxation de déformation. Dans ce cas, la contrainte appliquée engendre une déformation dépendante du temps, c'est le fluage. La suppression de la contrainte induit àson tour une évolution retardée de la déformation qu'on appelle la recouvrance.

1.3 Quelques inégalités utiles

1.3.1 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit p un réel supérieur ou égal à 1 ; alors il existe une constante positive C telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

1.3.2 Inégalité de Hölder généralisée

Soit f, g deux fonction respectivement dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^q(\Omega)$, avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Alors , le produit fg est dans $L^r(\Omega)$ et l'on a

$$\left(\int_\Omega |fg|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

1.3.3 Inégalité de Young

Soit p,q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^p + \frac{1}{2\varepsilon} b^q.$$

1.3.4 Inégalité de Couchy-Schwarz

Soit H un espace vectoriel . (u,v) est produit scalaire sur H . Alors

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}.$$

1.4 Espaces réflexifs, espaces séparables

1.4.1 Espaces réflexifs

Définition 1.4.1 *Soit E un espace de Banach . On dit que* E *est réflexif si* $\mathrm{J(E)} = \mathrm{E}''$

On donne le résultat

Théoréme 1.4.2 *Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

1.4.2 Espaces séparables

Définition 1.4.3 *On dit qu'un espace métrique est séparable sil existe un sous-ensemble* $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$ *dénombrable et dense.*

Proposition 1.4.4 *Soit E un espace métrique séparable et soit* $\mathbf{F}$ *un sous-ensemble de* $\mathbf{E}$ *. Alors* $\mathbf{F}$ *est séparable.*

Preuve. Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E. Soit (r_m) une suite de réels positifs avec $r_m \to 0$. On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in \mathbf{B}\,(u_n, r_m) \cap \mathrm{F}$ lorsque cet ensemble est non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})$ constitue un ensemble dénombrable dense dans F. ■

Corollaire 1.4.5 *Soit E un espace de Banach.*
Alors (E réflexif et séparable)⇔ E′ (réflexif et séparable)

Preuve. Voir H. Brezis [3] (le démonsration de Corollaire III.24. , page 48) ■

1.5 Opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continue T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Proposition 1.5.2 *Un opérateur linéaire et compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.*

Remarque 1.5.3 *Le résultat de la proposition (1.5.2) peut remplacer la définition précédente*

Théoréme 1.5.4 *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve. Voir H. Brezis [3] (Théorème VI.11, page 97) ■

Proposition 1.5.5 *Tout opérateur symétrique T défini sur un espace de Hilbert H, à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et autoadjoint.*

Preuve. Voir K . Yosida [5] (Proposition VIII.3.2, page). ■

1.6 Les espaces de sobolev

1.6.1 L'espace de sobolev d'ordre entier

Définition 1.6.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel.*

On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $\mathrm{H}^m(\Omega)$. L'ensemble :

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\, D^\alpha u \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\right\}$$

Oú

$D^{\alpha}\mathbf{u} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, *désigne la dérivée d'ordre* α *au sens des distributions avec* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

1.6.2 Quelques propriétés des espaces $\mathbf{H}^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $\mathbf{H}^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^{\alpha}\mathbf{u}, D^{\alpha}\mathbf{v})_{L^2}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$

La norme associée étant donnée par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{H}^m(\Omega)}} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha}\mathbf{u})^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $m = 0$ on a $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$\mathrm{H}^{m_1}(\Omega) \subset \mathrm{H}^{m_2}(\Omega) \text{ avec injection continue.}$$

(iii) Pour tout $m \geq 0, \mathrm{H}^m(\Omega)$ est un espace séparable. (iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $\mathrm{H}_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^m(\Omega)$:

$$\mathrm{H}_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}\,\mathrm{dans}\,\mathrm{H}^m(\Omega)$$

et par $\mathbf{H}^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$ (v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) / \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial \eta^j} = 0, \forall j = 0, \dots, m-1 \right\}$$

oú : $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)\eta_i, \quad \forall x \in \Gamma$$

1.7 Espace $\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})$

Définition 1.7.1 *Soit p un réel,* $1 \leq p \leq \infty$, X *un espace de Banach et* T *un réel strictement positif. On définit l'espace*

$$W^{1,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^P(0,T;X), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;X) \right\}$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})}$$

où de la norme équivalente, si p est fini, définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})} = \left(\|\mathbf{u}\|^p_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|^p_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, *l'espace* $\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})$ *est de Banach.*

Proposition 1.7.2 *Si X est séparable et* $p < +\infty$, *alors l'espace* $\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})$ *est séparable*

Proposition 1.7.3 *Si* $1 < p < +\infty$ *et* X *est séparable réflexif alors l'espace* $W^{1,p}(0,T;X)$ *est réflexif.*

Proposition 1.7.4 *Pour* $p = 2$, *on note* $H^1(0,T;\mathbf{X}) = W^{1,2}(0,T;\mathbf{X})$, *on a alors* $H^1(0,T;\mathbf{X})$ *est de Hilbert.*

Lemme 1.7.5 *cf. Lions [4] J si* $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{X})$ *et* $\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} \in \mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{X}) \quad (1 \leq p \leq \infty)$
Alors f *est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$ *continue de* $[0,T]$ *dans* X.

1.8 Formule de Green

1.8.1 Formule de green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontiére Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension n-1 est de classe C^k

Théoréme 1.8.1 (formule de green) *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de*$\mathbb{R}^n$ *(par exemple* Ω*de classe* C^1 *avec* Γ *borné) ; alore pour tout u,v* $\in H^1(\Omega)$ *on a la formule de Green :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)d\Gamma, i = 1$$

a n

η_i *est le i* $^{\text{ème}}$*cosinusdirecteurdelanormalen sortante.*

Preuve. On pourra consulter Raviart et Thomas (Théorème 1.4.5, page 27). Cette formule est une " intégration par partie généralisée ". Sont importance est extrême par la suite. ■

Comme conséquence de ce théoréme, on a :

Corollaire 1.8.2 *Si* $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *et si*$\Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, *alors :*

$$\int \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)d\Gamma$$

Oú

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n} \quad \textit{est le vecteur gradient de } u$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$$

Finalement, on rappelle certains lemmes et concepts utilisé souvent dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution.

