جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل دالي

من إعداد الطالب : يحي بن عبدالكريم

الموضوع

بعض طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريدهولم والمعادلات التكاملية الشاذة

نوقشت يوم 2019/07/07 **من طرف لجنة المناقشة :**

الاستاذ :	عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الاستاذ :	محمد السعيد سعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الاستاذ :	عمارة قرفي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

اهداء

أهدي هذا العمل إلى التي لم تبخل علي طيلة حياتي بشيء،إلى أعزِّ شخص عليَّ، أمي حفظها الله.

وإلى أبي الذي طالما كان قدوة لي، أطال الله في عمريهما.

وإلى أخواتي وإخوتي حفظهم الله.

وإلى كل أخوالي و أعمامي عمّاتي.

وإلى كل مشايخي وأستاذتي الذين بفضلهم -بعد فضل الله- لم أكن لأصل إلى هنا.

وإلى أصدقائي الذين أحببتهم و أحبوني، وإلى من نسيهم قلمي ولم ينساهم قلبي.

يحيى بن عبد الكريم

شكر وعرفان

مصداقا لقوله تعالى:

<< وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِنْ كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ >>

سورة إبراهيم الآية 07 .

نحمد لله عز وجل الذي أنار لنا درب العلم والمعرفة وأعاننا على أداء هذا الواجب ووفقنا إلى انجاز هذا العمل المتواضع.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

<< مَنْ لَمْ يَشكُرِ النَّاس لَمْ يَشكُرِ الله >> رواه أحمد الترميذي.

نتوجه بجزيل الشكر والإمتنان إلى كل من ساعدنا، من قريب أو من بعيد، في إنجاز هذا العمل وفي تذليل ما واجهناه من صعوبات، ونخص بالذكر الأستاذ المشرف "د.عمار قرفي " الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته ونصائحه القيّمة التي كانت عونا لنا في إتمام هذه المذكرة، فجزاه الله عنا خير الجزاء.

كما لا يفوتنا أن نشكر أساتذتنا بقسم الرياضيات، وأعضاء اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذا العمل المتواضع.

الفهرس

مقدمــــــة

ان المعادلات التكاملية لفريد هولم نشأت عن العديد من تطبيقات العلوم وقد تبين أيضا أنه يمكن استخلاصها من مشاكل القيمة الحدية .اتم على افضل وجه عمله والنظرية الطيفية التي لعبت دورا اساسيا في حل بعض مالشاكل الفيزيائية عام,(1927).وكما ساهمت في نماذج الفيزياء الرياضية .مثل مشاكل التشتت والانتثار في مكانيكا الكم ورسم الخرائط المطابقة والامواج المائية في انشاء المعادلات التكاملية .ذلك أدى بالباحثين الى ايجاد طرق حل المعادلات التكاملية غير الخطية. لهذا خصصنا هذه المذكرة بعنوان: :طرق حل المعادلات التكامل-التفاضلية غير الخطية لفريد هولم والمعادلات التكاملية الشاذة

الفصل الاول : اشرنا الى معادلة فريد هولم غير الخطية من الصنف الاول و درسنا أنواع المعادلات التكاملية غير الخطية .واشكال المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية وتطرقنا لمسألة الوجود و الوحدانية لمعادلات فريد هولم التكاملية غير الخطية

الفصل الثاني: قمنا بدراسة المعادلات المتجانسة-وغير المتجانسة وبطريقتين وهذا بالنسبة لمعادلات التكامل-التفاضلية غير الخطية سوف نذكر ثلاثة طروق غير متجانسة طريقةالحساب المباشر وطريقة التكرار المتغير وطريقةحل على شكل سلسلة. ونذكر في المتجانسة طريقة الحساب المباشر.ودرسنا المعادلات الشاذة غير الخطية وطريقة تحويل لابلاس وطريقة تحليل ادوميان

الفصل الثالث : درسنا بعض طرق حل انطمة المعادلات التكاملية غير الخطية لفريد هولم و هما طريقة الحساب المباشر والطريقة التكرار المتغير.

الفصل الأول

معادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية من الصنف الأول

1.1 معادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية من الصنف الأول

تعريف 1.1.1.
لدراسة المعادلة التكاملية غير الخطية لفريد هولم من الصنف الاول . تكتب من الشكل (1.1)

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad (1.1))($$

المعادلة التكاملية (2.1) تحول إلى الخطية عندما نجري التحويل

$$F(u(t))=v(t)$$

لنجد :

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)v(t)dt \qquad (2.1))($$

وهي معادلة تكاملية خطية في v من الصنف الاول لحلها توظف إحدى طرق حل المعادلات التكاملية الخطية من الصنف الاول

1.1.1 طريقة التحويل الى الشكل النظامي

المعادلة تحول إلى معادلة من الصنف الثاني في v_u كما يلي

$$uv_u(x)=f(x)-\int_a^b K(x,t)v_u(t)dt \qquad (3.1))($$

$$u\neq 0\longrightarrow v_\mu(x)=\frac{1}{\mu}f(x)-\frac{1}{\mu}\int_a^b K(x,t)v_\mu(t)dt \qquad (4.1))($$

بحل هذه الاخيرة نحصل على $v_u(x)$ ثم بأخذ النهاية ل $v_u(x)$ لما u تؤول إلى الصفر نجد الحل v وبالرجوع للمجهول الاصلي نجد الحل u

2.1.1 طريقة التشويش المستمر

من خلال ما سنقدم لحل المعادلة نعتمد على المتتالية التراجعية ($v_n(x)$) و المعرفة كما يلي :

$$v(n) = \begin{cases} v_0(x) = 0, & v_1(x) = f(x) \\ v_{n+1}(x) = v_n(x), & \int_a^b K(x,t)v(nt) \end{cases} \qquad (5.1))($$

وهي متقاربة نحو الحل v تحت ظل الشروط الأولية

$$|1 - \int_a^b K(x,t)dt| < 1 \qquad (6.1))($$

و منه إيجاد v و بالرجوع للمجهول الأصلي نجد الحل المطلوب u

2.1 اشكال المعادلات التكاملية الخطية و غيرالخطية

معظم المعادلات الفيزيائية يمكن تصنيفها إلى تفاضلية كما يمكن تصنيفها إلى معادلات تكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية مشهورة . وسوف نذكر نوع المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية

