UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE MATIÈRE

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : azzouz ali

Thème

Résolution numérique d'un problème d'évolution d'ordre non entier

Soutenu publiquement le : 26/06/2019

Devant le jury composé de :

Dr. ASILA Mustafa	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Dr. GUERFI Amara	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID Mohamed Saïd	M.A Université KASDI Merbah-Ouargla	Rapporteur

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ des MATHEMATIQUES et des SCIENCES de la MATIERE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Modélisation et Analyse Fonctiennel**

Par

Ali Azzouz

Titre :

Résolution numérique d'un problème d'évolution d'ordre non entier

Membres du Comité d'Examen :

Mr.	Assila Mostafa	UKMO	Président
Mr.	Said Mohamad said	UKMO	Encadreur
Mr	Guerfi Amara	UKMO	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Ce travail est dédié à :

A la mémoire de mon Père et ma Mère.Rahmat elahi alihi.

Mes frères et sœurs.

Ma famille et mes amis.

Ali

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie ***Dieu Le Tout Puissant*** *qui m'a donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail.*

Mes sincères remerciements à

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Liste des figures **v**

Liste des tableaux **vi**

Introduction **1**

1 Rappel mathematique et introduction a la derivation d'ordre non entier **5**

1.1 Notations et Définition 5

1.2 Fonctions spéciales 5

1.2.1 La fonction Gamma 5

1.2.2 La fonction Béta 7

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler 9

1.3 Dérivées et Intégrales fractionnaires 10

1.3.1 Intégration fractionnaire 10

1.3.2 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo 12

1.3.3 Dérivation fractionnaire de Grünwald-Letnikov 12

2 Transformation de Laplace de derivée d'ordre fractionnaire 14

2.1 Transformation de laplace de deriveés d'ordre fractionnaire 14

2.1.1 Exemples sur la transformation de Laplace 15

2.1.2 Les propriétés de la transformée de Laplace 16

2.2 Dérivée d'ordre fractionnaire 18

2.2.1 La dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville 18

2.2.2 Les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov 20

2.2.3 La dérivée fractionnaires de Caputo 23

2.3 Tableau des transformation de laplace des deux fractionnaire 24

2.4 Transfére de fonction Mittag-Leffler avec deux coffition 24

2.5 Équations différentielles fractionnelles standard 26

2.5.1 Équations différentielles fractional linéaires ordinaires 26

3 Etude d'un problème d'evolution d'ordre fractionnel 29

3.1 Position de problème 29

Conclusion 41

Bibliographie 42

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujoud'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{éme} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul diérentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la neme dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spéci...quement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{éme} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1802-1829), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865), A.K. Grunwald (1867), A.V. Letnikov (1868), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L´evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924), A. Zygmund (1935) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seule-

ment un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B.Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commenté en 1968.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est la théorie des équations diérentielles fractionnaires qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel.

La modélisation mathématique des systèmes physiques conduit à des nombreuses équations diérentielles non linéaires, tel que l'équation de Klein-Gordon, équation de Duffing, ...etc. Par conséquent, nous devons être capable de résoudre les équations diférentielles dans l'espace et le temps, qui peuvent être fortement non linéaires.

La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, telle que les méthodes des éléments ...nis, des diférences finies et les méthode des volumes finis, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elles linéarisent souvent les équations.

Dans le début des années 1981, Adomian a présenté et développé une méthode de résolution des systèmes non-linéaires que l'on appelée la méthode de décomposition pour résoudre des problèmes linéaires ou non linéaires tels que les équations diérentielles ordinaires et partielles. La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) consiste à décomposer l'équation donnée en parties linéaires et des parties non linéaires. Elles consiste à recherché la solution sous la forme d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et à décomposer le terme non linéaire Nu sous la forme d'une série $Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$, les termes A_n sont appelés polynômes Adomian.

Durant ces dernières années, les équations diérentielles fractionnaires (FDE) ont trouvé des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme dans la plupart du

temps, ces équations ne peuvent être résolues exactement et les méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent ADM, la méthode des perturbations homotopique (HPM), ou la méthode des itérations du variationelles (VIM).

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux $19^{\text{éme}}$ siècle par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employannt non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre α. Les définitions les plus utilisées utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo.

L'intégrale fractionnaire d'ordre $p \in \mathbb{R}$ dans un intervalle $[0, T]$ de Riemann-Liouville est définie par :

$$I^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} f(\tau) d\tau$$

La dérivée fractionnaire d'ordre p sur $[0, t]$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$^{R}D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{(n-p)} f(t) \right)$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α sur $[0, t]$ au sens de Caputo est définie par :

$$^{C}D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)^{(n)} d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{(n-p)} f(t) \right) = I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)$$

avec $n = [p] + 1$, $[p]$ désigne la partie entière de p et $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$désigne la dérivée d'ordre n et Γ est la fonction Gamma.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux élément de base du calcul fractionnaire, on note citon par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta

Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié aux Riemann-Liouville et celle de Caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière et Transformation de Laplace.