Lemme 1.8.3 (Gronwall) *Soient* $y \in L^\infty(]0;T[)$ *et* $x \in L^1(]0;T[)$ *deux fonctions positives et* y_0 *une constante positive, telles que :*

pour presque tout $t \in]0,T[$

$$y(t) \leqslant y_0 + \int_0^t x(s)y(s)ds$$

Alors, on a : pour presque tout $t \in]0,T[$

$$y(t) \leqslant y_0 \exp\left(\int_0^t x(s)ds\right)$$

Preuve. La démonstration est détaillée dans le livre de J. P. Demailly [2] ■

1.9 Définitions

Définition 1.9.1 *On dit que l'opérateur* A, *définit de* V *dans* V', *est*

1)A est borné s'il existe $C > 0$ *tel que :*

$$\|A(u)\|_{\mathrm{V}'} \leq C\|u\|_{\mathrm{v}}, \forall u \in \mathrm{V}$$

2) Coercive s'll existe $\alpha > 0$ *tel que :*

$$(A(u), u) \geq \alpha\|u\|^p_{\mathrm{V}}, \forall u \in \mathrm{V}, \alpha > 0, 1 < p < \infty$$

où bien

$$\frac{(A(u),u)}{\|u\|_{\mathrm{V}}} \longrightarrow +\infty, \qquad quand\ \|u\|_{\mathrm{v}} \longrightarrow +\infty$$

3) Monotone de V dans V' *sil vérifie :*

$$\forall u, v \in \mathrm{V} : (A(u) - A(v), u - v)_{\mathrm{v}',\mathrm{v}} \geq 0$$

4) Hémicontinu de V dans V' *s'il vérifie la proprieté suivante :*

$\forall u, v, w \in \mathrm{V}$ *la fonction* $\lambda \to (A(u + \lambda v), w)_{\mathrm{V}',\mathrm{v}}$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *.*

Remarque 1.9.2 *La monotonie généralise la notion de fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

1.10 Les opérateurs m-dissipatifs

1.10.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach

Définition 1.10.1 (Opérateur dissipative) *On dit que l'opérateur* $(A, D(A))$ *lineaire non bornée dans* E $(A : D(A) \subset E \to E)$ *est dissipative si pour tout* $u \in$, $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)u\| \geq \lambda \|u\|$$

Définition 1.10.2 *Un opérateur* $(A, D(A))$, *lineaire non borné dans* X, *est m-dissipatif Si :*

1. *A est dissipatif,*

2. $\forall f \in X, \quad \forall \lambda > 0, \quad \exists x \in D(A) \quad$ *tel que* $\quad \lambda x - Ax = f$

1.10.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert sur le corps C ou $\mathbb{R}$

Théoréme 1.10.3 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A), (Ax, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente remplacée par

$$\forall x \in D(A), \mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0$$

Définition 1.10.4 *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$, de domaine dense dans X est dit auto-adjoint si $A = A^* \cdot$ Il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$*

Remarque 1.10.5 *Si A est autoadjoint dans l'espace de Hibert E et si A est dissipatif, alors*
A est m-dissipatif.

1.11 Le théorème de Hille-Yosida

1.11.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.11.1 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur $linéairenon - born$ .On dit que A est monotone si*

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A),$$

A est maximal monotone si de puls $R(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \quad tel\, que \quad u + Au = f$$

Proposition 1.11.2 *Soit A un opérateur maximal monotone . Alors*

1. *D(A) est dense dans H.*
2. *A est fermé .*
3. *Pour tout* $\lambda > 0, (I+\lambda A)$ *est bijectif de D(A) sur H,* $(I+\lambda A)^{-1}$ *est un opérateur borné et* $\|(1+\lambda A)^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$.

1.11.2 Résolution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Existence et unicité

Théoréme 1.11.3 (Hille-Yosida) *[3]*
Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ *il existe une fonction* $u \in C^1([0+\infty[\,;\mathbb{H}) \cap C\left([0+\infty[\,;D(A)\right)$ *unique telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad sur \quad [0,+\infty] \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus , on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. La démonstration est détaillée dans le liver H. Brezis (théorème VII.4, page 105)
■

Remarque 1.11.4

1. L'intérêt principal du th éorème de Hille- Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal monotone , c'est - à-dire ,à étudier léquation stationnaire $u + \lambda Au = f$ *.*

2. Soit A un opérateur maximal monotone et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *. La résolution de l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad sur \quad [0, +\infty] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se ramène très simplement à la résolution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad sur \quad [0, +\infty] \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

grâce à l'artiflce classique suivant :

$$v(t) = e^{\lambda u(t)}$$

2 Etude du problème des ondes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre l'étude de problème hyperbolique, on peut citer les problèmes de propagation d'ondes de vibrations qui se propagent dans un milieu élastique.
Le but essentiel est d'étudier la modélisation d'onde et l'existence, l'unicité de solution de ce problème. L'eudier en utilisant le théorème de Hilbert Hille-Yosida.