تعريف 1.2.1.
نقول أن المعادلة التكاملية هي التي يكون فيها المجهول مع علامة التكامل

مثال :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, 0 = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

واذا كان x في أعلى التكامل عدد ثابت فهي معادلة فريد هولم

واذا كان x في أعلى التكامل مجهول فهي معادلة فولتيرا

حيث $\varphi(t)$ هي دالة المجهولة $K(x,t)$ و $f(x)$ دوال معلومة وقد تكون مركبة او حقيقية وذلك من قيم x و t

3.1 المعادلات التكاملية الخطية

تعريف 1.3.1.
هي المعادلات التكاملية الخطية و المحققة على الدوال المجهولة و تكون المعادلات التكاملية الخطية من الشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (7.1))($$

حيث
⋆ $K(x,t)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة وقد تكون متصلة او غير متصلة
⋆ λ ثابت يحمل معاني فيزيائية ⋆ الدالة $f(x)$ تمثل دالة السطح يعني حساب التكامل عليه ⋆ $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها
و المعادلة (7.1) خطية الان الدالة المجهولة هي من الدرجة الاولى

1.3.1 معادلة فوليترا التكاملية

تعريف 2.3.1.
تكون معادلة فوليترا التكاملية الخطية من الشكل

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (8.1))($$

وقد تكون من النمط الاول اذا كان $u = 0$
ومن النمط الثاني لما $u = c^{int} \neq 0$
ومن النمط الثالث لما يكون $u = u(x)$
وقد نشأت معادلة فوليترا من مسالة تفاضلية ذات شروط ابتدائية

2.3.1 معادلة فريد هولم التكاملية

تعريف 3.3.1.
ندرس معادلات فريد هولم التكاملية وتكون من الشكل التالي

$$u\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad ((9.1))($$

⋆ نجد في المعادلة (9.1) لما $u=0$ من الشكل

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad ((10.1))($$

فهي معادلة فريد هولم من النمط الاول

⋆ وقد نجد ان في المعادلة (9.1) لما $u=c^{int}\neq 0$ من الشكل

$$u\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad ((11.1))($$

ونقول ان معادلة فريد هولم من النمط الثاني

⋆ اذا كانت المعادلة تاخذ $u=1$ و $f(x)=0$ تصبح المعادلة (9.1) من الشكل

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad ((12.1))($$

وهي معادلة تكاملية متجانسة

⋆ وتكون من النمط الثالث لما تاخذ $u=u(x)$

4،1 المعادلات التكاملية غير الخطية

لدراسة عدة اشكال من المعادلات التكاملية غير الخطية

1،4،1 معادلة فريد هولم – فولتيرا التكاملية غير الخطية

تعريف 1،4،1.
نقول ان معادلة فريد هولم – فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الشكل

((13،1))(

$$uu(\bar{X},t) = \lambda \int_{\Omega} K(\bar{X}-\bar{\xi},\bar{y}-\bar{s}) f(t,u(\bar{\xi},\bar{s}) d\bar{\xi} d\bar{s} + \lambda \int_{0}^{t} G(t,T) u(\bar{x},\bar{y},\bar{T}) dT = f(\bar{x},\bar{y},\bar{T})$$

بحيث

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...x_n) \bar{t} = (t_1, t_2, t_3, ...t_n) \qquad ((14،1))($$

لدينا ω تعتمد على منحى التكامل

2،4،1 معادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية

تعريف 2،4،1.
تعريف :
نقول ان معادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t) F(u(t)) dt \qquad ((15،1))($$

وهي النوع الثاني وغير متجانسة
واذا كانت $f(x) = 0$ فهي متجانسة
أما $u(x) = 0$

معادلة التكاملية

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad (16.1))($$

هي معادلة فريد هولم غير الخطية من الصنف الاول

3.4.1 معادلة هامر يشتين التكاملية غير الخطية

تعريف 3.4.1.
نقول ان معادلة هامر يشتين غير الخطية من الشكل

$$uu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dtD \in R^n, n \in N^* \qquad (17.1))($$

وكما لها حالتين مختلفتين حالة اولى $u = 0$

$$u = 0 \longrightarrow f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)F(t,u(t))dt \qquad (18.1))($$

اذن هي معادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الاول
حالة ثانية $u = 1$

$$u = 1 \longrightarrow f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)F(t,u(t))dt \qquad (19.1))($$

اذن هي معادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني

5.1 مسألة الوجود و الوحدانية لمعادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية

ندرس في هذا الجزء ذكر شروط الوجود و الوحدانية لحل لمعادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية و التي من الشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b G(x,t,u(t))dt \qquad (20.1)$$

لاثبات وجود و وحدانية الحل للمعادلة (20.1) يكفي حل مسألة كوشي و التي تحقق الشروط التالية

1 - f(x) دالة محدودة على مجال $[a,b]$

أي $\exists M>0, \forall x\in[a,b]\longrightarrow |f(x)|<M$

2 - $G(x,t,u(t))$ دالة قابلة للمكاملة و محدودة من أجل كل $a\leqslant x,t\leqslant b$ أي

$\exists K>0, \forall x,t\in[a,b]\longrightarrow |G(x,t,u(t))|<K$

3- الدالة $G(x,t,u(t))$ تحقق شروط ليبشيتز بثابت ϵ

$|G(x,t,Z_1)-G(x,t,Z_2)|<\varepsilon|Z_1-Z_2|$ فإن (20.1) تقبل على الأقل حلا $u(x)$ في المجال $[a,b]$

الفصل الثاني

بعض طراق حل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم والمعادلات الشاذة

1.2 المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية من النوع الثاني

نبدا دراستنا حول المعادلات التكامل-التفاضلية غير الخطية من النوع الثاني والتي نكتب من الشكل

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad ((1.2))($$

حيث $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ و $F(u(x))$ هي الدول غير الخطية $u(x)$
مثال على الدلة غير خطية $u^2(x), sin(u(x))$ و لأن المعادلة (1.2) تجمع بين معامل التفاضل و معامل التكامل إذن من الضروري معرفة الشروط الأولية $u(0), u('0), ...u^{n-1}(0)$ من اجل تحديد الحل الخاص $u(x)$
من هذه المعادلة قمنا بتطبيق ثلاثة طرق مختلفة في حل هذه المعادلات نبدا بطريقة الحساب المباشر وطريقة التكرارالمتغيروطريقة حل السلاسل الصحيحة

