UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Probabilités et Statistique

Par : ADMANE Asma

Thème

Types de Convergences de suite variable aléatoire

Soutenu publiquement le :09/ 07/ 2019

Devant le jury composé de :

Agti Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Boussad Abdelmalek	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Brahim Mansoul	M.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail :

A mon maître, mon guide, mon soutient, mon livre dans la grande école dans la vie. . . toi ; ma Mère. Au grand cœur rempli d'amour, de tendresse et de pardon. . . toi ; mon Père.

A mes chères ; grand-père et grands-mères.

A mes frères et mes sœurs.

Mes dédicaces s'adressent aussi à : Toute la famille Admane.

Tous mes amis
Surtout Radia – Hani

Sans oublier touts les professeurs soit du primaire, du moyen, du secondaire , et l'enseignement supérieur.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Nous voudrions remercier le professeur encadré Brahim Mansoul pour les orientations scientifiques précises; nos profonds remerciements pour les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION

La convergence de suites de variables aléatoires est un concept important de la théorie des probabilités utilisé notamment en statistique et dans l'étude des processus stochastiques.

Dans ce travail, nous présentons les différentes notions de convergence de variables aléatoires et leurs applications.

Le présent mémoire est structuré de la manière suivante :

Chapitre01 : expose un rappel sur des notions de probabilités à partir de la mesure et les fonction mesurables, donnant la définition d'un espace de probabilités ,une probabilité. Après nous avons introduit les notions essentielles de variable aléatoire à travers les deux types de variables aléatoire à savoir les variables discrètes et les variables absolument continues, nous définissons ensuite l'espérance et la variance ainsi que la fonction caractéristiques essentielle pour l'identification des lois ainsi que pour le problème de convergence en loi.

Chapitre02 : Nous avons étudiés les différentes notions de convergence des suites de variables aléatoires, comme on a donné les plus importants théorèmes concernant se sujet, citant : la loi des grands nombres, Inégalité de Markov, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, Théorème central limite.

Chapitre03 : présente les relations entre les différentes types de convergence d'une suite de variable aléatoire et les liens existant entre ces notions .

Chapitre04 : Dans ce chapitre nous donnons une application aux lois de probabilités classiques, nous étudions des exemples avec la démonstration et représentation graphique.

A la fin, une conclusion générale pour une synthèse de ce travail.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

1.1 TRIBU OU σ-ALGÈBRE

Définition 1.1.1 *Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω est appelée une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω si elle :*

1 . $\varnothing \in \mathcal{A}$.

2 . Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

3 . Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω est appelé un espace mesurable .

Remarque 1.1.1 *On appelle tribu engendrée par A sur Ω et on note $\mathcal{A} = \sigma(A)$, c'est la plus petite tribu contenant A*

✓ *L'intersection des tribu c'est une tribu*

✓ *Par coutre d'union des tribu n'est pas une tribu*

Exemple 1.1.1 *La tribu triviale sur Ω est $\mathcal{A} = \{\Omega; \varnothing\}$*

- La tribu pleine : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

- La tribu engendrée par une partie A de Ω : $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$

1.2 MESURE

Définition 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* μ *de* $\mathcal{A}$ *dans [0,+∞] vérifiant les axiomes :*

1.$\mu(\varnothing) = 0$

2.σ*-additivité : pour toute suite* $(A_n)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ *,* $\forall i, j \in n$ *,* $A_i \cap A_j = \varnothing$

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *s'appelle un espace mesuré.*

1.2.1 Fonction mesurables

Définition 1.2.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A})$ *et* $(\Omega', \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables.*

$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{B})$ *est dite* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *mesurable si :*

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Ou :

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$$

1.3 PROBABILITÉ

Définition 1.3.1 *Soit* Ω *un ensemble des éléments d'expérience aléatoire .*

$\mathcal{A}$ *tribu , le couple* $(\Omega, \mathcal{A})$ *s'appelle espace probabilisable*

Définition 1.3.2 *Soit un espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *. On appelle probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *l'application* $P : \Omega \to [0, 1]$*, telle que :*

1 . $P(\Omega) = 1$ *.*

2 . $\forall A, B \in \Omega / A \cap B = \varnothing : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiété 1.3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espace de probabilité on a :*

1 . $P(\varnothing) = 0$

2 . $\forall A \in \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1$

3 . $\forall A, B \in \Omega$, $A \cap B \neq \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4 . *Si* $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

5 . $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1.3.1 Espaces de probabilité

Définition 1.3.3 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A})$ *un espace probabilisable, et soit* P *une mesure de probabilité sur* $(\Omega,\mathcal{A})$*. On dit alors que* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *est un espace probabilisé. Un espace de probabilisé est donc un cas particulier d'espace mesuré, pour lequel la masse totale de la mesure est égale à 1.*

✓ *Soit un événement* $A \in \mathcal{A}$ *est un sous-ensemble de* Ω *contenant toutes les éventualités* ω *pour lesquelles une certaine propriété est vérifiée ,* $P(A)$*représente la probabilité d'occurrence de l'événement* A*. Dans les premiers trait´es de théorie des probabilités, longtemps avant l'introduction de la théorie de la mesure, la probabilité* $P(A)$ *était définie de la manière suivante : on imagine qu'on répète l'expérience aléatoire un nombre* N *de fois, et on note* N_A *le nombre de répétitions pour lesquelles l'événement* A *est réalisé alors, la proportion* $N_A \to \infty$ *converge quand* N_A/N *vers la probabilité* $P(A)$*.*

1.3.2 Variables aléatoires

Définition 1.3.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est une probabilité on dit une variable aléatoire* X *. tout fonction sur* Ω *dons* $\mathbb{R}$ *, telle que X est* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *- mesurable*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \to X(\omega)$$

Loi de la variable aléatoire

La loi de la variable aléatoire X est la mesure-image de P par X. C'est donc la mesure de probabilité sur (Ω ,$\mathcal{A}$) notée P_X, définie par

Si

$$\forall B \in \xi ; P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

En pratique on écrit plutôt :

$$P_X(B) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{B}) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B)$$

Remarque 1.3.1 *La loi d'une variable aléatoire dans la cas continue définit par la fonction f s'appelle fonction de un site , notée $f(x)$ tell que*