Le dernier chapitre on va résoudre le problème.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\left(r\right)\frac{\partial u}{\partial r} - b\left(r\right)\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial r^{\alpha}} = f\left(t,r\right) \quad \text{dans } \sum = \Omega \times \left]0;T\right[\\ \qquad r \in \Omega = \left]r_0, R\right[,\ 0 < r_0,\ t \in \left]0,T\right[;\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Chapitre 1

Rappel mathematique et introduction a la derivation d'ordre non entier

1.1 Notations et Définition

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.2.1 *voir* ([3])

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, dt$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Propriété 1.2.1 *voir* ([*3*])

1. $\Gamma(n+1) = n!$
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \times .... \times x\Gamma(x)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$

Démostration 1 . 1. On a par définition :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt$$

On va appliqur une integration par partie (n) fois :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n! \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, dt \\ &= n! \left[-\exp(-t)\,|_0^{+\infty}\right] \\ &= n!\end{aligned}$$

2. Et on a :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t)\, dt$$

Appliquons aussi une intégration par partie :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} xt^{x-1} \exp(-t)\, dt - t^x \exp(-t)\,|_0^{+\infty} \\ &= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

3. D'aprés (2), on a :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\,\Gamma(x+(n-1))$$

c-à-d

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+(n-2))$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \times .... \times x\Gamma(x)$$

1.2.2 La fonction Béta

Définition 1.2.2 *voir* ([3])

Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\ .$$

Proposition 1.2.1 *voir* ([3])

$$\forall x, y > 0, \textit{on a } B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1}t_2^{y-1}\exp(-t_1)\exp(-t_2)\,dt_1dt_2\\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}\exp(-|t_1+t_2|)\,dt_2\right)dt_1\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$t_2^{'} = t_2 + t_1$$

on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \left(\int_{t_1}^{+\infty} \left(t_2^{'} - t_1\right)^{y-1} \exp\left(-t_2^{'}\right) dt_2^{'} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_2^{'}\right) dt_2^{'} \int_0^{t_1} \left(t_2^{'} - t_1\right)^{y-1} t_1^{x-1} dt_1\end{aligned}$$

Si on pose $t_1^{'} = \frac{t_1}{t_2^{'}}$, on arrive à

$$\begin{aligned}&= \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_2^{'}\right) dt_2^{'} \left(\int_0^{1} \left(t_1^{'} t_2^{'}\right)^{t_1} \left(t_2^{'} - t_1^{'} t_2^{'}\right)^{y-1} t_2^{'} dt_1^{'} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_2^{'}\right) dt_2^{'} \left(\left(t_2^{'}\right)^{x+y-1} B(x,y) \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(t_2^{'}\right)^{x+y-1} \exp\left(-t_2^{'}\right) dt_2^{'} B(x,y) \\ &= \Gamma(x+y) B(x,y)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré.

Propriété 1.2.2 *voir* ([*3*])

1. $B(a,b) = B(b,a)$
2. $aB(a,b+1) = B(a+1,b)$
3. Si $n = b+1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence

$$B(a,b) = \frac{n-1}{a} B(a+1, n-1)$$

4. $$B(a,1) = \frac{1}{a}$$

5. Si $a = m$ et $b = n$, on obtient

$$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffker est nommée d'aprés le mathématicien suédois qui la défini en 1903 cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, $\exp(x)$, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à un et à deux paramétres peuvent être définies en terme d'une dérie de puissance :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.1}$$

Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, on montre que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \tag{1.2}$$

De la définition (1.1), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z)$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, (\alpha>0, \beta>0) \\
E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)}, (\alpha>0, \beta>0) \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{zz^k}{\Gamma(\alpha(k)+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z\sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha(k)+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

1.3 Dérivées et Intégrales fractionnaires

1.3.1 Intégration fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)\,dt \\
I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)\,du \\
&= \int_a^x \left(\int_a^x f(t)\,dt\right) du \\
&= \int_a^x \int_t^x du f(t)\,dt \\
&= \int_a^x (x-t) f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Plus généralement la $n-ième$ itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \int_a^{x_3} dx_3 ... \int_a^{x_n} f(x_n)\, dx_n \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_\alpha^x (x-\tau)^{n-1} f(t)\, dt \quad n > 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Définition 1.3.1 *Soient α un réel positif et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fontion continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \quad x > \alpha$$

Théorème 1.3.1 *Pour $f \in C\,]a,b[$,l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) \quad pour\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.5}$$

Et satisfaite presque par tout sur [a,b] pour tout $f \in L^p(]a,b[)$

Démostration Soient $f \in L^p(]a,b[)$, et $\alpha > 0,\ \beta > 0$. On a par définition