1.1.2 طريقة الحساب المباشر

سنقدم طريقة الحساب المباشر على نطاق واسع بدون فقدان الشروط الأولية ونفترض نموذجا قياسا لمعادلة التكامل-التفاضلية المعطاة من الشكل
((2.2))(

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt, u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leqslant k \leqslant (n-1)$$

بحيث $u^{(n)}(x)$ مشتق n مرة ل$u(x)$ مع مرعاة x $F(u(t))$ هي دالة الغير الخطية ل $u(x)$و b_k الشروط الأولية
من المهم الان تطبيق هذه الطريقة على المعادلات التي تكون أنوايتها قابلة للفصل من الشكل

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) h_k(t) \qquad ((3.2))($$

نقوم بتعويض (3.2) في معادلة التكامل-تفاضلية غيرالخطية في (2.2) نجدان

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g_1(x)\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt + g_2(x)\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt + \cdots + g_n(x)\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \qquad (4.2)$$

نكامل الجانب الأيمن للمعادلة (4.2) الذي يعتمد على القيم ثابية من اجل التكامل t هذا يعني ان كل تكامل هو مكافئ للثابت فتصبح المعادلة

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x) \qquad (5.2)$$

بحيث

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)F(u(t))dt, 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (6.2)$$

باجراء التكامل لكلا الجانبين للمعادلة من اجل n مرة باستخدام الشروط الأولية

$$u(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2!}x^2u''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}u^{(n-1)} + L^{-1}(f(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)) \qquad (7.2)$$

حيث L^{-1} معامل التكامل نقوم بتعويض المعادلة (7.2) في المعادلة (6.2) يعطي نظاما من المعادلات الجبرية التي يمكن حلها لتحديد الثوابت α_i بحيث $1 \leqslant i \leqslant n$ باستخدام القيم العددية التي يتم الحصول عليها ب α_i في المعادلة (5.2) الحل $u(x)$ المعادلة التكامل-التفاضلية غيرالخطية لفريد هولم يمكن إيجاد بسهولة

انه لمن المهم الإشارة اليه.الا انه قد تحصل على اكثر من قيمة واحدة من α_i بحيث $1 \leqslant i \leqslant n$ هذا طبيعي لان المعادلة هي غير خطية والحل $u(x)$ قد يكون وحيد للمشا كل غير الخطية وفي مايلي سنقدم مثال لتوضيح طريقة استخدام الحساب المباشر

مثال 1.1.2. حل المعادلة التكامل-تفاضلية غير الخطية باستخدام طريقة الحساب المباشر

$$u'(x)=1-\frac{17}{24}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xtu^2dt,u(0)=1$$
$$u'(x)=1-\frac{17}{24}x+\frac{1}{2}\alpha x,u(0)=1$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل :

$$u'(x)=1+\frac{12\alpha-17}{24}x,u(0)=1 \qquad ((8.2))($$

نكامل كلا جانبي المعادلة (8.2) من 0 إلى x و باستخدام الشروط الأولية

$$u(x)=x+\frac{12\alpha-17}{48}x^2+1$$

حيث :

$$\alpha=\int_0^1 tu^2(t)dt=\int_0^1 t(t+1+\frac{12\alpha-17}{48}t^2)^2dt$$
$$=\int_0^1 t[(t+1)^2+(\frac{12\alpha-17}{48}t^2)^2+2(t+1)\frac{12\alpha-17}{48}t^2]dt$$
$$=\int_0^1 [t[(t+1)^2+t^4\frac{144\alpha^2-408\alpha+289}{2304}+t^3\frac{24\alpha-34}{48}+t^2\frac{24\alpha-34}{48}]dt$$
$$=\int_0^1 [t[(t+1)^2+t^5\frac{144\alpha^2-408\alpha+289}{2304}+t^4\frac{24\alpha-34}{48}+t^3\frac{24\alpha-34}{48}]dt$$
$$=|\frac{1}{4}t^4|_0^1+\frac{1}{2}t^2|_0^1+\frac{2}{3}t^3|_0^1+\frac{1}{6}|t^6|_0^1\frac{144\alpha^2-408\alpha+289}{2304}+\frac{1}{5}|t^5|_0^1\frac{24\alpha-34}{48}+\frac{1}{4}|$$
$$=\frac{17}{12}+\frac{1}{6}\frac{144\alpha^2-408\alpha+289}{2304}+\frac{1}{5}\frac{24\alpha-34}{48}+\frac{1}{4}\frac{24\alpha-34}{48}$$
$$=\frac{-13924+19584+144\alpha^2-408+28901382.4\alpha-1958.4+1728\alpha-2448}{13824}$$
$$=144\alpha^2-11121.6\alpha+15466.6=0$$

$$\Delta=123689986.56-8908761.6=114781224.96$$

$$\sqrt{\Delta}=10713.6$$

$$\alpha_1=\frac{1121.6-10713.6}{288}=\frac{408}{288}=1.4166$$
$$\alpha_2=\frac{1121.6+10713.6}{288}=\frac{21835.2}{288}=75.8166$$

و نتيجة لذلك يتم إعطاء الحلول الدقيقة

$$u_1(x) = \frac{12\alpha - 17}{48}x^2 + x + 1$$
$$= \frac{12\frac{408}{288} - 17}{48}x^2 + x + 1$$
$$= \frac{17 - 17}{48}x^2 + x + 1 = x + 1$$
$$u_2(x) = \frac{98}{5}x^2 + x + 1$$

2.1.2 طريقة التكرار المتغير

تعالج هذه الطريقة المشاكل الخطية وغير الخطية بطريقة مباشرة على عكس طريقة التفكيك Adomian التي تعتمد على تحديد مكونات الحل بشكل الدقيق.طريقة التكرار المتغير تعطي تقارب متتالي بشكل سريع من الحل الدقيق اذا كان هذا الحل موجود بشكل نظامي ذو الرتبة i للمعادلة التكامل-التفاضلية غيرالخطية لفريد هولم هو كالتالي