1) $f(x) \geqslant 0$

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

1.3.3 Fonctions de répartition

Définition 1.3.5 *On appelle fonction répartition de la variable aléatoire réelle X . la fonction notée $F_X(x)$ telle que*

$$\bullet F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \text{ , dans le cas continue}$$

$$\bullet F_X(x) = P(X \leq x) \text{ , dans le cas discrète}$$

1.3.4 Espérance

Définition 1.3.6 *L'espérance d'une variable aléatoire réelle X la valeur notée $E(X)$ telle que*

$$\bullet E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \text{ , } n \in \mathbb{N} \text{ , dans le cas discrète}$$

$$\bullet E(X) = \int_{\Omega} X dP_X = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx \text{ , dans le cas continue}$$

1.3.5 Variance

Définition 1.3.7 *La variance d'une variable aléatoire réelle X la valeur notée $Var(X)$ telle que*

$$\bullet V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Ex)^2 P(X_i) \text{ , dans le cas discrète}$$

$$\bullet V(X) = \int_{\mathbb{R}} (X - E(X))^2 f(x) dx \text{ , dans le cas continue}$$

1.3.6 Fonction Caractéristique

Définition 1.3.8 *Soit X une variable aléatoire réelle La fonction caractéristique de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall t \in \mathbb{R} \, , \, \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_R e^{itx} f(x)(dx)$$

1.4 Lois de Probabilité

1.4.1 Lois discrètes

1 . Loi de Uniforme

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire équiprobables . Si n est le nombre valeurs différentes prises

$$\forall i \in \mathbb{N} \, , \, P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{, si } x_i = 1, ..., n \\ 0 & \text{, sinon .} \end{cases}$$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi uniforme discrète par :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

La variance de la loi uniforme discrète par : $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

. La fonction répartition :

$$F_X(x) = (\frac{x}{n}) 1_{[0,n]}(x) + 1_{]n,\infty[}(x)$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it}}{n}\left(\frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}}\right)$$

2 . Loi de Bernoulli

La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X , $0 \leq p \leq 1$telle que :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p\,;\text{ si } x_i = 1 \\ q\,;\text{ si } x_i = 0 \end{cases}$$

avec p+q=1

est appelée loi de Bernoulli notée $\mathcal{B}(p)$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi bernoulli $E(X) = \mu = p$

La variance de la loi bernoulli $V(X) = \sigma^2 = pq$

La fonction répartition

$$F_X(x) = (1-p)1_{[0,1[}(x) + 1_{[1,\infty[}x)$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

3 . Loi binomiale

La loi binomiale, de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq 1$, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X d'une répétition de n épreuves de Bernoulli ; notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, telle que :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} & ; \text{si } x_i = 0, 1, ...n \\ 0 & ; \text{sinon} \end{cases}$$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi binomiale $E(X) = \mu = np$
La variance de la loi binomiale $V(X) = \sigma^2 = npq$

. La fonction répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{x} C_k^n p^x (1-p)^{n-x} & ; \text{si } x = 0, 1, ...n \\ 0 & ; \text{sinon} \end{cases}$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

4 . Loi de Poisson

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ $(\lambda > 0)$ si les réels p_{x_i} sont donnés par

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

on note :$X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi poisson $E(X) = \mu = \lambda$
La variance de la loi poisson $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

. La fonction répartition

$$F_X(x) = \exp^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{x!}$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Loi géométrique ou loi de Pascal

Lorsque le nombre de succès n est égal à 1 la variable aléatoire discrète X porte le nom de loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p telle que :$P(X = x_i) = pq^{k-1}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi pascal $E(X) = \mu = \dfrac{1}{p}$
La variance de la loi pascal $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

. La fonction répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^x \,; \text{si } x = 1, 2, ..., n \\ 0 \qquad\qquad\quad ; \text{sinon} \end{cases}$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

1.4.2 Lois continues

1 . Loi Uniforme

La loi Uniforme est la loi exacte de phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi uniforme continue vaut : $E(X) = \frac{b+a}{2}$
La variance de la loi uniforme continue vaut : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

. La fonction répartition

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$$

2 . Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Une variable aléatoire absolument continue X suit une loi normale de paramètres (μ, σ) si sa densité de probabilité est donnée par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$Notation$: $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi normale vaut : $E(X) = \mu$
La variance de la loi normale vaut : $V(X) = \sigma^2$

. La fonction répartition

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

3 . La loi de gamma

Définition 1.4.1 *la fonction* Γ *est défini par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \,;\, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Un variable aléatoire X réelle positive suit un loi Gamma $\gamma(\alpha, \lambda)$ de paramètre α et λ positif ,si sa densité de probabilité est définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & ; x < 0 \\ 0 & \end{cases}$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi Gamma vaut : $\boldsymbol{E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}}$
La variance de la loi Gamma vaut : $\boldsymbol{V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}}$

. La fonction répartition

$$\boldsymbol{F_X(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp^{-\lambda t} t^{\alpha-1} 1_{]0,+\infty]}(t)dt}$$

. La fonction caractéristique

$$\boldsymbol{\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha}$$

4 . La loi de exponentielle

Un variable aléatoire X réelle positive suit un loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$ positif ,si sa densité de probabilité est définie par :$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}}$

. Espérance et Variance

L'espérance de la loi exponentielle vaut : $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$
La variance de la loi exponentielle vaut : $\boldsymbol{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$

. La fonction répartition

$$\boldsymbol{F_X(x) = \int_{\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}+}(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

. La fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

CHAPITRE 2

TYPE DE CONVERGENCE

On va étudier les différents types de convergence que l'on en probabilité

2.1 CONVERGENCE EN LOI

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires dans $\mathbb{R}$

Définition 2.1.1 *La suit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi si la suite de probabilités $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P_X .*
La signification de cette définition est la suivante : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi si , toute fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et borné ,

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$$

Théorème 2.1.1 *(théorème de continuité de Levy) Soit (X_n) une suit de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé de la fonctions caractéristiques φ_{X_n} et X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X . Si*

$$X_n \longrightarrow X \text{ en loi } \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\,,\, \varphi_{X_n}(t) = E[e^{itx_n}] \longrightarrow \varphi_X(t) = E[e^{itx}]$$

Proposition 2.1.2 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(\varphi_{X_n})_{n\geqslant 1}$ la suite des fonctions caractéristiques correspondantes. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

– $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers X un autre variables aléatoires , .