2.2 Ondes élastiques

Définition 2.2.1 *Ces ondes se propagent dans les solides , l'inconnue est la distribution du champ des déplacements au sein de la structure.*

2.3 Modélisation d'onde élastique

Quand on tire une corde élastique, tous ses points sont sujets á la meme force T, appellée "tension" les cordes d'une guitare, tendues á travers les "mécaniques", sont tojours sous tension appellons x la distance le long de la corde, et t le temps aprés avoir accordé (c'est a dire, appliqué une tension aux cordes de) sa guitare, un guitariste en tire une corde $t = 0$, il laisse la corde, qui commence a osciller appellons $u(x, t)$ la déformation de la corde,

$$\sin \theta(x) \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{2.1}$$

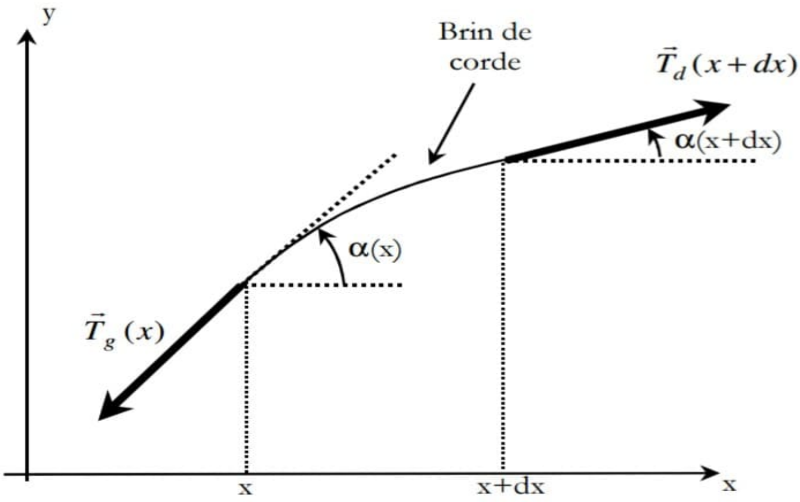

Figure 2.1 : Etablissement de l'équation d'onde

On considère maintenant un segment infiniment petit δx de la corde.
La force agissante sur le segment dans la direction y est égale à

$$F_y = T \sin\theta(x + \delta x) - T \sin\theta(x) \tag{2.2}$$

On applique la loi de Newton :

$$T \sin\theta(x + \delta x) - T \sin\theta(x) = \rho\delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

Où on a appellé ρ la masse par unité de longueur de la corde.
En remplaceant (2.1) dans (2.3)

$$T\frac{\partial u(x+\delta x,t)}{\partial x} - T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \rho\delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

Finalement, si on divise (2.4) à droite et à gauche par $\rho\delta x$

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

Le rapport T/ρ est toujours positif ($\rho > 0, T > 0$ par définition) ; on l'appelle c^2, e.

$$c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) est ce qu'on appelle équation d'onde uni-dimensionelle (1D)

2.4 Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frantier consederions le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0 \quad sur \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0, +\infty[\quad (I) \\ u(x,t) = 0, \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[\quad (II) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (III) \\ u_t(x,0) = v_0(x), \ \text{sur} \quad \Omega \quad (IV) \end{cases}$$

Ou disigne Laplacien Δ . l'opérateur $\quad \Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ c'est le D 'Alembertien.
en génèrale elle modélise la propagation d'une onde dans un milieu élastique homogéme $\Omega \in \mathbb{R}^n$
L'équation (II) est la condition aux limites de Dirichlet.
Les équation (III) et (IV) traduisant l'étant initiale du systéme (déplacement initial $U_0(x)$ et la vitesse initiale $v_0(x)$ supposons que Ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec Γ borné.

2.5 L'existence et l'uncite de solution

Théoréme 2.5.1 *[3] On suppose que $u_0 \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$ et que $v_0 \in \mathbf{H}_0^1$ Alors il existe une solution unique verifie le problème (I) (II) (III) (IV) avec*

$$u \in C([0+\infty[\,; H_0^1(\Omega)) \cap C^1\left([0+\infty[\,, H(\Omega)_0^1\right) \cap C^2\left([0+\infty[\,, L^2(\Omega)\right)$$

de plus on a :

$$\left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2 \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{2.7}$$

Remarque 2.5.2 *La relation (2.7) est une loi de conservation qui exprime que l'energé du système reste invariante au cours du temps*

Preuve. [3] On écrit l'equation (I) une forme d'un systeme du 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \quad sur \quad \mathcal{Q} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta u \quad sur \quad \mathcal{Q} \end{cases}$$

On pose $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de sorte que système devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = AU \\ \\ U(x,0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(c'est un équation d'évolution du premier ordre) avec

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

On applique le théorème de Hilbert Hille-Yosida dans l'espace H où $H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx \tag{2.9}$$

Ou

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad et \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

L'operateur non borné $A : D(A) \subset H \to H$ défini par(2.8) avec

$$\begin{aligned} D(A) &= (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \\ &= (u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)) \cap (u \in L^2(\Omega), u = 0 \quad sur \quad \Gamma) \times (v \in L^2(\Omega), v = 0 \quad sur \quad \Gamma). \end{aligned}$$

d'aprés (II)

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times [0, +\infty[$$

Donc

$$D(\Delta) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

Montrons que l'opérateur $(A, D(A))$ est m-dissipatif c'est-à-dire on applique le théorème de Hille-Yosida dans l'espace

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

L'espace H muni de produit scalaire défini par :

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx + \int_\Omega v_1 \cdot v_2 dx$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur A est dissipatif car :

Soit $U \in D(A), \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}$$

$$(AU, U) = -\int_\Omega \nabla v . \nabla u dx + \int_\Omega (-\Delta u). v dx = 0 \qquad \forall \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$$

(d'aprés la formule de Green)

On trouve

$$(AU, U) = -\int_\Omega \nabla v . \nabla u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = 0$$

.