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \left(I_a^\beta f\right)(\tau)\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-\lambda)^{\beta-1} f(\tau)\, d\lambda dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^\tau \int_\tau^\tau (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\lambda)^{\beta-1} dx f(\tau)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-\lambda)^{\alpha+\beta-1} f(\lambda)\, d\lambda \\ &= \left(I_a^{\alpha+\beta} f\right)(t) \end{aligned}$$

1.3.2 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interpré-tables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.3.2 ([1][10])*Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n-1 < \mathrm{Re}\,(\alpha) < n$ *et* $f \in C^n([a,b])$.
La dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de Caputo de la fonction* f *notée* ${}^cD_a^\alpha f$ *est définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f\,(x) &= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]m-1, m[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $m-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* m*, alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

1.3.3 Dérivation fractionnaire de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée (p) fois (si p est négatif) d'une fonction f

par la formule générale suivante :

$$ {}_aD_t^p f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=\grave{a}}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh) \quad avec \quad \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!} $$

qui représente la dérivée d'ordre entier p si $0 < p < n$ et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si $n < p < 0$ avec $nh = t - a$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$ et $(-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{-p(1-p)...(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$ on a donne :

$$ {}_a^G D_t^p f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh) $$

et

$$ {}_a^G D_t^{-p} f(x) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau $$

Si f est de classe C^n alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$ {}_a^G D_t^{-p} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau $$

et aussi :

$$ {}_a^G D_t^{p} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau $$

Chapitre 2

Transformation de Laplace de derivée d'ordre fractionnaire

2.1 Transformation de laplace de deriveés d'ordre fractionnaire

La transformation de Laplace d'une fonction f réelle et continue est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_{0}^{+\infty} f\left(t\right) \exp\left(-st\right) dt$$

ou le symbole $\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}$ veut dire la transformation de Laplace de $f(t)$ On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformation de Laplace :

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}$$

La transformée de Laplace peut être étudiée sous deux angles différents :

1. La transformée fonctionelle : Il s'agit de la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $\sin\left(wt\right)$, t, $\exp\left(-at\right)$...etc.
2. La transformée opérationnelle : Ici, on s'intéresse à la transformation de Laplace de

la dérivée, de la primitive... de $f(t)$.

2.1.1 Exemples sur la transformation de Laplace

(1) La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

Le dirac, s'il n'est pas physiquement réalisable (valeur infinie pendant un temps infiniment court) est utilisé pour décrire la réponse des systèmes dynamiques à des sollicitations très brèves. On peut approcher la fonction dirac par une fonction porte d'amplitude $T = 1$ sur un intervalle T. On considère donc la fonction :

$$d_0(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si} \quad t \in]0, T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $d_0(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{d_0(t)\} = \int_0^{+\infty} d_0(t) \exp(-st)\, dt = \int_0^T \frac{\exp(-pt)}{t} dt = \left[-\frac{1}{pt}\exp(-pt)\right]_0^T = \frac{\exp(-pT) - 1}{-pT}$$

Écrivons le développement en série de ce résultat :

$$\mathcal{L}\{d_0(t)\} = \frac{\exp(-pT) - 1}{-pT} = \frac{-1 + \sum_{k>0} \frac{(-pT)^k}{k!}}{-pT} = \sum_{k>1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{pT}{2} + \frac{p^2T^2}{6} - ...$$

La limite de cette somme lorsque $T \to 0$ donne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{T \to 0} \sum_{k>1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1$$

(2) La transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$ est définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{+\infty} H(t) \exp(-st)\, dt = \int_0^{+\infty} \exp(-st)\, dt = \left[-\frac{\exp(-pt)}{p}\right]_0^{+\infty}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de $\exp(-pt)$ est nulle. On a donc finalement :

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{p}$$

2.1.2 Les propriétés de la transformée de Laplace

1. **Les transformées fonctionnelles :** Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans cequi suit, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0^-$.

(a) La transformée de Laplace de la fonction sinus :

La fonction sinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(wt) = \frac{\exp(iwt) - \exp(-iwt)}{2i}$$

Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (\exp(iwt - pt) - \exp(-iwt - pt))\, dt$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de $\exp(-pt)$ est nulle.

Il vient donc :

$$\mathcal{L}\left\{\sin\left(wt\right)\right\} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{iw-p}+\frac{1}{iw+p}\right) = \frac{w}{w^2+p^2}$$

(b) La transformée de Laplace de la fonction cosinus :

La fonction cosinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes

$$\cos\left(wt\right) = \frac{\exp\left(iwt\right)+\exp\left(-iwt\right)}{2i}$$

Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos\left(wt\right)\right\} &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\exp\left(iwt-pt\right)+\exp\left(-iwt-pt\right)\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\exp\left(iwt-pt\right)}{iwt-pt}-\frac{\exp\left(-iwt-pt\right)}{iwt+pt}\right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de $\exp\left(-pt\right)$ est nulle.