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \,,$$

Proposition 2.1.3 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles , h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X alors la suite $h(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire $h(X)$.*

Théorème 2.1.2 *Théorème de Slutsky*

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires , une variable aléatoire X et c , $\forall c \in \mathbb{R}$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Longrightarrow$

$$1) X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$$

$$2) X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Xc$$

$$3) X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X/c \,,\, c \neq 0$$

Exemple 2.1.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une variable aléatoire définie par $X_n = (-1)^n X$ converge vers X un autre variables aléatoires , en loi*

2.1.1 Théorème central limite

Site $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes , Posons $\mu = E(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$, alors.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

lorsque $n \to +\infty$ par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\, \lim_{n\to+\infty} P(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \leq x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.2 CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Définition 2.2.1 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suit variables aléatoires réelles définies sur espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X_n converge vers X un autre variables aléatoires , en probabilité si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2.2.1 Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire réelle g une fonction croissante et positive sur l'ensemble des réels, vérifiant .

Alors

$$\forall a > 0\,, \mathbb{P}(|Y| \geqslant a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(Y))}{g(a)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E(g(Y)) &= \int_\Omega g(y)f(y)dy = \int_{|Y|<a} g(y)f(y)dy + \int_{|Y|\geqslant a} g(y)f(y)dy \\ &\geqslant \int_{|Y|\geqslant a} g(y)f(y)dy \text{ car g est positive} \\ &\geqslant g(y)\int_{|Y|\geqslant a} f(y)dy \text{ car g est croissante} \\ &= g(a)P(|Y| \geqslant a) \end{aligned}$$

Donc

$$g(a)P(|Y| \geqslant a) \leq E(Y) \Longleftrightarrow P(|Y| \geqslant a) \leq \frac{E(g(Y))}{g(a)} \text{ , puisque } g(a) > 0.$$

■

2.2.2 l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X^2)$. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Preuve. On a $Y = |X - E(X)|$, $a = \varepsilon$ et $g(a) = \varepsilon^2$ dans l'inégalité de Markov ■

Théorème 2.2.1 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires sur le même espace de probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}?P)$ *admettant des espérances et des variances vérifiant*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(X_n) = l \text{ et } \lim_{n \longrightarrow \infty} V(X_n) = 0$$

alors les (X_n) *convergent en probabilité vers* l *.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $E(X_n) = l + u_n$ un avec $\lim u_n = 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon/2$$

et donc à partir du rang N ,

$$|X_n - E(X_n)| < \varepsilon/2 \Rightarrow |X_n - l| < \varepsilon \tag{2.1}$$

car $|X_n - l| = |X_n - E(X_n) + E(X_n) - l| \leq |X_n - E(X_n)| + |E(X_n) - l|$.
L'implication (2.2) peut être encore écrite sous la forme

$$|X_n - l| \geqslant \varepsilon \Rightarrow |X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon/2.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev ,

$$P(|X_n - l| \geqslant \varepsilon) \leq P(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon/2) \leq \frac{V(X_n)}{(\varepsilon/2)^2}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Conséquence : Pour que (X_n) converge en probabilité vers X , il suffit que $E(X_n - X) \to 0$ et $V(X_n - X) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (la démonstration passe par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev). ■

2.2.3 Loi faible des grands nombres

Théorème 2.2.2 *Soit* $(X_i)_{i \geqslant 1}$ *un suit variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité* (Ω, P) *, deux à deux indépendantes et de même loi telle que* $E(X_i) = \mu$ *et* $Var(X_i) = \sigma^2$ *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'énonce de la façon suivante , pour tout réel* $\varepsilon > 0$ *.La suit* $(S_n)_{n \geqslant 1}$ *définie tell que*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, ; n \in \mathbb{N}$$

Alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers l'espérance mathématique μ commune aux variables aléatoires X_i.

Preuve. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et telles que $E(X_n) = \mu$ et $Var(X_n) = \sigma^2 \; \forall n$. La suit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ où $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors on a :

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu \text{ et } Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Donc, d'après la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers μ.[1] ■

Proposition 2.2.2 *Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires , Supposons que $(X_n)_{n\geqslant 1}$, $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X et Y , respectueusement , alors*

$$1 X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X + Y$$

$$2 X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} XY$$

2.3 Convergence presque sûre

Définition 2.3.1 *La suit de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers X un autre variables aléatoires , en presque sûre*
Si $P(\Omega') = 1$

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega ; \lim_{n\to+\infty} X_n = X\} \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.1 *(Borel Cantelli)*
1 Soit $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'évènement telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$$

alors

$$P(\limsup_n A_n) = 0$$

1. D.M,Initiation au Calcul de Probabilité , Ecole Préparatoire en Sciences Economiques Commerciales et des Sciences de Gestion de Constantine ,Année Universitaire 2010/2011 , p104

2 Soit $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'évènement indépendants telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$$

alors

$$P(\limsup_n A_n) = 1$$

Théorème 2.3.1 *Soient X et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilité (Ω, P) et vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0\,, \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) < +\infty \tag{2.3}$$

Alors X_n converge presque sûrement vers X .

Preuve. On pose

$$A_n := \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}\,.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$ donc par le premier lemme de Borel Cantelli ,

$$P(\limsup_n A_n) = 0$$

Donc (2.3) la convergence presque sûre de X_n vers X. ■

2.3.1 Loi forte des grands nombres

Théorème 2.3.2 *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même espérance $\mathbb{E}[X]$ et intégrables $(\forall n \in \mathbb{N}\, \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty)$. Alors la moyenne empirique des X_n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X]$.*

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X]\right) = 1$$

2.4 Convergence en moyenne d'ordre p

Définition 2.4.1 *La suit de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers X un autre variables aléatoires , en moyenne l'ordre $p \geqslant 1$ si :*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

Remarque 2.4.1 *pour p=1 convergence en moyenne vers une variable aléatoire X , si :*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

On note $X_n \to X$ en moyenne .

pour p = 2 de convergence en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X , si :

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0.$$

On note $X_n \to X$ en moyenne quadratique.