Montrons maintenant que A est m-dissipatif

Soit $F = (f, g) \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad et \quad soit \quad \lambda > 0$

$$A : D(A) \subset H \to H$$

$$(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

L'équation

$$\lambda U - AU = F \quad avec \quad F = (f, g)$$

Est équivalente au système.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda u - v = f \\ \\ \lambda v - \Delta u = g \end{cases} \tag{2.11}$$

D'ou

$$v = \lambda u - f \tag{2.12}$$

L'equation (2.12) admet une solution u tel que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (car $(\Delta, D(\Delta))$ est m- dissipatif, par conséquent v existe et $v = \lambda u - f \in H_0^1(\Omega)$
D'aprés (2.12) D'oú

$$\begin{aligned} \lambda^2 u - \lambda f - \Delta u &= g \\ \lambda^2 u - \Delta u &= g + \lambda f \end{aligned}$$

Cette équation admet une solution $u \in D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
(Car Δ est m-dissipatif dans l'espace $L^2(\Omega)$

$$g + \lambda f \in L^2(\Omega))$$

Puisque :

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad et \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

Par suite il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ défini (2.12)

par conséquent l'opérateur (A,D(A))

Ou

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

et m-dissipatif dans l'espace $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donc d'aprés le théorème de Hille-Yosida le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = AU \quad t > 0 \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Admet une solution unique u défini

de plus

$$U \in C([0+\infty[\, , H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty[\, , H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

Par suite

$$u \in C([0,+\infty[\, , H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,+\infty[\, , L^2) \cap C^1([0,+\infty[\, , H_0^1(\Omega))$$

Montrons la relation (2.7)

On a d'aprés l'équation (I)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

En multiplant l'équation (I) par u_t et intégrant sur Ω , on trouve

$$\int_\Omega u_t.u_{tt}dx - \int_\Omega u_t.\Delta u dx = 0$$

On utlisée le théorème de Green, on trouve

$$\int_\Omega u_t.u_{tt}dx + \int_\Omega \nabla u_t.\nabla u dx$$

D'autre partie

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t.u_{tt}dx &= \int_\Omega (u_t^2)'dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx \end{aligned}$$

$$\int_\Omega -\Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega \left(\nabla u \times \frac{\partial \nabla u}{\partial t} \right) dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Alors

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx = -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + c$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \right) = c$$

Par conséquence

$$\varphi(t,x) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$$

Est constante donc

$$\varphi(t,x) = \varphi(0,x) \quad t \geq 0$$

ausi

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_\Omega (\nabla u)^2 dx = \int_\Omega v_0^2 dx + \int_\Omega (\nabla u_0)^2 dx$$

Alors

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2$$

■

3 Equation d'onde linéaire avec un terme viscoélastique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, en utilisant les techniques de Galerkin . Le but essentiel est d'étudier l'existence, l'unicité de solution de ce problème (équation hyperbolique linéaire un terme viscoélastique).La preuve du résultat de la décroissance de la solution

3.2 Généralités sur le problème notations

Dans ce chapitre, on étudiera le problème du système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau = 0, \quad sur \quad \mathrm{Q}_T = \Omega \times]0,T[. \\ \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \forall t \geqslant 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système (3.1) est modèle pour un corps viscoélastique linéaire . Le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}$ avec un frontière régulière $\partial\Omega$, T est un réel fini.

g(t) est la fonction de relaxation, et u_0 ,u_1 sont des données initials, Δ les opérateurs de Laplace .

3.3 L'existence et l'uncite de solution

Dans cette section nous prouvons l'existence et l'unicitéé de de la solution en utilisant la méthode Galerkin.

3.3.1 Formulation variationnelle

Nous commençons tout d'abord par la recherche de formulation variationnelle du problème (3.1).

Multiplions l'équation (3.1) par une fonction $v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ et intégrons sur Ω On aura après utilisation de la formule de Green

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) - a(u,v) + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), v)d\tau = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

On peut alors poser les hypothèses suivante :

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^2(\Omega)\right) \tag{3.2}$$

$$et \quad \mathbf{u}_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{3.3}$$

3.3.2 L'existence

Théoréme 3.3.1 *Sous les hypotheses (3.2) et (3.3), le problème (3.1) admet une solution u vérifiant :*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega))\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$$

Preuve. La démonstration est basée sur la méthode de Galerkin qui consiste à réaliser les deux étapes :

Etape 1 : Solution approchée

On a l'espace V= $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ est séparable

Il existe une suite $w_1, w_2, ..., w_m$ ayant les proprietés suivants :

$$\begin{cases} w_i \in V, \quad \forall i, \\ \forall m, w_1, w_2, ..., w_m \quad \textit{sont lineaire indpendants} \\ v_m = \langle \{w_1, w_2, ..., w_m\} \rangle \quad \textit{est dense dans } V \end{cases}$$

On cherche alors $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i$ solution " approchées" du problème suivant

$$(u''_m(t), w_i) + (\Delta u_m(t), w_i) + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_m(\tau), w_i) d\tau = 0 \quad i = 1, ..., m$$

Avec :

$$u_m(0) = u_{0_m} \to u_0 \quad dans \quad V$$

$$u'_m(0) = u_{1_m} \to u_1 \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

c'est un systéme différentiel ordinaire lineaire, les condition donnée, le systéme va admet une solution sur $[0, t_m]$ oú $t_m \leq T$ dépend de m.