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)F(u(t))dt \qquad ((9.2))$$

حيث $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ و $F(u(x))$ هي دالة غير الخطية $u(x)$ شروط الأولية ينبغي تكون محددة للوصول الى الحل الدقيق التصحيح الوظيفي للمعادلة التكامل-التفاضلية غيرالخطية هو

$$((10.2))$$
$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^1 \lambda(t)\left(u_n^{(i)}(t) - f(t) - \int_0^t K(t,r)F(\tilde{u}_n(r))dr\right)dt$$

لتطبيق هذه الطريقةبفعالية ينبغي اتباع خطوتين أساستين

1- انه مطلوب اولا تحديد λ مضاعف لاقرانج الذي يمكن تحديده على نحو امثل عن طريق التكامل بالتجزئة باستخدام تباين. مضاعف λ يمكن ان يكون ثابت او دالة

2- بعد تحديد λ ينبغي استخدام تكرار بدون تباين .لتحديد التقريب المتتالي $u_{n+1}(x), n \geqslant 0$ و $u(x)$

- التقريب الصفري يمكن ان يكون دالة اختيارية ومع ذلك يفضل ان نستخدام القيم

لتقريب الصفري اختياري u_0 وبالتالي يعطى الحل بشكل $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ سيتم توضيح هذا النموذج من خلال مثال

مثال 2.1.2. نستخدم طريقة تكرار المتغير لحل المعادلة التكامل-تفاضلية لفريد هولم غير الخطية

$$u'(x) = \sin x - \frac{\pi}{80} + \frac{1}{120}\int_0^{\pi} x u^2(t)dt, u(0) = 0$$

يتم إعطاء التصحيح الدالي لهذه المعادلة

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - \sin t + \frac{\pi}{80} - \frac{1}{120}\int_0^{\pi} t u_n^2 dr\right)dt$$

يمكن استخدام الشروط الاولية لتحديد $u_0(x) = u(0) = 0$ باستخدام هذا التحديد في التصحيح الدالي يعطي القيم التقريبية التالية

$$u_0(x) = 0$$
$$u_1(x) = 1 - \cos x + 0.02045x^2$$
$$u_2(x) = 1 - \cos x + 0.001188x^2$$
$$u_3(x) = 1 - \cos x + 0.000043x^2$$
$$u_4(x) = 1 - \cos x - 0.000001x^2$$

يعطي الحل الدقيق

$$u(x) = 1 - \cos x$$

3.1.2 طريقة الحل على شكل سلسلة

طريقة حل السلسلة تعتمد بدرجة أولى على سلسلة تايلور لداول تحليلية وتسمى دالة الحقيقة $u(x)$ دالة تحليلة اذا كان لديها مشتقة من جميع رتب بحيث يكتب الشكل العام لسلسلة تايلور بجوارالصفر $x = 0$ كمايلي

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad ((11.2))($$

طريقة سلسلة تايلور سيتم استخدامها في هذه الطريقة لحل المعادلات التكامل-تفاضلية

غير الخطية لفريد هولم من نوع الثاني سنفرض أن الحل $u(x)$ لمعادلة فريد هولم التكامل-التفاضلية غير الخطية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)F(u(t))dt, u^{(k)}(0) = k!a_k, 0 \leqslant k \leqslant (n-1) \tag{12.2}$$

هي معادلة تحليلة و لذلك يملك تايلور سلسلة من الشكل المعطى (11.2) حيث سيتم تحديد العوامل بشكل متكرر باستخدام الشروط الأولية بحيث

$$a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0) \tag{13.2}$$

المعاملات المتبقية a_k من المعادلة (11.2) سيتم تحديدها بتطبيق طريقة المعادلة التكامل-التفاضلية لفريد هولم (12.2)

- بتعويض المعادلة (11.2) في كلا الجانبين للمعادلة (12.2) يعطي المعادلةالتالية

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^1 K(x,t)F\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)dt \tag{14.2}$$

حيث $T(f(x))$ هي سلسلة تايلور ل $f(x)$ المعادلة التكامل-تفاضلية سيتم تحويلها إلى تكامل تقليدي في المعادلة (14.2)

مثال 3.1.2.

حل المعادلة التكامل-تفاضلية غير الخطية باستخدام طريقة حل السلسلة

$$u'(x)=1+\frac{82}{45}x-\frac{1}{12}+\int_{-1}^{1}xtu^2(t)dt,u(0)=1$$

لدينا سلسلة

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

نستبدل $u(x)$ بسلسلة في المعادلة

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=T\left(1+\frac{82}{45}x\right)+\frac{1}{12}\int_{-1}^{1}\left((xt)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)^2\right)dt$$

لدينا $u(0)=a_0=1$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=a_1+2a_2x+....$$

$$\begin{aligned}
&=1+\frac{82}{45}x+\frac{1}{12}\int_{-1}^{1}xt\left(a_0+a_0t^2....\right)^2dt\\
&=1+\frac{82}{45}x+\frac{1}{12}x\int_{-1}^{1}t\left(a_0^2+a_1^2t^2+2a_0a_1t....\right)^2dt\\
&=1+\frac{82}{45}x+\frac{1}{12}x\int_{-1}^{1}t\left(a_0^2+a_1^2t^3+2a_0a_1t^2....\right)^2dt\\
&=1+\frac{82}{45}x+\frac{1}{12}x\left[\frac{2}{3}a_0a_1t^3\right]_{-1}^{1}\\
&=1+\frac{82}{45}x+\frac{1}{12}(a_0a_1)x
\end{aligned}$$

بمطابقة $a_1=1$

$$a_2=\frac{2952+180}{2*1620}=1$$

و منه

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_r = 0, \forall r \geqslant 0$$

و منه الحل الدقيق للمعادلة $u(x)$ هو

$$u(x) = 1 + x + x^2$$

4.1.2 المعادلات فريد هولم التكامل-تفاضلية غير الخطية المتجانسة

نضع $f(x) = 0$ في المعادلة التكامل غير خطية لفريد هولم

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad (15.2))($$

تصبح المعادلة التكامل-تفاضلية غير الخطية المنجانسة من الشكل الثاني

$$u^{(i)}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad (16.2))($$

حيث $F(u(t))$ هي دالة غير خطية في $u(t)$ و ينبغي تحديد الشروط الاولية لتحديد الحل الدقيق في هذا الموضوع ، تدرس على المعادلة المتجانسة لفريد هولم **(16.2)** لحالة محددة التي تكون فيها نواة $K(x,t)$ قابلة للفصل ، و الهدف من دراسة معادلات فريد هولم المتجانسة غير الخطية هو إيجاد حل غير بديهي ، فإن الطريقة تفكيك اودميان لا تنطبق على هذه الحالة لانها تعتمد أساسا على تعيين قيمة غير صفرية له $f(x) = 0$, $u(x)$ في هذا النوع من المعادلات يستعمل بشكل فعال طريقة الحساب المباشر