Chapitre 3

Relations entre les différents types de convergence

3.1 Convergence d'ordre p et convergence en probabilité

Proposition 3.1.1 *Si X_n converge vers X en moyenne d'ordre p alors X_n converge vers X en probabilité*

Preuve. C'est une application directe de l'inégalité de Markov (2.2.1) pour les variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre p , $X \geqslant \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

On a $Y = |X_n - X|$, $a = \varepsilon$, $g(a) = \varepsilon^p$ ■

Proposition 3.1.2 *Si la suite de variables aléatoires X_n et converge en probabilité vers X un autre variables aléatoires , alors $X_n$converge au sens L^p vers X , pour tout $p \geqslant 1$ En particulier pour $p = 1$ on en déduit l'interversion limite espérance :*

$$\lim_{n \to +\infty} EX_n = EX$$

Remarque 3.1.1 *La réciproque est fausse : prendre* $X_n = 2^n 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ *On a convergence en probabilité mais pas dans* L^p *.*

3.2 Convergence presque-sûre et convergence en probabilité

Proposition 3.2.1 *Si* X_n *converge vers X en presque sûrement alors* X_n *converge vers* X *en probabilité*

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence presque sûre de X_n vers X signifie que l'événement équation (2.2) a pour probabilité 1.

$$\Omega'_\varepsilon := \{\omega \in \Omega ; \exists k_0 = k_0(\omega)\,, \forall n \geqslant k_0\,, |X_n - X| < \varepsilon\}$$

C'est bien un évènement (i.e.$\Omega'_\varepsilon \in \mathcal{F}$) puisqu'il s'écrit

$$\Omega'_\varepsilon := \{\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\geqslant k}|X_n - X| < \varepsilon\}\,.$$

De plus Ω'_ε contient Ω' , donc $P(\Omega'_\varepsilon) = 1$. Pour tout $k \geqslant 1$ notons

$$A_k := \{\omega \in \Omega ; \forall n \geqslant k\,, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n\geqslant k}\{|X_n - X| < \varepsilon\}\,.$$

La suit $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est clairement croissant pour l'inclusion et as réunion Ω'_ε par continuité séquentielle croissante de P, on a donc $P(A_k) \uparrow P(\Omega'_\varepsilon) = 1(k \longrightarrow +\infty)$, alors

$$\forall\delta > 0\,, \exists k_1\,, P(A_{k_1}) > 1 - \delta\,,$$

pour tout $n \geqslant k_1$, l'événement $\{|X_n - X| < \varepsilon\}$ contient A_k , d'où

$$\forall n \geqslant k_1 : P(|X_n - X| < \varepsilon) > 1 - \delta\,,$$

En passant à l'événement complémentaire , on obtient finalement :

$$\forall\delta > 0\,, \exists k_1 \in \mathbb{N}\,, \forall n \geqslant k_1 : P(|X_n - X| < \varepsilon) < \delta$$

Ceci établit la convergence vers 0 de $P(|X_n - X| < \varepsilon)$ comme ε était quelconque , on a bien convergence en probabilité de X_n vers X [1] ■

Remarque 3.2.1 *La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre.*

1. Suquet. Cour de Probabilité. Ch. 2004/2005 , p 226.

3.3 Convergence presque-sûre et convergence d'ordre p

Proposition 3.3.1 *La convergence en presque sûre n'implique pas la convergence d'ordre p*

Preuve. Contre-exemples : Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et n^2 avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$. Remarquons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{n\geqslant 1} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \sum_{n\geqslant 1} P(X_n = n^2) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A présent, le Théorème (2.3.1) permet de conclure que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0. D'un autre coté

$$E(|X_n - 0|) = E(X_n) = 1$$

Donc un suit ne peut pas converger vers 0 en moyenne. ■

3.4 Convergence en probabilité et convergence en loi

Proposition 3.4.1 *Si X_n converge vers X en probabilité alors X_n converge vers X en loi*

Preuve. Signalons que toutes les variable sont dé nies sur le même espace et montrons que φ_{X_n} converge vers φ_X pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq E[|e^{itX_n} - e^{itX}|] \leq E[\min(2, |t||X_n - X|)].$$

de sorte que, pour tout $\varepsilon > 0$, en écrivant $1 = 1_{[0,\varepsilon]}(|X_n - X|) + 1_{]\varepsilon,+\infty]}(|X_n - X|)$

$$|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq \varepsilon|t|P(|X_n - X| \leq \varepsilon) + 2P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon|t| + 2P(|X_n - X| > \varepsilon);$$

par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, $\limsup |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq \varepsilon|t|$.

Donc le résultat. ■

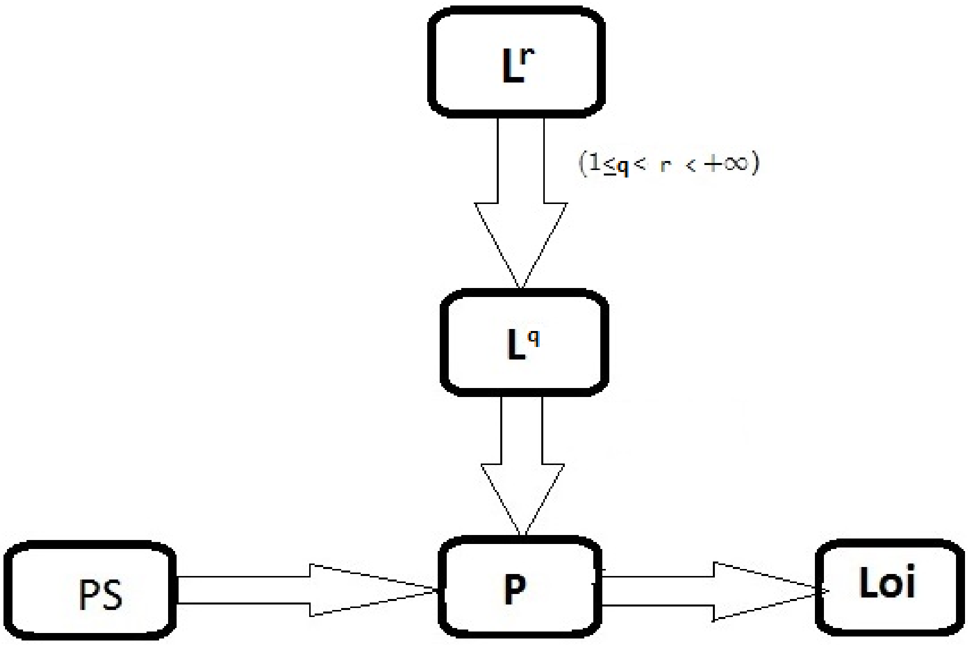

FIGURE 3.1 – Diagramme des convergences des suites de variable aléatoire.