L'etape qui suit montre que $t_m = T$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Etape 2 : Estimation á priori

En mulitplions par $g'(t)_{km}$ et on somme sur k , ce qui donnee :

$$(u''(t)_m, u'_m(t)) + a(u_m, u'(t)_m) + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_m(\tau), u'_m(t)) d\tau = 0$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_m(\tau), u'_m(t)) d\tau = 0 \qquad (3.4)$$

En effet :

$$\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u_m(\tau), u'_m(t)) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t g(t-\tau)\Delta u_m(\tau), u'_m(t) d\tau \\
&= -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u'(t).\nabla(\tau) u_m dx d\tau \\
&= -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u'_m.(\nabla u_m(\tau)-\nabla u_m) dx d\tau \\
&\quad -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u'_m(t)\nabla u_m(t) dx d\tau \\
&= \int_0^t g(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\nabla \mathbf{u}_m(x,t)-\nabla \mathbf{u}_m(x,\tau))^2 dx d\tau \\
&\quad -\int_0^t g(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\nabla \mathbf{u}_m(x,t))^2 dx d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\frac{d}{dt}\left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)-\nabla \mathbf{u}_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 d\tau \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)-\nabla \mathbf{u}_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau\right) - \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)-\nabla \mathbf{u}_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)\right\|_2^2\right) + \frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)\right\|_2^2
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

En remplaçant (3.5) dans(3.4) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u'_m(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2 - \int_0^t g(\tau)d\tau\left\|\nabla u_m(t)\right\|_{L^2}^2 + (g\circ\nabla u_m)(t)\right) \\
&\qquad -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_m)(t) + \frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u_m(t)\right\|_{L^2}^2 = 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

avec

$$
(g\circ v)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|v(t)-v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau, \quad \forall v \in L^2
$$

On intègre sur l'intervalle $(0,t)$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)d\tau\left\|\nabla u_m(t)\right\|_{L^2}^2 \\
&+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u_m)(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (g'\circ\nabla u_m)(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t g(\sigma)\left\|\nabla u_m(\sigma)\right\|_{L^2}^2 d\sigma = 0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\leq \frac{1}{2}\left\|u_{0\mathrm{m}}\right\| + \frac{1}{2}\left|u_{1m}\right|^2
$$

Or $\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 = \left\|\nabla \mathbf{u}_m(t)\right\|_{L^2}^2$, utilisons maintenant l'inégalité de Poincaré, on aura

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 - \int_0^t g(\tau)d\tau \, \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 \\ \geq \left(1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right) \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 \\ \geq lC_p \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

Où C_p : constante de Poincaré, et

$$\left(1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right) \geq l$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2} lC_p \|u_m(t)\|^2 + (g \circ \nabla u_m)(t) \\ - \frac{1}{2} \int_0^t g' \circ \nabla u_m(\sigma) d\sigma \\ \leq \frac{1}{2} \|u_{0\mathrm{m}}\| + \frac{1}{2} |u_{1m}|^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

On déduit donc, en particulier de (3.8), que

$$|u_m'(t)|^2 \leq K \tag{3.9}$$

d'où résulte que

$$|\mathbf{u}_m'(t)|^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + (\mathbf{g} \circ \mathbf{u}_m)(t) \leqslant \textit{constante}. \tag{3.10}$$

On en déduit que $t_m = T$

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty \left(0, T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega)\right)\right) \tag{3.11}$$

$$\mathbf{u}_m' \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty \left(0, T; \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)\right) \tag{3.12}$$

D'où l'existence de la solution. ■

3.3.3 Unicité

Supposons que le problème admet deux solutions u , v : Posons $U = u - v$ on a

$$U'' - \Delta U + \int_0^t g(t-\tau)\Delta U d\tau = 0 \tag{3.13}$$

$$\mathbf{U}(x,t) = 0, \ sur \quad \Gamma\times]0,T[\tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}(x,0) = 0, \\ \mathbf{U}_1(x,0) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Multiplions les deux membres de (3.13) par U′, et intégrons sur Ω. On déduit, en utilisant la formule de Green que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|\mathbf{U}'|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{U},\mathbf{U})\right] + \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\left(\Delta\mathbf{U}(\tau),\mathbf{U}'(t)\right)d\tau = 0$$

Nous montrons que

$$\int_0^t \mathrm{g}(t-\tau)\left(\Delta\mathrm{U}(\tau),\mathrm{U}'(t)\right)d\tau$$

s'écrit comme la somme de la dérivée en temps d'une quantité plus un terme de dissipation positive

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathrm{g}(t-\tau)\left(\Delta\mathrm{U}(\tau),\mathrm{U}'(t)\right)d\tau = -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla\mathrm{U}'(t)\cdot\nabla\mathrm{U}(\tau)dxd\tau \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla\mathrm{U})(t) - \frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\mathrm{U}\right)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\nabla\mathrm{U}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\right) \\
+ & \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\mathrm{U}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc on obtient le système

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\mathrm{U}'|^2 + \left(g\circ\nabla\mathrm{U}_m\right)(t) + \left(1 - \int_0^t \mathrm{g}(\tau)d\tau\right)\|\mathrm{U}(t)\|^2\right) \\
-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\mathrm{U}_m\right)(t) + \frac{1}{2}\mathrm{g}(t)\|\nabla\mathrm{U}(t)\|^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Par suite (3.16) devient

$$\|\mathbf{U}(t)\|^2 + |\mathbf{U}'(t)|^2 - \tfrac{1}{2}\int_0^t \left(g' \circ \nabla \mathbf{U}_m\right)(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{g}(s)\|\mathbf{U}(\sigma)\|^2 d\sigma$$

$$\leqslant \int_0^t \left(\frac{C}{2}\|\mathbf{U}(\sigma)\| + \frac{C}{2}\left|\mathbf{U}'(\sigma)\right|\right) d\sigma$$

d'après la condition (G_1), g' est négative et d'après la définition de $\left(g' \circ \nabla \mathrm{U}_m\right)(\sigma)$ on a :

$$\left(g' \circ \nabla \mathrm{U}_m\right)(\sigma) \leq 0$$

On déduit donc, en particulier, de (3.17), que

$$\|\mathbf{U}(t)\|^2 + \left|\mathbf{U}'(t)\right|^2 \leqslant \int_0^t \left(\frac{C}{2}\|\mathbf{U}(\sigma)\| + \frac{C}{2}\left|\mathbf{U}'(\sigma)\right|\right) d\sigma \tag{3.17}$$