Il vient donc :

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(wt\right)\right\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{iw-p}+\frac{1}{iw+p}\right) = \frac{p}{w^2+p^2}$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction sinus donne :

$$\frac{d\sin\left(wt\right)}{dt} = w\cos(wt)$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il vient :

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(wt\right)\right\} = \frac{1}{w}\left(p\mathcal{L}\left(\sin\left(wt\right)\right)-\sin\left(0\right)\right) = \frac{p}{w}\frac{w}{p^2+w^2} = \frac{p}{p^2+w^2}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

(c) La transformée de Laplace de l'exponentielle :

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \exp(-at)$ se calcule directement par :

$$\mathcal{L}\{\exp(-at)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-at - pt)\, dt = \left[-\frac{\exp(-(a+p)t)}{a+p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

2.2 Dérivée d'ordre fractionnaire

Il existe plusieures définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemmann-Liouville, Caputo ainsi que Grünwald-Letnikov qui sont plus utilisées.

2.2.1 La dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Définition 2.2.1 ***Théorème 2.2.1*** *Soit $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemenn-Liouville d'une fonction f est définie par :*

$$D^\alpha f(x) = D^n \left(I^{(n-\alpha)} f(x)\right)$$

Si vous supposez que :

$$\beta = n - \alpha \quad avec \quad 0 < \beta < 1$$

Donc je reçois ce qui suit :

$$D^\alpha f(x) = D^n \left(I^\beta f(x)\right)$$

Théorème 2.2.2 *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x).$$

Proposition 2.2.1 *Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n,\ m-1 \leq \beta \leq m$:*

1. Pour $f \in L^1([a,b])$, légalité :

$$D_a^{\alpha}\left(I_a^{\alpha} f(x)\right) = f(x)$$

   est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

2. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$, la relation :

$$D_a^{\beta}\left(D_a^{\alpha} f(x)\right) = D_a^{\alpha-\beta} f(x)$$

   est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

Exemple 2.2.1 *Fonction puissance*

Soit $n-1 < \alpha < n$. Considérons la fonction monome

$$f(x) = x^{\mu} \qquad \mu > 0$$

La dérivée d'ordre α de f est donnée par :

$$D^{\alpha} f(x) = D^n\left(I^{(n-\alpha)} x^{\mu}\right)$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= D^1\left(I^{(1-\alpha)} x^{\mu}\right) \\ &= D^1\left(I^{\beta} x^{\mu}\right), \ \textit{avec } \beta = 1-\alpha \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x^{\mu} &= D^{1}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)}x^{\mu+\beta}\right] \\ &= (\beta+\mu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\beta+\mu)\Gamma(\beta+\mu)}x^{\mu+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu)}x^{\mu+\beta-1} \end{aligned}$$

comme $\beta = 1-\alpha$, *on obtient alors :*

$$D^{\alpha}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1-\alpha+\mu)}x^{\mu-\alpha}$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} D^{1}x^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \mu x^{\mu-1} \\ &= \frac{d}{dx}x^{\mu} \end{aligned}$$

On remarque que la dérivée au sens de Riemann-Liouville fonction non identiquement nulle, peut étre nulle.

2.2.2 Les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

On sait que la dérivée d'une fonction f est définie comme :

$$D^{1}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On peut exprimer la dérivée d'ordre n d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f(x+(n-i)h)$$

On peut aussi écrire cette formule comme suit :

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} f(x-ih)$$

avec

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-i+1)}{i!}$$

On peut généraliser cette formule pour α non entier : $0 < n-1 < \alpha < n$.

Comme

$$\begin{aligned} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} &= \frac{-n(i-n)...(i-n-1)}{i!} \\ &= \frac{\Gamma(i-n)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-n)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-ih)$$

et

$$I^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha)} f(x-ih)$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant une intégration par parties on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^{i+\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt$$

et

$$D^{\alpha}f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)\left(x-a\right)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \tag{2.1}$$

Exemple 2.2.2 *Fonction puissance :*

Considérons la fonction

$$f(x)=x^{\beta}$$

De la définition (2.1)*, et Pour* $a=0$

$$D^{\alpha}f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(0\right)x^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}D^{n}t^{\beta}dt$$

On a :

$$f^{(i)}\left(0\right)=0,\ \ i=0,1,...,n-1$$

et

$$f^{(n)}(t)=D^{n}t^{\beta}=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}t^{\beta-n}$$

d'ou

$$D^{\alpha}x^{\beta}=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}t^{\beta-n}dt$$

En faisant le changement de variables

$$t=sx$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}x^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}x^{\beta-\alpha}\int_0^1(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}x^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\beta = 0$ on a :

$$D^{\alpha}x^{0} = D^{\alpha}1 = \frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha}$$

c'est-à-dire que la dérivée au sens de Grunwald-Letnikov d'une constante n'est pas forcément nulle.