CHAPITRE 4

SIMULATION

Dans ce chapitre on présente application aux lois de probabilités classiques, nous étudions des exemples avec la démonstration et représentation graphique.

4.1 CONVERGENCE DANS LE CAS DISCRÈTE

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des variables aléatoires de Bernoulli telles que :
$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$
La suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 en presque sûre . si :

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$$

Preuve. On a $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = P(\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N : |X_n - 0| < \varepsilon)$
Alors $\forall\varepsilon > 0, P(\exists N > 0, \forall n \geqslant N : |X_n - 0| < \varepsilon) = P(\cup_{N>0} \cap_{n\geqslant N} |X_n| < \varepsilon)$
On note par $A_n = \{\omega \in \Omega/|X_n(\omega| > \varepsilon)\}$. Alors $P(\cap_{N>0} \cup n \geqslant N) = P(\limsup_n A_n)$
En appliquant Lemme de Borel-Conteli si $\Sigma P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$
Alors il vient que $\Sigma P(A_n) = \Sigma P(X_n = 1) = \Sigma \frac{1}{n} < +\infty$

Donc $P(\limsup_n A_n) = 0$. Alors $P(\lim_n X_n \neq 0) = 0$, $P(\lim_n X_n = 0) = 1$ Donc X_n converge vers x en presque sûre ■

4.1.1 Représentation graphique

On pose 1. n=2 , 2. n=10 , n=100

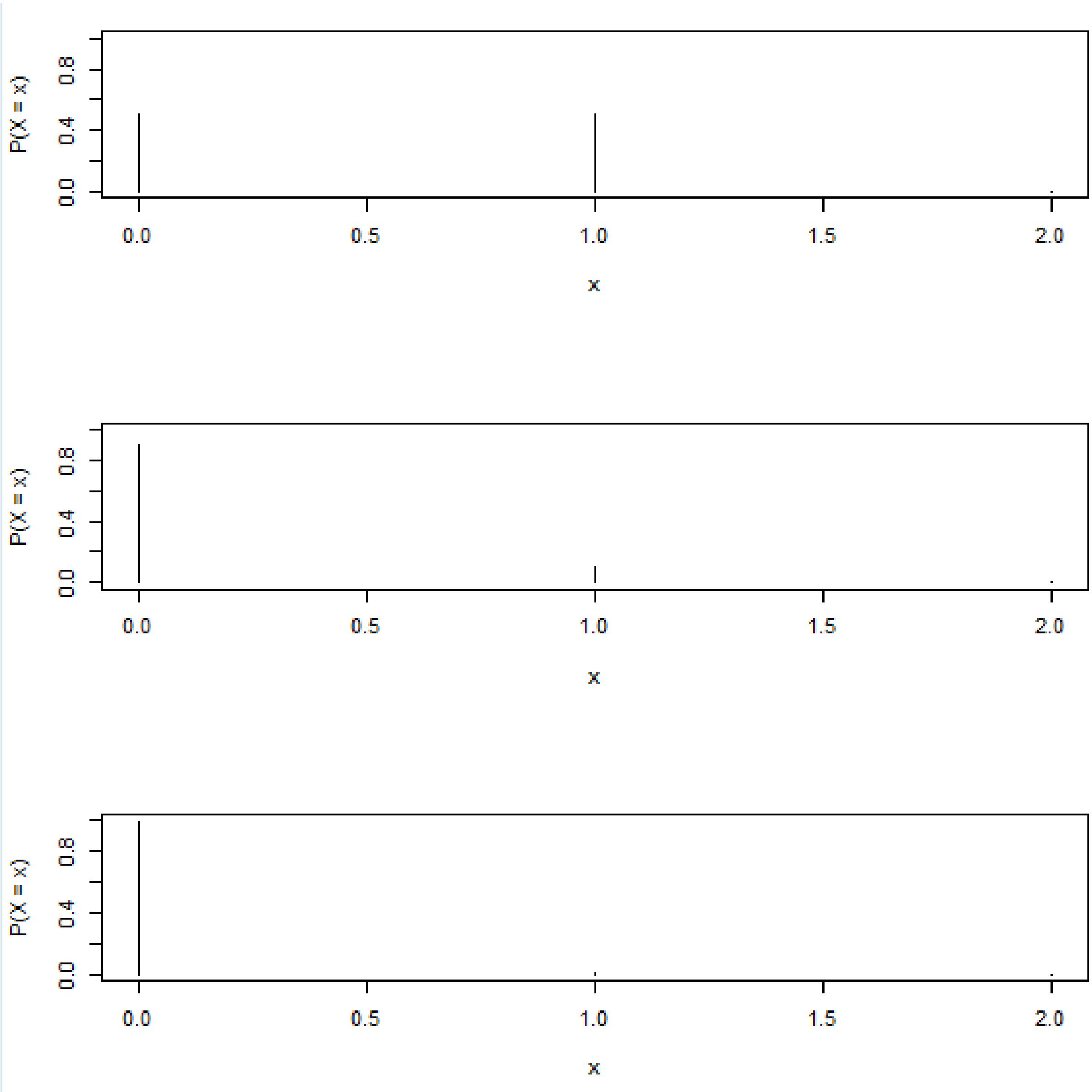

FIGURE 4.1 – Cas discrète

4.2 CONVERGENCE DANS LE CAS CONTINUE

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des variables aléatoires , la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = n^2 x e^{\frac{-n^2x^2}{2}} \text{ , } x \geqslant 1$$

Montrer que que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle (X=0).