Donc $\mathbf{U} = 0$, (ceci en utilisant l'équation (3.17). Par conséquent

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

3.4 Décriossance générale

Prelimiriaries

- (H1) g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que :

$$g(0) > 0\ ,\quad l = 1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau > 0.$$

- (H2) il existe une fonction différentiable ξ :

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \qquad t \geq 0.$$

$$\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \leq k, \quad \xi(t) > 0 \quad , \xi'(t) \leq 0 \qquad \forall t > 0.$$

On intorduit la fonctionelle d'energie

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(g\circ\nabla u\right)(t)>0 \tag{3.18}$$

où

$$\left(g\circ v\right)(t)=\int_0^t g(t-\tau)\left\|v(t)-v(\tau)\right\|_2^2 d\tau.$$

On pose

$$F(t):=E(t)+\varepsilon_1\Psi(t)+\varepsilon_2\chi(t) \tag{3.19}$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes positives et

$$\Psi(t):=\xi(t)\int_\Omega uu_t dx$$
$$X(t):=-\xi(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \tag{3.20}$$

Lemme 3.4.1 *Soit u est une solution du problème (3.1). Alors la fonctionnelle d'énergie satisfait*

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2\leqslant\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)\leqslant 0 \tag{3.21}$$

Preuve. En multiplant l'équation (3.1) par u_t et intégrant sur Ω, on trouve

$$0=\int_\Omega u_t.u_{tt}dx-\int_\Omega u_t.\Delta u dx+\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau dx,$$

Grâce au théorème de Green, on trouve

$$0=\int_\Omega u_t.u_{tt}dx-\int_\Omega\nabla u_t.\nabla u dx-\int_\Omega\nabla u_t\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)dx.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \nabla u_t\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)dx\\
=&-\int_\Omega \nabla u_t\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(\tau)-\nabla u(t)+\nabla u(t)\right)d\tau\right)dx\\
=&-\int_\Omega \nabla u_t\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)dx+\int_\Omega \nabla u_t\left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)d\tau\right)dx\\
=&-\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t(t).\nabla u(t)dx\,d\tau+\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t(t).\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)dxd\tau\\
=&-\int_0^t g(t-\tau)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2\right)d\tau+\int_0^t g(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right\|_2^2)d\tau\\
=&\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)d\tau\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2d\tau\right)+\frac{1}{2}g(0)\left\|\nabla u\right\|_2^2\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right\|_2^2-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left\|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right\|_2^2d\tau\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2d\tau\right)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Alors, on déduit

$$0=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2d\tau\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u\right\|_2^2. \tag{3.22}$$

D'où résulte (3.4.1)

■

Lemme 3.4.2 *[7]*

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^2dx\leqslant(1-l)C_p^2(g\circ\nabla u)(t)$$

où C_p est la constante de Poincaré.

Preuve.

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^2dx=\int_\Omega\int_0^t \sqrt{g(t-\tau)}\sqrt{g(t-\tau)}(u(t)-u(\tau))d\tau)^2dx$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy– Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on voit facilement que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}^{t}\left(\int_{0}^{t}g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^{2}dx &\leqslant \int_{\Omega}\left(\int_{0}^{t}g(t-\tau)d\tau\right)\left(\int_{0}^{t}g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))^{2}d\tau\right)dx\\ &\leqslant (1-l)C_p^2(g\circ\nabla u)(t)\end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.3 *pour* ε_1 *et* ε_2

$$\alpha_1 F(t)\leqslant E(t)\leqslant \alpha_2 F(t) \tag{3.23}$$

est valable pour deux constantes positives α_1 *et* α_2*.*

Preuve. Des calculs, on utilisant le lemme 3.4.2 , conduisent à

$$\begin{aligned}F(t) &\leqslant E(t)+(\varepsilon_1/2)\,\xi(t)\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+(\varepsilon_1/2)\,\xi(t)\int_{\Omega}|u|^2dx+(\varepsilon_2/2)\,\xi(t)\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx\\ &\quad+(\varepsilon_2/2)\,\xi(t)\int_{\Omega}\int_{0}^{t}g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau)^2dx\\ &\leqslant E(t)+[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2]\,M\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+(\varepsilon_1/2)\,C_p^2M\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+(\varepsilon_2/2)\,C_p^2M(1-l)(g\circ\nabla u)(t)\\ &\leqslant \alpha_2 E(t)\end{aligned} \tag{3.24}$$

De même

$$\begin{aligned}F(t) &\geqslant E(t)-(\varepsilon_1/2)\,\xi(t)\int|u_t|^2\,dx-(\varepsilon_1/2)\,\xi(t)C_p^2\int|\nabla u|^2dx-(\varepsilon_2/2)\,\xi(t)\int|u_t|^2\,dx\\ &\quad-(\varepsilon_2/2)\,\xi(t)C_p^2(1-l)(g\circ\nabla u)(t)\\ &\geqslant\left[\frac{1}{2}-M\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2\right]\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\left[\frac{1}{2}l-M\left(\varepsilon_1/2\right)C_p^2\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\\ &\quad+\left[\frac{1}{2}-M\left(\varepsilon_2/2\right)C_p^2(1-l)\right](g\circ\nabla u)(t)\\ &\geqslant \alpha_1 E(t)\end{aligned} \tag{3.25}$$

■

Lemme 3.4.4 *[7]*

$\Psi(t) := \xi(t)\int_\Omega uu_t dx$

$$\Psi'(t) \leqslant \left[1+\frac{k^2C_p^2}{l}\right]\xi(t)\int_\Omega u_t^2dx - \frac{l}{4}\xi(t)\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \frac{(1-l)}{2l}\xi(t)(g\circ\nabla u)(t) \qquad (3.26)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Psi'(t) =& \xi(t)\int_\Omega \left(uu_{tt}+u_t^2\right)dx + \xi'(t)\int_\Omega uu_t dx\\ =&\xi(t)\int_\Omega u_t^2dx - \xi(t)\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau dx + \xi'(t)\int_\Omega uu_t dx\end{aligned} \qquad (3.27)$$