2.2.3 La dérivée fractionnaires de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un role important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du probléme de cauchy sont exprimées par des dérivée d'ordre fractionnaire , Caputo propose une autre approche ou la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 2.2.2 *Soient $0 < n-1 < \alpha < n$ et f une fonction de classe $\mathbb{C}^n([a,b])$. La dérivée de Caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :*

$$D^{\alpha}f(x) = I^{(n-\alpha)}\left(D^{n}f(x)\right)$$

La définition de caputo peut etre écrite comme :

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx, \ (n-1 < \alpha < n) $$

La dérivée d'une fonction constante ($f(x) = b$) au sens de Caputo est nulle :

$$ {}_a^C D_t^\alpha b = 0 $$

2.3 Tableau des transformation de laplace des deux fractionnaire

$\mathbf{F}(s)$	$\mathbf{f}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s), t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(at)$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(\exp(at) - \exp(bt))$

2.4 Transfére de fonction Mittag-Leffler avec deux coffition

Apartir de la relation (1.2), la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ est la generalité de la fonction exponociale $\exp(z)$ c-à-d la fonction exponociale est une cas exponociale de la fonction

Mittag-Leffler.

On va donner une ideé de la méthode de la fonction Mittag-Leffler on utilisé la mesure entre la fonction et la fonction $\exp(z)$, pour obtenir la transformation de laplace de la fonction $t^k \exp(at)$ en nouvelle méthode (par traditionnelle).

On montre que :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t) \exp(\pm zt)\, dt = \frac{1}{1 \mp z};\ |z| < 1 \tag{2.2}$$

C'est vrai, en utilisant les séries de $\exp(z)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-t) \exp(\pm zt)\, dt &= \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\pm z)^k = \frac{1}{1 \mp z}\end{aligned}$$

on derive les deux cotté de la comparé (2.2) avec z. la résulte est :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^k \exp(\pm zt)\, dt = \frac{k!}{(1 \mp z)^{k+1}}, \quad |z| < 1 \tag{2.3}$$

Aprés des transfaires clairer, on obtenu la fonction : $t^k \exp(Iat)$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt)\, t^k \exp(\pm at)\, dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}},\ (\mathrm{Re}(p) > |a|).$$

On va consédérer maintenent la fonction Mittag-Leffler (1.1), le chongement (1.1) en integrale suivant, nous donné

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha)\, dt = \frac{1}{1-z}\ ,\ (|z| < 1). \tag{2.4}$$

Apartir de (2.4) on obtenu deux trensformation de laplace de la fonction

$t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm zt^{\alpha}\right),\ \left(E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(y\right)\equiv\frac{d^k}{dy^k}E_{\alpha,\beta}\left(y\right)\right):$

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-pt\right)t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm at^{\alpha}\right)dt=\frac{k!p^{\alpha-\beta}}{\left(p^{\alpha}\mp a\right)^{k+1}},\ \left(\mathrm{Re}\left(p\right)>\left|a\right|^{1/\alpha}\right). \tag{2.5}$$

Le cas spécial de (2.5) pour $\alpha=\beta=1/2$

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-pt\right)t^{\frac{k-1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}\left(\pm a\sqrt{t}\right)dt=\frac{k!}{\left(\sqrt{p}\mp a\right)^{k+1}},\ \left(\mathrm{Re}\left(p\right)>a^2\right)$$

est utile pour faire les fonction demi-différential en [153, 2.4]

2.5 Équations différentielles fractionnelles standard

les exemples suivants illustrent l'utilisation de (1,80) pour résoudre des équations différentielles fractionnées avec des coefficients constants. Dans ce chapitre, nous utilisons la formule classique pour la transformation Laplace de la dérivée fractionnaire

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-st\right){}_0D_t^{\alpha}f(t)dt=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left[{}_0D_t^{\alpha-k-1}f(t)\right]_{t=0} \tag{2.6}$$

$$(n-1<\alpha\leq n)$$

2.5.1 Équations différentielles fractional linéaires ordinaires

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de la solution des équattions différentielles linéaires ordinaires de l'ordre fractionnaire.