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n \geqslant \varepsilon) \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n(x)dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} n^2 x e^{\frac{-n^2x^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{-n^2\varepsilon^2}{2}} \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-n^2\varepsilon^2}{2}} = 0$$

Donc $X_n \xrightarrow{P} X$. ■

4.2.1 Représentation graphique

On pose

Cas n=10 , Figure 1

Cas n=100 , Figure 2

cas n=1000 , Figure 3

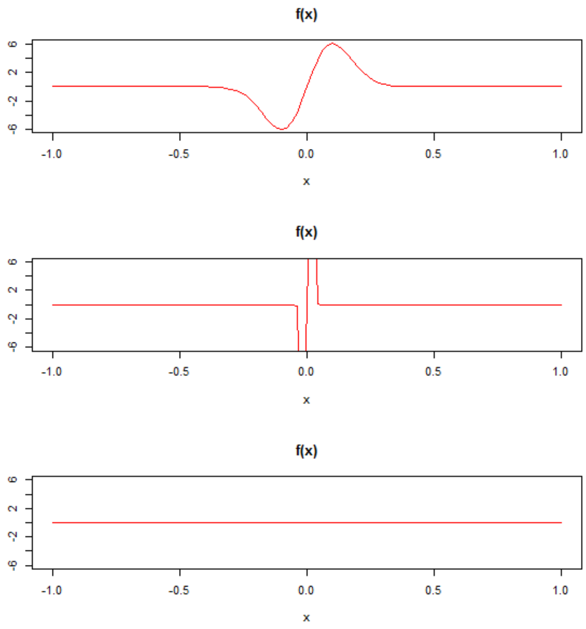

FIGURE 4.2 – Cas continue

4.3 CONVERGENCE DE $\mathcal{B}$ VERS $\mathcal{P}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ Alors, lorsque n tend vers l'infini , $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}}$ X , où X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
p_n(x) = P(X_n = x) &= C_n^x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(X) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^x}{x!} \exp^{-\lambda}$$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, X suit une loi de poisson de paramètre λ

4.3.1 Représentation graphique

On pose p=0.06 et λ=np

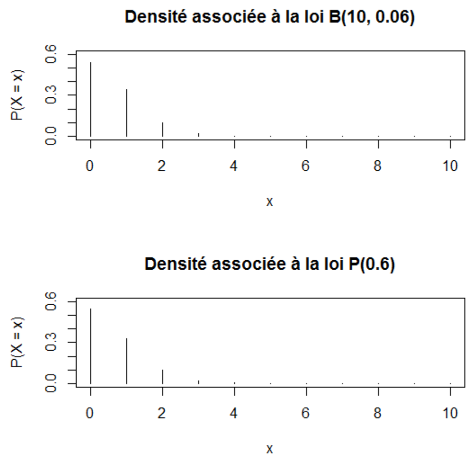

FIGURE 4.3 – Cas : n=10

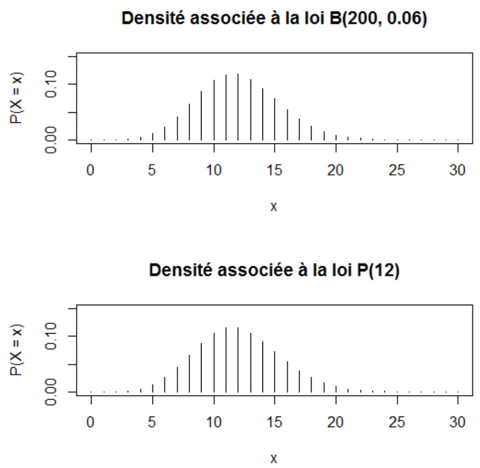

FIGURE 4.4 – Cas : n=200

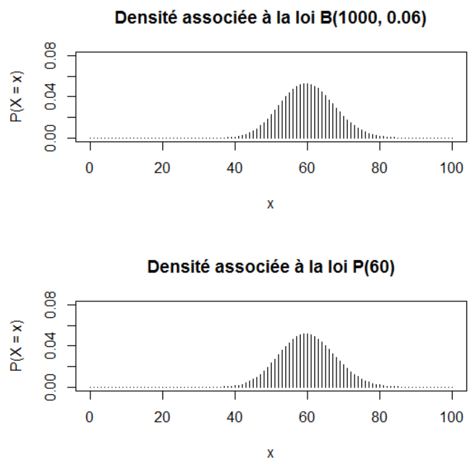

FIGURE 4.5 – Cas : n=1000

4.4 CONVERGENCE DE $\mathcal{B}$ VERS $\mathcal{N}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $(X_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{B}(n,p)$. Montrer alors que

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

X_n converge en loi vers $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$

Preuve. On rappelle que l'on a défini une variable de bernoulli comme une variable qui prends la valeur 1 avec la probabilité p, et la valeur 0 avec la probabilité $(1-p)$, et montré que sa moyenne est égale à p et sa variance à $p(1-p)$. Or on peut considérer une variable binomiale comme la somme de n variables de bernoulli . Il résulte du théorème central limite que, si n est su¢ suffisamment grand , la loi binomiale peut être approximée par une loi normale de moyenne np et de variance $np(1-p)$. Nous étudierons le cas pour différentes valeurs de n .[1] ■