5.1.2 طريقة الحساب المباشر

يتم استخدام طريقة الحساب المباشر في هذا الموضوع حيث تحل هذه الطريقة محل معادلات فريد هولم التكاملية-التفاضلية غير الخطية المتجانسة من خلال معادلات جبرية بنظام معادلات جبرية أو اعتمادا على النواة المنفصلة $K(x,t)$

تعالج الطريقة الحسابية المباشرة المعادلات التكامل-تفاضلية لفريد هولم متجانسة أو غير متجانسة ، بطريقة مباشرة و تعطي الحل بشكل دقيق و ليس في شكل سلسلة

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t) \qquad (17.2)$$

يمكن تطبيق طريقة الحساب المباشر على النحو التالي

1 - نقوم بتعويض (18.2) في المعادلة التكامل-تفاضلية غير الخطية المتجانسة

$$u^{(i)}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)F(u(t))dt \qquad (18.2)$$

2 - تصبح من الشكل

(19.2)

$$u^{(i)}(x)=\lambda g_1(x)\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt+\lambda g_2(x)\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt+\dots$$

$$+\lambda g_n(x)\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt$$

3 - نكامل الجانب الأيمن بالإعتماد على المتغير t مع الحدود القصوى للتكامل t تكامل يساوي ثابت تصبح المعادلة (19.2)

$$u^{(i)}(x)=\lambda\alpha_1 g_1(x)+\lambda\alpha_2 g_2(x)+\cdots+\lambda\alpha_n g_n(x) \qquad (20.2)$$

حيث

$$\alpha_i=\int_a^b h_i(t)F(u(t))dt,\ 1\leqslant i\leqslant n \qquad (21.2)$$

4- نكامل كلا الجانبين من (20.2) مرات من 0 إلى x و نستخدم الشروط الأولية نحصل على $u(x)$

5- نستبدل الناتج $u(x)$ في (21.2) نظام المعادلات الجبرية التي يمكن حلها لتحديد الثوابت α_i بحيث

باستخدام القيم التي تم الحصول عليها من α_i إلى (20.2) الحل $u(x)$ المعادلة التكاملية-التفاضلية (15.2)

مثال 4،1،2. حل المعادلة المتجانسة غير الخطية للتكامل -التفاضلي باستخدام طريقة الحساب المباشر

$$u'(x)=\frac{1}{24}\lambda\int_0^1 x\left(1-u^2(t)\right)dt, u(0)=1$$

تتم كتابة هذه المعادلة على الشكل

$$u'(x)=\frac{1}{24}\lambda(1-\alpha)x, u(0)=1$$

حيث

$$\alpha=\int_0^1 u^2(t)dt$$

نكامل كلا من الجانبين من 0 إلى x و باستخدام الشروط الأولية نجد أن

$$u(x)=\frac{1}{48}\lambda(1-\alpha)x^2+1$$

لدينا

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^1 u^2(t)dt\\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{48}\lambda(1-\alpha)t^2+1\right)^2 dt\\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{2304}\lambda^2(1-\alpha)^2t^4+1+2*\frac{1}{48}\lambda(1-\alpha)t^2\right)dt\\
&= \frac{1}{5}*\frac{1}{2304}\lambda^2(1-\alpha)^2+1+\frac{2}{3}*\frac{1}{48}\lambda(1-\alpha)\\
&= \frac{1}{11520}\lambda^2(1-\alpha)^2+\frac{160\lambda}{11520}(1-\alpha)+\frac{11520}{11520}
\end{aligned}$$

$$\lambda^2(1-\alpha)^2+160\lambda(1-\alpha)+11520-11520\alpha=0$$

$$\lambda^2(1-\alpha)^2+160\lambda(1-\alpha)+11520(1-\alpha)=0$$

بقسمة على $(1-\alpha)$ نجد ان

$$\lambda^2(1-\alpha) = -(160\lambda + 11520)$$
$$\lambda^2 - \alpha\lambda^2 = -(160\lambda + 11520)$$
$$-\alpha\lambda^2 = -(160\lambda + 11520) - \lambda^2$$
$$\alpha = \frac{160\lambda + 11520}{\lambda^2} + 1$$

لدينا

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{48}\lambda(1-\alpha)x^2 + 1 \\ &= \frac{1}{48}\lambda\left(1 - \frac{160\lambda + 11520}{\lambda^2} - 1\right)x^2 + 1 \\ &= -\frac{10\lambda - 720}{3\lambda}x^2 + 1 \\ &= \frac{-10(\lambda + 72)}{3\lambda}x^2 + 1 \end{aligned}$$

ملاحظة $\lambda = 0$ هي نقطة وحيدة حل لهذه المعادلة

2.2 المعادلات الشاذة غير الخطية

تعريف 2.2.1.
تطبق معادلة آبل المتكاملة غير الخطية في العديد من المجالات العلمية مثل : علم الزلازل ، علم الفلك ، تشخيص البلازما والتصوير بالأشعة السينية و تعتبر أقدم مثال على معادلات التكاملية و هي نوعان

5 من النوع الأول

$$f(x)=\lambda\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)u(t)dt \qquad (22.2)) ($$

من النوع الثاني

$$u(x)=f(x)+\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)u(t)dt \qquad (23.2)) ($$

و تسمى شاذة إذا كانت 1 – أحد حدود التكامل $h(x)$ و $g(x)$ أو كلاهما غير محدود

$$f(x)=\lambda\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)v(t)dt \qquad (24.2)) ($$

2- إذ كانت $K(x,t)$ لا نهائية من نقطة واحدة أو أكثر من مجال التكامل ، فإنها بطريقة مماثلة تعتبر معادلات فولتيرا اللاخطية التكاملية من النوع الأول

$$f(x)=\lambda\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)F(u(t))dt \qquad (25.2)) ($$

أو من النوع الثاني

$$u(x)=f(x)+\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)F(u(t))dt \qquad (26.2)) ($$