Exemple 2.5.1 *Une légère généralisation d'une équation résolue en*

$${}_0D_t^{1/2}f(t)+af(t)=0,\ (t>0)\qquad\left[{}_0D_t^{-1/2}f(t)\right]_{t=0}=C \tag{2.7}$$

L'application de la transformation Laplace que nous obtenons

$$F(s) = \frac{C}{s^{1/2} + a}, \qquad C = \left[{}_0D_t^{-1/2} f(t)\right]_{t=0}$$

et le trarisforme inverse à l'aide de (1.81) donne la solution de (2.7)

$$f(t) = Ct^{-1/2} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(-a\sqrt{t}\right) \tag{2.8}$$

Utilisation de l'extension de la série (1.1) *de* $E_{\alpha,\beta}(t)$ *, il est facile de vérifier que pour* $\alpha = 1$ *la solution* (2.8) *est identique à la solution*

$$f(t) = C(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \exp(t)\,\mathrm{erf}(\sqrt{t})), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt$$

obtenus d'une manière plus complexe.

Exemple 2.5.2 *Examinons l'équation suivante :*

$${}_0D_t^Q f(t) +_0 D_t^q f(t) = h(t) \tag{2.9}$$

qui (rencontre de très grandes difficultés sauf lorsque la difierence q - Q est entier ou demi-entier

Supposons que $0 < q < Q < 1$. *La transformation de l'équation Laplace* (2.9)

$$\left(s^Q + s^q\right) F(s) = C + H(s) \tag{2.10}$$

$$C = \left[{}_0D_t^{Q-1} f(t) +_0 D_t^{q-1} f(t)\right]_{t=0}$$

Et puis

$$F(s) = \frac{C + H(s)}{s^Q + s^q} = \frac{C + H(s)}{s^q\left(s^{Q-q} + 1\right)} = (C + H(s))\,\frac{s^{-q}}{s^{Q-q} + 1}$$

Après l'inversion avec l'aide de (1,80) pour $\alpha = Q-q$ et $B-Q$, nous obtenons la solution :

$$f(t) = CG(t) + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau$$
$$C = \left[{}_0D_t^{Q-1}f(t) +_0 D_t^{q-1}f(t)\right]_{t=0},\ G(t) = t^{Q-1}E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q}).$$

L'affaire $0 < q < Q < n$ (par exemple, l'équation obtainetl) peut être résolue de la même façon.

Exemple 2.5.3 *Examinons le problème de valeur initial suivant pour une équation différentielle fractionnée non homogène dans des conditions initiales non nulles :*

$${}_0D_t^{\alpha}y(t) - \lambda y(t) = h(t), \quad (t > 0)$$
$$\left[{}_0D_t^{\alpha-k}y(t)\right]_{t=0} = b_k,\ (k = 1, 2, ..., n)$$

où $n-1 < \alpha < n$.le problème (4.8) a été résolu par la méthode d'itération. Avec l'aide de la transformation Laplace et de la formule (1.80) nous obtenons la même solution directement et facilement.

En effet. en tenant compte des conditions initiales (4,9), la transformation Laplace de l'équation (4,8)

$$s^{\alpha}Y(s) - \lambda Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^{n} b_k s^{k-1}$$

à partir de laquelle

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^{\alpha} - \lambda} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

et l'inverse Laplace transformer en utilisant (1.80) donne la solution :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(\lambda t^{\alpha}\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda (t-\tau)^{\alpha}\right) h(\tau)\, d\tau$$

Chapitre 3

Etude d'un problème d'evolution d'ordre fractionnel

3.1 Position de problème

Dans le cas Stationnaire $u = u(r)$

Dans le probléme suivant

$$\begin{cases} a(r)\frac{\partial u}{\partial r} - b(r)\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial r^{\alpha}} = f(r) \quad \text{dans } \sum = \Omega \times]0;T[\\ r \in \Omega =]r_0, R[\,,\ 0 < r_0,\ ;\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

On cherche la solution de le problème (3.1) par mèthode suivant :

on note

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial r^{\alpha}} \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}$$

où

$g_0 = 1.$

$g_1 = -\alpha$

$g_2 = \alpha(\alpha - 1)$

$g_3 = -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\,2!$

$\vdots$

$g_m = (-1)^m g_{m-1}(m-1)!.m \in N$

on prend $a(r_i) = r_i, b(r_i) = r_i^2$

$$r_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{r_i^2}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m} = f_i \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&i = 1\ , r_1 \frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1 = f_1 \\
&i = 2\ ,\ r_2 \frac{u_3 - u_2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha}(g_0 u_2 + g_1 u_1) = f_2 \\
&i = 3\ ,\ r_3 \frac{u_4 - u_3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha}(g_0 u_3 + g_1 u_2 + g_2 u_1) = f_3 \\
&i = 4\ ,\ r_4 \frac{-u_4}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha}(g_0 u_4 + g_1 u_3 + g_2 u_2 + g_3 u_1) = f_4
\end{aligned}$$