4.4.1 Représentation graphique

On pose p=0.05

1. P.D , Cours de Statistiques inférentielles , Licence 2-S4 SI-MASS , Année 2015 , p15

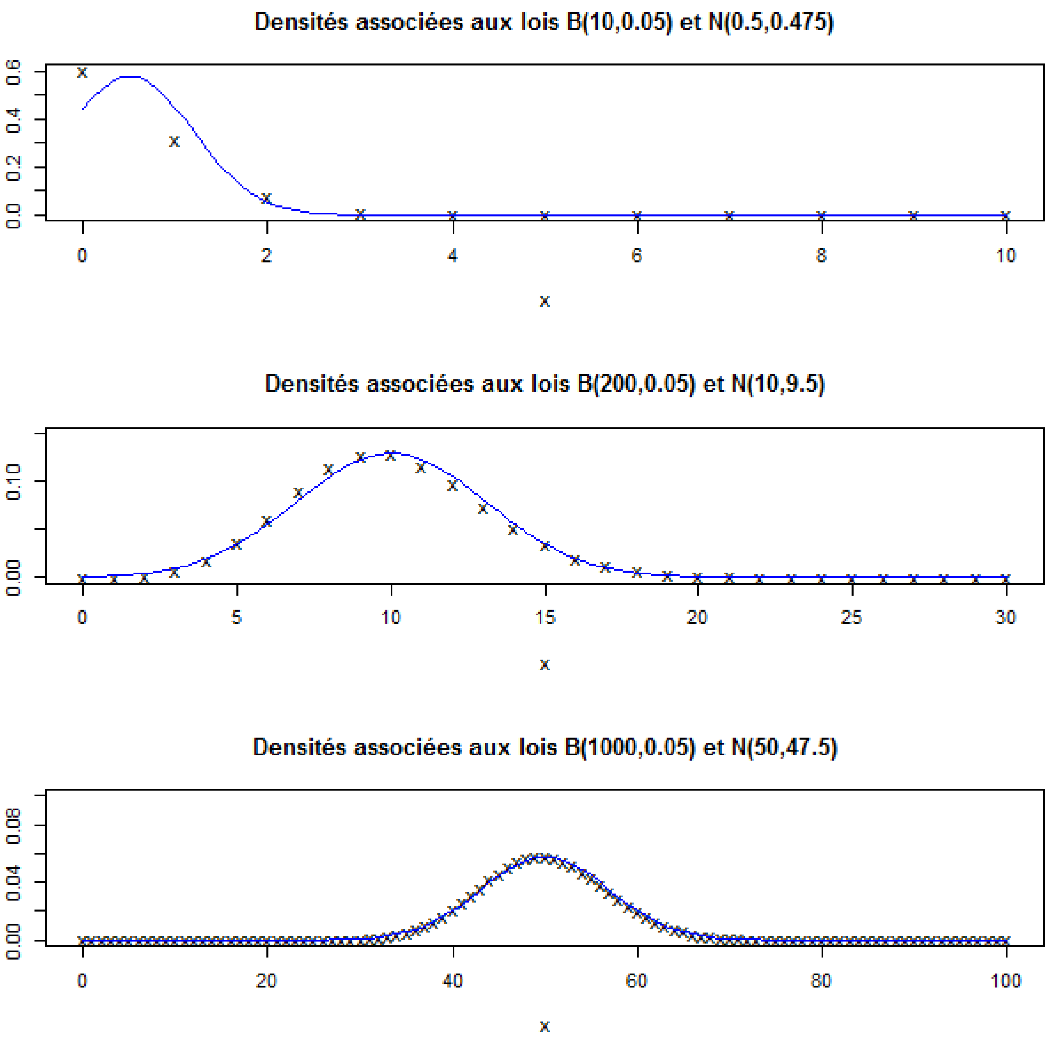

FIGURE 4.6 – Comparaison entre les deux lois B et N

4.5 Convergence de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{N}$

Théorème 4.5.1 *Soit* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *une variables aléatoires réelles de loi Poisson* $\mathcal{P}(\lambda_n) = \infty$ *. Si* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n =$ *Montrer que*

$$Y_n = \frac{X_n - \lambda_n}{\lambda_n}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$

Preuve. On utilise la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(\cos t + i \sin t - 1)}$$

En utilisant les propriétés de la fonction caractéristique
$\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at)$ et $\varphi_{X+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(t)$ il vient

$$\varphi_{X-\lambda}(t) = e^{-it\lambda}e^{\lambda(\cos t + i\sin t - 1)}$$

puis

$$\varphi_{\frac{X-\lambda}{\lambda}} = e^{\lambda(\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + i\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - 1)}e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}(-\lambda)}$$

Or, lorsque λ tend vers l'infini , $1/\lambda$ est au voisinage de 0 et

$$cos(t/\sqrt{\lambda}) \sim 1 - \frac{(t/\sqrt{\lambda})^2}{2} + \frac{1}{\lambda}\varepsilon(\lambda)$$
$$sin(t/\sqrt{\lambda}) \sim (t/\sqrt{\lambda})^2 + \frac{1}{\lambda}\varepsilon(\lambda)$$

avec $\lim \varepsilon(\lambda)_{\lambda\to\infty} = 0$. Ou encore le développent de l'exposant avec $1/\lambda$ au voisinage de 0 est

$$e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1 = \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(it)^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\varepsilon(\lambda)$$

Ainsi

$$\lambda(\cos(t/\sqrt{\lambda}) + i\sin(t/\sqrt{\lambda}) - 1) - i\sqrt{\lambda}t \sim -t^2/2$$

et

$$\varphi_{\frac{X-\lambda}{\lambda}} = e^{-t^2/2}$$

fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$ ■[2]