Nous estimons maintenant le troisième terme dans la partie droite de (3.27) comme suit

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'ingalité de Young

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau dx\\ \leqslant\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(\tau)|d\tau\right)^2dx\\ \leqslant\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2dx\end{aligned} \qquad (3.28)$$

Nous utilisons et d'aprés le lemme (3.4.2)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2dx\\ \leqslant&\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx + \int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx\\ &+2\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(t)|d\tau\right)dx \qquad (3.29)\\ \leqslant&(1+\eta)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx + \left(1+\frac{1}{\eta}\right)\int_\Omega\left(\int_\Omega^t g(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx\\ \leqslant&\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(1-l)(g\circ\nabla u)(t) + (1+\eta)(1-l)^2\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx\end{aligned}$$

En combinant (3.27) - (3.29) et en utilisant

$$\int_\Omega uu_t dx \leqslant \alpha C_p^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\alpha}\int_\Omega u_t^2 dx, \quad \alpha > 0$$

Nous arrivons à

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \leqslant \left[1 + \frac{1}{4\alpha}\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right|\right]\xi(t)\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(1-l)\xi(t)(g\circ\nabla u)(t) \\ -\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta)(1-l)^2 - 2\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right|\alpha C_p^2\right]\xi(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \left[1 + \tfrac{1}{4\alpha}k\right]\xi(t)\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(1-l)\xi(t)(g\circ\nabla u)(t) \\ &-\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta)(1-l)^2 - 2k\alpha C_p^2\right]\xi(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\end{aligned} \tag{3.30}$$

En choisissant $\eta = l/(1-l)$ and $\alpha = l/4kC_p^2$ (3.26) est établi ■

Lemme 3.4.5 *[7]* $\chi(t) := -\xi(t)\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx$ *satisfait, avec la solution de 3.1,*

$$\begin{aligned}\chi'(t) \leqslant \delta\xi(t)\left[1+2(1-l)^2\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \left[\left\{2\delta + \frac{1}{2\delta}\right\}(1-l) + \frac{C_p^2}{4\delta}k\right]\xi(t)(g\circ\nabla u)(t) \\ + \frac{g(0)}{4\delta}C_p^2\xi(t)\left(-(g'\circ\nabla u)\right)(t) + \left[\delta(k+1) - \int_0^t g(\tau)d\tau\right]\xi(t)\int_\Omega u_t^2 dx, \quad \delta > 0\end{aligned} \tag{3.31}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\chi'(t) = & -\ \xi(t)\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
& -\xi(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
& -\xi(t)\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\int_\Omega u_t^2 dx \\
& -\xi'(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
= & \ \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right)dx \\
& -\xi(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)\cdot\left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right)dx \\
& -\xi(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
& -\xi'(t)\int_\Omega^t u(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Comme pour (3.27), nous estimons les termes du côté droit de (3.32). Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young, le premier terme donne

$$
-\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right)dx \leqslant \delta\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1-l}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t),\quad \forall\delta>0
\tag{3.33}
$$

De même, le deuxième terme peut être estimé comme suit

$$
\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)ds\right)\cdot\left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right)dx
$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant &\ \ \delta\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right|^2dx+\frac{1}{4\delta}\int\left|\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(t))d\tau\right|^2dx \\
\leqslant &\ \ \delta\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2dx+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right|^2dx \\
\leqslant &\ \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|d\tau\right)^2dx+2\delta(1-l)^2\int_\Omega|\nabla u|^2dx \\
\leqslant &\ \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(1-l)(g\circ\nabla u)(t)+2\delta(1-l)^2\int_\Omega|\nabla u|^2dx
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Quant aux troisième et quatrième termes, nous avons

$$-\int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \leqslant \delta \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{g(0)}{4\delta} C_p^2 \left(g' \circ \nabla u\right)(t) \tag{3.35}$$

Et

$$\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \leqslant \delta \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{C_p^2}{4\delta}(g \circ \nabla u)(t) \tag{3.36}$$

En combinant (3.32) - (3.36), l'affirmation du lemme est établie. ∎

Théoréme 3.4.6 *[7] Soit* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *doit être donnée. Supposons que g et* ξ *satisfont (H1) et (H2). Ensuite, pour chaque* $\forall t_0 \geqslant 0$*, il existe des constantes strictement positives* K *et* λ *telles que la solution de (3.1) vérifie*

$$E(t) \leqslant K e^{-\lambda \int_{t_0}^t \xi(\tau)d\tau}, \quad t \geqslant t_0 \tag{3.37}$$

Preuve. [7] Puisque g est positif et que $g(0) > 0$, alors pour tout $t \geqslant t_0$ nous avons

$$\int_0^t g(\tau)d\tau \geqslant \int_0^{t_0} g(\tau)d\tau = g_0 > 0, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.38}$$

En utilisant (3.19), (3.21), (3.26), (3.31 et (3.38) on obtient pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}
F'(t) \leqslant & -\left[\varepsilon_2 \left\{g_0 - \delta(1+k)\right\} - \varepsilon_1 \left(1 + \frac{k^2 C_p^2}{l}\right)\right] \xi(t) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \left\{\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p^2 M\right\} \left(g' \circ \nabla u\right)(t) \\
& - \left[\frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2 \delta \left\{1 + 2(1-l)^2\right\}\right] \xi(t) \|\nabla u\|_2^2 \\
& + \left(\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l} + \varepsilon_2 \left(2\delta + \frac{1}{2\delta}\right)(1-l) + \varepsilon_2 \frac{C_p^2}{4\delta} k\right) \xi(t) (g \circ \nabla u)(t)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