On obtenue la matrice A dans la forme $AU = B$ est définie :

$$\begin{bmatrix} -\frac{r_1^2}{h^\alpha} - \frac{r_1}{h} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0 \\ -\alpha\frac{r_2^2}{h^\alpha} & -\frac{r_2^2}{h^\alpha} - \frac{r_2}{h} & \frac{r_2}{h} & 0 \\ -\alpha(\alpha-1)\frac{r_3^2}{h^\alpha} & -\alpha\frac{r_3^2}{h^\alpha} & -\frac{r_3^2}{h^\alpha} - \frac{r_3}{h} & \frac{r_3}{h} \\ 2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha(\alpha-1)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\frac{r_4^2}{h^\alpha} - \frac{r_4}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{òu } U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} -\frac{r_1^2}{h^\alpha} - \frac{r_1}{h} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0 \\ -\alpha\frac{r_2^2}{h^\alpha} & -\frac{r_2^2}{h^\alpha} - \frac{r_2}{h} & \frac{r_2}{h} & 0 \\ -\alpha(\alpha-1)\frac{r_3^2}{h^\alpha} & -\alpha\frac{r_3^2}{h^\alpha} & -\frac{r_3^2}{h^\alpha} - \frac{r_3}{h} & \frac{r_3}{h} \\ 2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha(\alpha-1)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\frac{r_4^2}{h^\alpha} - \frac{r_4}{h} \end{bmatrix}$$

La solution donne $U = A^{-1}B$

Supposons que $r_0 = 1; h = 0.5; r_i = r_0 + ih$; $\alpha = 0.1$si la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-9}{2^{2-\alpha}} - 3 & 3 & 0 & 0 \\ -4\alpha \times 2^{\alpha} & -4 \times 2^{\alpha} - 4 & 4 & 0 \\ -\frac{25}{2^{1-\alpha}}\alpha\left(\alpha - 1\right) & -\frac{25}{2^{2-\alpha}}\alpha & -\frac{25}{2^{2-\alpha}} - 5 & 5 \\ 9\alpha\left(\alpha - 1\right)\left(\alpha - 2\right)2^{\alpha+1} & -9\alpha\left(\alpha - 1\right) \times 2^{\alpha+1} & 9\alpha \times 2^{\alpha+1} & -9 \times 2^{\alpha+1} - 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5.41 & 3 & 0 & 0 \\ -0.43 & -8.29 & 4 & 0 \\ 1.21 & -0.67 & -11.70 & 5 \\ 3.30 & 1.74 & 1.93 & -7.93 \end{bmatrix}$$

On calcule A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.07 & -0.03 & -0.02 \\ -0.43 & -0.13 & -0.05 & -0.03 \\ -0.06 & -0.03 & -0.11 & -0.07 \\ -0.10 & -0.07 & -0.05 & -0.16 \end{bmatrix}$$

La solution donne $U = A^{-1}B$

$$\begin{cases} u_1 = -0.2f_1 - 0.07f_2 - 0.03f_3 - 0.02f_4 \\ u_2 = -0.02f_1 - 0.13f_2 - 0.05f_3 - 0.03f_4 \\ u_3 = -0.06f_1 - 0.03f_2 - 0.11f_3 - 0.07f_4 \\ u_4 = -0.1f_1 - 0.07f_2 - 0.05f_3 - 0.16f_4 \end{cases}$$

Dans le cas évolution $u = u\left(t, r\right)$

le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\left(r\right)\frac{\partial u}{\partial r} - b\left(r\right)\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial r^{\alpha}} = f\left(t, r\right) \quad \text{dans } \sum = \Omega \times]0, T[\quad T \text{ fini} \\ r \in \Omega =]r_0, R[\,,\ 0 < r_0,\ t \in]0, T[\,;\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Discretisation du problème (3.3) à l'instant n $(t = n)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t=n} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

On cherche la solution de le problème (3.3) par mèthode suivant :

on note

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}, \ \Delta t = k$$

on note

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h}$$

on note

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial r^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}^{n+1}$$

définie g_m

$g_0 = 1$

$g_1 = -\alpha$

$g_2 = \alpha(\alpha - 1)$

$g_3 = -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\, 2!$

$\vdots$

$g_m = (-1)^m g_{m-1} (m-1)!; m \in N$

l'approximation de $D_r^\alpha u$ et $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial t}$ s'ecrit le problème (3.3) sous la forme :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + a(r_i) \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} - \frac{b(r_i)}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}^{n+1} = f_i^{n+1} \tag{3.4}$$

pour

$$a(r_i) = r_i \ , \ b(r_i) = r_i^2 \text{ et } r_i = r_0 + ih$$

$$u\left(0,r\right)=\varphi_i$$

$$u\left(t,r_0\right)=0$$

$n=0$, $\frac{u_i^1-u_i^0}{k}+r\frac{u_{i+1}^1-u_i^1}{h}-\frac{r^2}{h^\alpha}\sum_{m=0}^{i}g_m u_{i-m}^1=f_i^1$