حيث $F(u(t))$ دالة غير خطية ل $u(t)$
تسمى الشاذة إذا كان

1-أحد حدود التكامل $g(x), h(x)$ غير محدود

2- إذا أصبح $K(x,t)$ غير محدود عند نقطة واحدة أو أكثر من مجال التكامل

المعادلات التي سيتم التحقق فيها هي مشكلة آبل غير الخطية لا يمكن استخدامها للتعامل مع المعادلات التكاملية الشاذة خاصة إذا لم يكن $u(t)$ تحليليا

3.2 معادلة آبل غير الخطية

الشكل العام لمعادلة آبل غير الخطية هو

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} F(u(t))dt \qquad (27.2))($$

حيث تكون الدالة $f(x)$ دالة ذات قيمة حقيقية معلومة و $F(u(x))$ هي دالة غير خطية ل $u(x)$

نذكر ان الدالة غير الخطية $u(x)$ تحدث فقط داخل علامات تكاملية لمعادلة آبل التكاملية (27.2) لتحديد حل لمعادلة آبل نقوم أولا بتحويلها إلى معادلة آبل الخطية من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} v(t)dt \qquad (28.2))($$

باستخدام التحويل

$$v(x) = F(u(x))$$

حيث تكون $F(u(x))$ عكوسة ، $F^{-1}(u(x))$ موجود وهذا بدوره يعني ذلك

$$u(x) = F^{-1}(v(x))$$

4.2 طريقة تحويل لابلاس

طريقة تحويل لابلاس يمكن تعبير عنها بمعادلة آبل التكاملية

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)u(t)dt \qquad (29.2))($$

النظر في الدالتان $f_1(x)$ و $f_2(x)$ اللتان تملكان الشروط اللازمة للتحويل و بالتالي إمكانية حدوثه

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_1(x)\} &= F_1(s)\\ \mathscr{L}\{f_2(x)\} &= F_2(s)\end{aligned} \qquad (30.2)$$

يتم تحويل لابلاس لهاتين الدالتين بواسطة

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2)(x) &= \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\\ (f_2 * f_1)(x) &= \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt\end{aligned} \qquad (31.2)$$

يمكن أن يظهر بسهولة تحويل لابلاس

$$\mathscr{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = F_1(s)F_2(s) \qquad (32.2)$$

بناءا على هذا ندرس معادلة آبل المعممة التكاملية غير خطية

مثال 5،4،2. نستخدم طريقة تحويل لابلاس و نعبر عنها بمعادلة آبل التكاملية

$$\frac{6}{55}x^{\frac{5}{6}}(11+6x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}\sin^{-1}(u(t))dt$$

$$v(x)=\sin^{-1}(u(t)), u(x)=\sin(v(x))$$

$$\frac{6}{55}x^{\frac{5}{6}}(11+6x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}v(t)dt$$

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\frac{6}{55}^{\frac{5}{6}}(11+6t)}{(x-t)^{\frac{5}{6}}}dt=1+x$$

و منه الحل

$$u(x)=\sin(1+x)$$

5،2 معادلة آبل المعممة غير الخطية

إن معادلات آبل التكاملية غير الخطية من الشكل

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}F(u(t))dt, 0<\alpha<1 \qquad (33،2))($$

حيث $g(t)$ تزداد بشكل رتيبي و قابلة للإشتقاق عند بعض نقاط المجال $0<t<$ $b, g'(t)\neq 0$ لكل t من المجال

$F(u(t))$هي دالة غير خطية ل $u(t)$

نقوم أولا بتحويل هذا معادلة خطية آبل الى الشكل

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}v(t)dt, 0<\alpha<1 \qquad (34،2))($$

باستخدام التحويل

$$v(x)=F(u(x))$$

وهذا بدوره يعني

$$u(x) = F^{-1}(v(x))$$

يتم اعطاء الحل $u(x)$ في (34.2) من الشكل

$$v(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g'(t) f(t)}{[g(x) - g(t)]^{1-\alpha}} dt, 0 < \alpha < 1 \qquad (35.2)$$

مثال 6.5.2.

نستخدم طريقة آبل المعممة غير الخطية

$$\pi + x = \int_0^x \frac{\sin^{-1}(u(t))}{(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt$$

بحيث $0 < x < 2$

$$v(x) = \sin^{-1}(u(t)), u(x) = \sin(v(x))$$

تحويل المعادلة

$$\pi + x = \int_0^x \frac{v(t)}{(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt \qquad (36.2)$$

باستخدام التحويل

$$v(x) = x + 2$$

و منه

$$u(x) = \sin(x + 2) \qquad (37.2)$$

6.2 معادلات فولتيرا غير الخطية الشاذة

معادلات فولتيرا غير الخطية ذات الشاذة من النوع الثاني تكتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x - t}} F(u(t)) dt, x \in [0, T] \qquad (38.2)$$

و

(39.2)

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^\alpha} F(u(t))dt, 0 < \alpha < 1, x \in [0, T]$$

حيث β ثابت و $F(u(t))$ دالة غير خطية $u(t)$ تعرف المعادلة باسم فولتيرا غير الخطية الشاذة ، تنشأ هذه المعادلات في العديد من تطبيقات الفيزياء والكيمياء الرياضيات مثل علم التجسيم ، التوصيل الحراري و تندرج تحت فئة المعادلات غير الخطية المعممة الشاذة

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$$
$$K(x,t) = \frac{1}{[g(x)-g(t)]^\alpha}, 0 < \alpha < 1 \qquad (40.2)$$

7.2 طريقة تحليل ادوميان Adomian

سيتم تطبيق تحليل ادوميان Adomian على معادلة فولتيرا غير الخطية المعممة الشاذة حالة خاصة للمعادلة المعممة $\alpha = \frac{1}{2}, g(x) = x$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (41.2)$$

و

(42.2)

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

حيث A_n متعددة الحدود الادومينية للحصول على

(43.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right)dt, 0 < \alpha < 1$$

المكونات $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$

وعادة مايتم تحديد باستخدام علاقة تكرار

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x)\\
u_1(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}} A_0(t)\,dt\\
u_2(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}} A_1(t)\,dt\\
u_3(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}} A_2(t)\,dt
\end{aligned}
\qquad ((44.2))
$$

بعد تحديد $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \cdots$ سيتم تحديد الحل $u(x)$ في شكل سلسلة من الطبيعي ان نستخدام طريقة الضوضاء شروط ظاهرة أينما كان ذلك مناسبا للتحليل الادومي