À ce stade, nous choisissons si petit que

$$g_0 - \delta(1+k) > \tfrac{1}{2} g_0$$

$$\frac{4}{l}\delta \left[1 + 2(1-l)^2\right] < \frac{1}{4\left(1 + \frac{k^2 C_p^2}{l}\right)} g_0$$

Si δ est fixé, le choix de deux constantes positives ε_1 et ε_2 satisfaisant

$$\frac{g_0}{4\left(1 + \frac{k^2 C_p}{l}\right)} \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{g_0}{2\left(1 + \frac{k^2 C_p^2}{l}\right)} \varepsilon_2 \tag{3.40}$$

Nous faisons

$$k_1 := \varepsilon_2 \left\{g_0 - \delta(1+k)\right\} - \varepsilon_1 \left(1 + \frac{k^2 C_p^2}{l}\right) > 0$$
$$k_2 := \frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2 \delta \left[1 + 2(1-l)^2\right] > 0$$

On choisit ensuite ε_1 et ε_2 pour que (3.19) et (3.40) restent valables et, enoutre

$$k_3 := \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p^2 M\right) - \left(\frac{\varepsilon_1}{l} + \varepsilon_2 \left\{2\delta + \frac{1}{2\delta}\right\}\right)(1-l) - \varepsilon_2 \frac{C_p^2}{4\delta} k > 0$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p^2 M\right\} \left(g' \circ \nabla u\right)(t) + \left(\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l} + \varepsilon_2 \left(2\delta + \frac{1}{2\delta}\right)(1-l) + \varepsilon_2 \frac{C_p^2}{4\delta} k\right) \xi(t)(g \circ \nabla u)(t) \\
\leqslant - \left\{\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p^2 M\right\} \int_\Omega \int_0^t \xi(t-\tau) g(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx \\
+ \left(\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l} + \varepsilon_2 \left(2\delta + \frac{1}{2\delta}\right)(1-l) + \varepsilon_2 \frac{C_p^2}{4\delta} k\right) \xi(t)(g \circ \nabla u)(t) \\
\leqslant - k_3 \xi(t)(g \circ \nabla u)(t)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Puisque ξ est non croissant. Par conséquent, en utilisant (3.23), (3.39) et (3.41), on arrive à

$$F'(t) \leqslant -\beta_1 \xi(t) E(t) \leqslant -\beta_1 \alpha_1 \xi(t) F(t), \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.42}$$

Une simple intégration de (3.42) conduit à

$$F(t) \leqslant F(t_0) e^{-\beta_1 \alpha_1 \int_{t_0}^t \xi(\tau) d\tau}, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.43}$$

Ainsi (3.23) (3.43) donne

$$E(t) \leqslant \alpha_2 F(t_0) e^{-\beta_1 \alpha_1 \int_{t_0}^t \xi(\tau) d\tau} = K e^{-\lambda \int_{t_0}^t \xi(\tau) d\tau}, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.44}$$

Ceci complète la preuve.

■

Conclusion

L'objectif ce travail est l'étude l'existence et l'unicité de problème hyperbolique gouverne par un terme viscélastique.
Nous avons commencé par un problème hyperbolique, on peut citer l'équation d'onde. On donne le théorème de Hill-yosid d'étude le problème.
Dans le second chapitre, nous avons étudié l'existence, l'unicité, un problème hyperbolique gouverne par un terme viscoélastique et on utilise la méthode de Galerkin et on a obtenu un résultat de décroissance de l'énergie de la solution en utilisant la méthode de Lyapunov.

Bibliographie

[1] A. Keddi, Etude de quelques problèmes de thermo-visco-élasticité ,mèmoire de Magister de ouargla 2012.

[2] Demailly J.P., (1991) , Analyse numérique et Équations différentielles, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, paris- 1999.

[4] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod. (1969).

[5] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.

[6] S.A. Messaoudi, Decay and gradient estimate for solutions of a semilinear heat equation, Arab journal of Math. Sciences vol. 9] 2 (2003), 1-7.

[7] S.A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl. 341, 2008, 1457-1467.

ملخص

في هذة المذكرة، المشكلة الرئيسية هي مشكلة القطع التي يحكمها المرونة اللزوجية . هذا العمل ينقسم إلى حالتين :
الجزء الأول ، مشكلة القطعي، يمكننا أن نذكر مشاكل موجات الاهتزاز التي تنتشر في وسط مرن، لقد درسنا نمذجة الأمواج، و وجود و وحدانية الحل .
الحالة الثانية، ندرس معادلة الامواج مع المرونة اللزوجية
في هذة الحالة ندرس ايضا وحدانية و وجود الحل، واستقرار وتناقص معدل الحل

الكالمات المفتاحية: معادلة الامواج، نظام المرونة اللزوجية، دالة لاسترخاء، التناقص العام.

Résumé

Dans cette mémoire, le problème principal est un problème hyperbolique gouverné par un terme viscoelastique.
Ce travail est divisé en deux cas : la première partie, un problème hyperbolique, on peut citer les problèmes d'ondes de vibration que se propagent dans un milieu élastique, nous avons étudié la modélisation d'onde, et l'existence l'uncité .
La deuxième partie qu'étudier l'équation d'onde avec un terme visco-élastique.
On peut étudier dans ce cas nous étudions aussi l'existence l'uncité de probléme, et la stabilité et du taux de décroissance de la solution.

Mots Clés : équation d'onte, le systéme viscoélastique, fonction de relaxation, décroissance génèrale.

Abstract

In this memory, the main problem is a hyperbolic problem governed by a viscoelastic term.
this work is divided into two cases: The first part, a hyperbolic problem, we can mention the problems of vibration waves propagated in an elastic medium, we have studied wave modeling, and existence the uncity .
The second part is studying the wave equation with a viscoelastic term.
We can study in this case we also study the existence of the problem, and the stability and decay rate of the solution

Keywords: wave equation, viscoelastic, relaxation function, general decay