4.5.1 Représentation graphique

On pose p=0.25

2. Source précédente

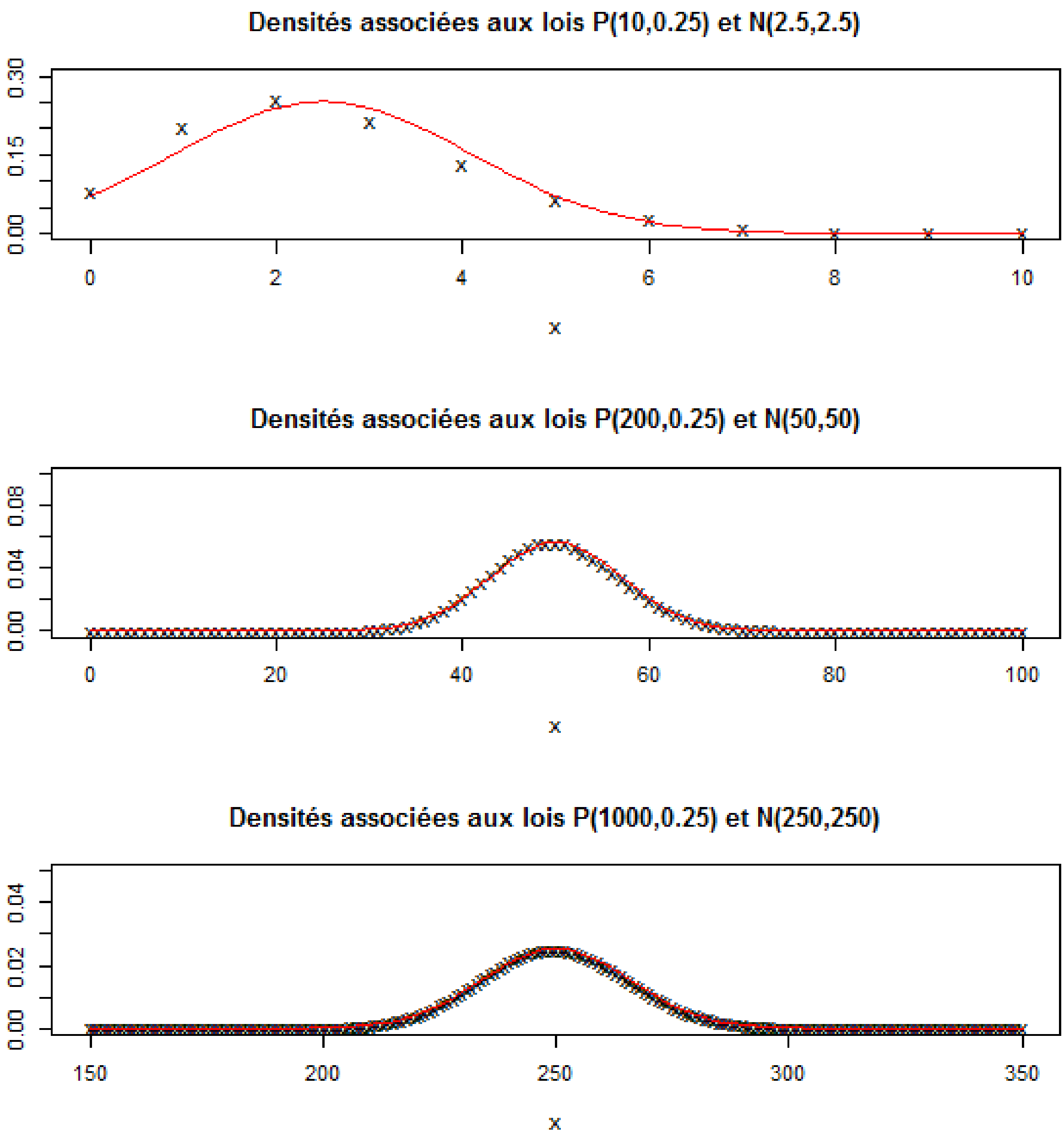

FIGURE 4.7 – Comparaison entre les deux lois P et N

CONCLUSION

Pendant la préparation de ce travail que nous nous sommes fixé, plusieurs questions qui se pose sur le but d'étudié la convergence des suites de variable aléatoire, malgré que nous avons exposé une étude plus théorique et ne se concentre pas sur cet aspect, le but réel de l'étude de la convergence est un concept très nécessaire pour :

• mesurer les erreurs associées aux estimateurs, d'en évaluer la précision et de déduire facilement la convergence en probabilité ; il s'agit de la convergence en Moyenne Quadratique.

• construire des tables de distribution pour les estimateurs et de réaliser des tests ; il s'agit de la convergence en Loi. Nous intéressons dans notre travail d'introduire les modes de convergence de suite de variable aléatoire et les relation qui relie l'une avec l'autre . On conclure que la convergence en loi est le plus faible parmi ces types puisque il étudie la convergence de loi de la variable aléatoire et non la convergence de la variable elle- même. Finalement nous avons donné une simulation numériques pour quelques exemples .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bruno Saussereau , Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs ,Année universitaire 2013-2014

[2] Meghlaoui Dakhmouche ,Initiation au Calcul de Probabilité , Ecole Préparatoire en Sciences Economiques Commerciales et des Sciences de Gestion de Constantine ,Année Universitaire 2010/2011

[3] Jean-François Le Gall ,Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires , Département Mathématiques et Applications , Ecole normale supérieure de Paris , Septembre 2006

[4] Charles.SUQUET , Initiation au Calcul de Probabilité , Université des Sciences et Technologies de Lille U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées Bât. M2, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex , 2003–2004

[5] Thérése Phan, Probabilités, Ecole Centrale deParis, 2004 – 2005

[6] Dominique.FOATA ET Aimé.FUCHS , Calcul des Probabilité , Cours exercices et problèmes corrigés , Paris , 1998

[7] Philippe Briand , Introduction au calcul des probabilités , http ://perso. univ-rennes 1. fr//. Rennes , Septembre 2003.

[8] Suquet , Cour de Probabilité , Ch , 2004/2005.

[9] Monique.Jeanblanc,Cours de Calcul stochastique , Master 2IF EVRY , Septembre 2006

[10] Pierre.DUSART , Cours de Statistiques inférentielles , Licence 2-S4 SI-MASS , Année 2015

[11] Alexis BIENVENÜE , Probabilités et Statistique , Année : 2001-2002 .

[12] Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin , MESURE, INTEGRATION, PROBABILITES , licence de mathématiques dans la plupart des universités françaises ,10 février 2016 .

[13] Ph. TASSI et S. LEGAIT , Théorie des probabilités en vue des applications statistiques , école notionole supérieure du pétrole et des moteurs

[14] Fakhreddine Boukhari , Probabilités , Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen ,République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ملخص

الغرض من هذا العمل هو التطرق إلى مفهوم مهم في ميدان الإحتمالات و الإحصاء و ميادين أخرى و هو أنواع التقارب لسلسلة متغير عشوائي ، مع إعطاء محاكاة عددية للأمثلة المدروسة .

الكلمات المفتاحية: القبيلة ، الفضاء الإحتمالي ، المتغير العشوائي ، قانون الإحتمالات ، المتتاليات ، التقارب.

Absract

The objective of this work proposes a mathematical concept that is important and applied in probability and statistics and also in other scientific fields, it is the different types of convergence of sequences of random variables with a numerical simulations for studied examples.

Key words : tribu, probability space, random variable, probability law, sequence, convergence.

Résumé

Le but de ce travaille de propose une notion mathématique qui soit important et appliquée dans la probabilité et la statistique et aussi dans des autres domaines scientifique , c’est les différentes types de convergence de suites de variables aléatoires avec une simulations numériques pour des exemples étudiés.

Mots clés : tribu, espace probabilisé, variable aléatoire, loi de probabilité, suite, convergence.