الفصل الثالث

أنظمة المعادلة التكاملة والتكامل -تفاضلية غير خطية لفريد هولم

تعريف 1.0.3.
أنظمة التكاملية والتكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم من النوع الثاني

$$\begin{cases} u^{(i)}(x) = f_1(x) + \int_a^b \left(K_1(x,t)F_1(u(t)) + \tilde{K}_1(x,t)\tilde{F}_1(v(t))\right)dt \\ v^{(i)}(x) = f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)F_2(u(t)) + \tilde{K}_2(x,t)\tilde{F}_2(v(t))\right)dt \end{cases} \quad (1.3)$$

سيتم دراستها الدوال المجهولة $u(x)$ و $v(x)$ يتم إعطاء النواة $K_i(x,t)$ و $\dot{K}_i(x,t)$ في الغالب خارج علامة التكامل و الدالة F_i و $\tilde{F}_i$ ذات قيمة حقيقية و هي دوال غير خطية ل $u(x), v(x)$ على التوالي

- سبق و إن استخدمنا طريقتين تحليليتين لحل أنظمة معادلات التكاملية-تفاضلية هذه الطرق هي طريقة الحساب المباشر و طريقة تكرار المتغير و الطرق تعامل بشكل فعال مع أنظمة معادلات التكاملية-التفاضلية غير الخطية (1.3) نستعمل طريقة الحساب المباشر للتعامل مع الأنظمة المعادلة

1.0.3 طريقة الحساب المباشر

سيتم تطبيق طريقة الحساب المباشر لحل أنظمة معادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية من النوع الثاني معادلة فريد هولم بطريقة مباشرة و يعطى الحل في شكل دقيق و ليس في شكل سلسلة

$$\begin{cases} K_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t), \quad \tilde{K}_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_k(x)\tilde{h}_k(t) \\ K_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} r_k(x)s_k(t), \quad \tilde{K}_2(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x)\tilde{s}_k(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

1- نقوم بالاستبدال (2.3) في نظام المعادلات التكامل-تفاضلية فريد هولم (1.3) للحصول على

$$\begin{cases} u^{(i)}(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\int_a^b h_k(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_k(x)\int_a^b \tilde{h}_k(t)u(t)dt \\ v^{(i)}(x) = f_2(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x)\int_a^b s_k(t)v(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x)\int_a^b \overline{z}_k(t)v(t)dt \end{cases} \quad (3.3)$$

2- تكامل الجانب الأيمن الذي يعتمد على المتغير t مع حدود ثابتة من التكامل t و هذا يعني أن المعادلة (3.3) تصبح من الشكل

(4.3)) (

$$u^{(i)}(x)=f_1(x)+\alpha_1 g_1(x)+\cdots+\alpha_n g_n(x)+\beta_1\tilde{g}_1(x)+\cdots+\beta_n\tilde{g}_n(x)$$
$$v^{(i)}(x)=f_2(x)+\gamma_1 r_1(x)+\cdots+\gamma_n r_n(x)+\delta_1\tilde{r}_1(x)+\cdots+\delta_n\tilde{r}_n(x)$$

بحيث

(5.3)) (

$$\alpha_i=\int_a^b h_i(t)u(t)dt, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \beta_i=\int_a^b \tilde{h}_i(t)v(t)dt, 1\leqslant i\leqslant n$$
$$\gamma_i=\int_a^b s_i(t)u(t)dt, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \delta_i=\int_a^b \tilde{s}_i(t)v(t)dt, 1\leqslant i\leqslant n$$

3- يعطي نظام المعادلات الجبرية التي يمكن حلها لتحديد الثوابت $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ و δ_i باستخدام القيم العددية التي تم الحصول عليها من هذه الثوابت الحلول $u(x)$ و $v(x)$ من النظام (5.3)

مثال 1.0.3. حل أنظمة المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم باستخدام طريقة الحساب المباشر

$$u'(x)=\cos x-x\sin x-\pi^3+\int_0^\pi 3\left(u^2(t)+v^2(t)\right)dt,\ u(0)=0$$
$$v'(x)=\sin x+x\cos x+\frac{\pi}{2}+\int_0^\pi \left(u^2(t)-v^2(t)\right)dt,\ v(0)=0$$

يمكن إعادة كتابة هذا النظام على الشكل

$$\begin{aligned} v'(x)&=\cos x-x\sin x+(3\alpha+3\beta-\pi^3)\\ v'(x)&=\sin x+x\cos x+\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\qquad (6.3))($$

$$\alpha=\int_0^\pi u^2(t)dt,\quad \beta=\int_0^\pi v^2(t)dt$$

نكامل كلا جانبي المعادلة (6.3) من 0 إلى x و باستخدام الشروط الأولية نحصل على

$$u(x)=\sin x-\sin x+x\cos x+(3\alpha+3\beta-\pi^3)x$$
$$v(x)=-\cos x+\cos x+x\sin x+\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$u(x)=\ x\cos x+(3\alpha+3\beta-\pi^3)x$$
$$v(x)=x\sin x+\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$\begin{cases}3\alpha+3\beta-\pi^3=0\\ 3\alpha-3\beta-\frac{3\pi}{2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}6\alpha=\frac{3\beta+2\pi^3}{2}\\ \alpha=\frac{3\beta+2\pi^3}{12}\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\alpha+3\beta-\pi^3=0\\ -3\alpha+3\beta+\frac{3\pi}{2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}6\alpha=\dfrac{2\pi^3-3}{2}\\ \beta=\dfrac{2\pi^3-3}{12}\end{cases}$$

ومنه حل المعادلة

$$(u,v)=(x\cos x,x\sin x)$$

2.0.3 طريقة تكرار المتغير

يتم استخدام طريقة المتغير للتعامل مع المعادلات التكامل-تفاضلية لفريد هولم و المعادلات التكاملية-التفاضلية غير الخطية تقاربات المتتالية بسرعة من الحل الدقيق إذا كان الحل الموجود ليس كما هو في طريقة تفكك أودميان ، تعالج طريقة التكرار المتغير المشاكل الخطية و غير الخطية بنفس الطريقة دون الحاجة إلى حدود أودميان

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x) &= f_1(x) + \int_a^b \left(K_1(x,t)F_1(u(t)) + \widetilde{K}_1(x,t)\widetilde{F}_1(v(t))\right)dt \\ v^{(i)}(x) &= f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)F_2(u(t)) + \widetilde{K}_2(x,t)\widetilde{F}_2(v(t))\right)dt \end{aligned} \quad (7.3))($$

بحيث

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(u_n^{(i)}(t) - f_1(t) - \Gamma_1(t)\right)dt \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(v_n^{(i)}(t) - f_2(t) - \Gamma_2(t)\right)dt \end{aligned} \quad (8.3))($$

تصبح

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \int_a^b \left(K_1(t,r)F_1(\tilde{u}_n(r)) + \widetilde{K}_1(t,r)\widetilde{F}_1(\tilde{v}_n(r))\right)dr \\ \Gamma_2 &= \int_a^b \left(K_2(t,r)F_2(\tilde{u}_n(r)) + \widetilde{K}_2(t,r)\widetilde{F}_2(\tilde{v}_n(r))\right)dr \end{aligned} \quad (9.3))($$

و المضاعف λ الذي يمكن تحديده على النحو الأمثل ينبغي استخدام صيغة التكرار لتحديد التقريب $u(x)$, $v(x)$ بحيث $n \geqslant 0$ و حل $u(x)$, $v(x)$ يمكن تحديد $u_0(x)$ و $v_0(x)$ باستخدام الشروط الأولية

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \quad (10.3))($$

و سيتم توضيح هذا بالمثال

مثال 2.0.3. استخدام طريقة تكرار المتغير لحل نظام معادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x - x\cos x - \frac{\pi^3}{576} + \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u^2(t) + v^2(t))dt, u(0) = 1 \\ v'(x) &= \cos x - x\sin x - \frac{\pi}{96} + \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u^2(t) - v^2(t))dt, v(0) = 0 \end{aligned}$$

يتم إعطاء تصحيحات لهذا النظام الدالي

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)-\int_0^x\left(u_n'(t)-\sin t-t\cos t+\frac{\pi^3}{576}-\frac{1}{24}\Gamma_1\right)dt$$
$$v_{n+1}(x)=v_n(x)-\int_0^x\left(v_n'(t)-\cos t+t\sin t+\frac{\pi}{96}-\frac{1}{24}\Gamma_2\right)dt$$

$$\Gamma_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u_n^2(r)+v_n^2(r)\right)dr$$
$$\Gamma_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u_n^2(r)-v_n^2(r)\right)dr$$

لدينا

$$u_0(x)=0,\quad v_0(x)=0$$
$$u_1(x)=u_0(x)-\int_0^x\left(u_0'(t)-\sin t-t\cos t-\frac{\pi^3}{576}+\frac{1}{24}\int_0^\pi\left(u_0^2(r)+v_0^2\right)\right)dt$$
$$=0-u_0(x)+u_0(0)-\cos x+\cos x+x\sin x+\frac{\pi^3}{576}+\frac{1}{24}\int_0^\pi\left(u_0^2(t)+v_0\right)dt$$

للحصول على التقريب التالي

$$=x\sin x$$

$$v_1(x)=v_0(x)-\int_0^x\left(v_0'(t)+\cos t-t\sin t+\frac{\pi}{96}-\frac{1}{24}\int_0^\pi\left(v_0^2(t)+v_0(t)^2\right)dt\right)dt$$
$$=0-vx+v_0(0)-\sin x+\sin x+x\cos x+\frac{\pi}{96}+\frac{1}{24}\int_0^\pi\left(u_0^2(t)+v_0(t)\right)dt$$

للحصول على التقريب التالي

$$=x\cos x$$

حل المعادلة

$$(u(x),v(x))=(x\sin x,x\cos x)$$

خـــــــــاتمة

تكمن أهمية محتوى هذا العمل في انها تمكننا من تحديد بعض طرق حل المعادلات التكاملية – تفاضلية غير الخطية من الصنف الاول والثاني وبعض الطرق لحها, وقدمنا اشكال المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية و تكمن اهميتها على العموم في المسائل الفيزيائية والتي تسمى بالعلاقات الطيفية .

ولذلك قمنا اولا بعرض موجز لبعض المعادلات التكاملية الشاذةغير الخطية طريقة لابلاس ومعادلات ابل المعممة غير الخطية و غير الخطية الشاذة ودراسة مفصلة حول المعادلات التكاملية والمعادلات التكامل – تفاضلية غير الخطية لفريد هولم من النمط الثاني وأنظمتها . معادلات فريد هولم لها تطبيقات في علم مكانيك الكم ورسم الخرائط المطابقة والامواج المائية في انشاء المعادلات التكاملية وعلم الفيزياء الرياضية لهذا تطرقنا لحل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم .

المراجع العلمية

المصادر باللغةالأجنبية:

[1] Abdul-majid wazwaz , Linear and non-linear integral equtions methods and application , sait xavier university chicago.USA (1927)

[2] G. Micula and P. Pavel, Differential and Integral Equations through Practical Problems and Exercises, Kluwer, Boston, (1992).

[3] H.T.Davis Introduction to nonlinear differential and integral equations , dover publication , New Y ourk , (1962).

[4] M. Masujima, Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, WileyVCH, Weinheim, (2005).

[5] R.K. Miller, Nonlinear Volterra Integral Equations, W. A. Benjamin, Menlo Park, CA, (1967).

[6] R.P. kanwal , linear integral equations, Brikhauser,boston , (1997).

الملخص

تكمن اهمية هذا العمل المتواضع في دراسة بعض طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية لفريد هولم من النمط الثاني و المعادلات الشاذة الغير خطية كما قمنا بدراسة طرق حل انظمة المعادلات التكامل -تفاضلية غير الخطية لفريد هولم

الكلمات المفتاحية

-المعادلات التكاملية
- التكامل-تفاضلية
- فريد هولم
- معادلات فولتيرا
-المعادلات التكاملية الشاذة

Absract:

The importance of this wark some methods of solving the integral equations and the non-lineau fredholm integro- differention in tow warys the fist and second. - Also we study the methods of solving the systems of integral equations and non – linear fredholm integro – differentiol in tow ways.

The keys words

Non-linear fredholm integral-equatian
Systeme of nonlinear fredholm integral-differentiol equation
Homogeneous nonlineare fredholm integral differential equation
Non-homogeneous nonlineare fredholm integral differential equation