$i=1$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_1^1-\varphi_1}{k}+r_1\frac{u_2^1-u_1^1}{h}-\frac{r_1^2}{h^\alpha}g_0u_1^1=f_1^1$$

$i=2$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_2^1-\varphi_2}{k}+r_2\frac{u_3^1-u_2^1}{h}-\frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0u_2^1+g_1u_1^1\right)=f_2^1$$

$i=3$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_3^1-\varphi_3}{k}+r_3\frac{u_4^1-u_3^1}{h}-\frac{r_3^2}{h^\alpha}\left(g_0u_3^1+g_1u_2^1+g_2u_1^1\right)=f_3^1$$

$i=4$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_4^1-\varphi_4}{k}+r_4\frac{u_5^1-u_4^1}{h}-\frac{r_4^2}{h^\alpha}\left(g_0u_4^1+g_1u_3^1+g_2u_2^1+g_3u_1^1\right)=f_4^1$$

c-à-d :

$$\begin{aligned}
&i=1\ ,\ \frac{u_1^1}{k}+r_1\frac{u_2^1-u_1^1}{h}-\frac{r_1^2}{h^\alpha}g_0u_1^1=f_1^1+\frac{\varphi_1}{k}\\
&i=2\ ,\ \frac{u_2^1}{k}+r_2\frac{u_3^1-u_2^1}{h}-\frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0u_2^1+g_1u_1^1\right)=f_2^1+\frac{\varphi_2}{k}\\
&i=3\ ,\ \frac{u_3^1}{k}+r_3\frac{u_4^1-u_3^1}{h}-\frac{r_3^2}{h^\alpha}\left(g_0u_3^1+g_1u_2^1+g_2u_1^1\right)=f_3^1+\frac{\varphi_3}{k}\\
&i=4\ ,\ \frac{u_4^1}{k}-r_4\frac{u_4^1}{h}-\frac{r_4^2}{h^\alpha}\left(g_0u_4^1+g_1u_3^1+g_2u_2^1+g_3u_1^1\right)=f_4^1+\frac{\varphi_4}{k}
\end{aligned}$$

On obtenue la matrice A_1 dans la forme $A_1 U_i^1 = B_1$ est définie :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} - \frac{r_1}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{r_2}{h} & 0 \\ -\alpha(\alpha-1)\frac{r_3^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{r_3}{h} \\ 2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha(\alpha-1)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_4^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_4}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 + \frac{\varphi_1}{k} \\ f_2^1 + \frac{\varphi_2}{k} \\ f_3^1 + \frac{\varphi_3}{k} \\ f_4^1 + \frac{\varphi_4}{k} \end{bmatrix}$$

on prend $\alpha = 0.1, k = 1, r_0 = 1, h = 0.5$ donc :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4.41 & 3 & 0 & 0 \\ 0.43 & -7.29 & 4 & 0 \\ 0.60 & 0.67 & -10.7 & 5 \\ 3.3 & 0.87 & 0.96 & -14.65 \end{bmatrix}$$

On calcule A_1^{-1} :

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.11 & -0.04 & -0.01 \\ -0.04 & -0.16 & -0.06 & -0.02 \\ -0.05 & -0.03 & -0.11 & -0.04 \\ -0.06 & -0.04 & -0.02 & -0.08 \end{bmatrix}$$

La solution donne $U_i^1 = A_1^{-1} B_1$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1^1 = -0.25\,(f_1^1 + \varphi_1) - 0.11\,(f_2^1 + \varphi_2) - 0.04\left(f_3^1 + \frac{\varphi_3}{k}\right) - 0.01\left(f_4^1 + \frac{\varphi_4}{k}\right) \\ u_2^1 = -0.04\,(f_1^1 + \varphi_1) - 0.16\,(f_2^1 + \varphi_2) - 0.06\left(f_3^1 + \frac{\varphi_3}{k}\right) - 0.02\left(f_4^1 + \frac{\varphi_4}{k}\right) \\ u_3^1 = -0.05\,(f_1^1 + \varphi_1) - 0.03\,(f_2^1 + \varphi_2) - 0.11\left(f_3^1 + \frac{\varphi_3}{k}\right) - 0.04\left(f_4^1 + \frac{\varphi_4}{k}\right) \\ u_4^1 = -0.06\,(f_1^1 + \varphi_1) - 0.04\,(f_2^1 + \varphi_2) - 0.02\left(f_3^1 + \frac{\varphi_3}{k}\right) - 0.08\left(f_4^1 + \frac{\varphi_4}{k}\right) \end{cases}$$

$n = 1$, $\frac{u_i^2 - u_i^1}{k} + r\frac{u_{i+1}^2 - u_i^2}{h} - \frac{r^2}{h^\alpha}\sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}^2 = f_i^2$

$i = 1$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_1^2 - u_1^1}{k} + r_1\frac{u_2^2 - u_1^2}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1^2 = f_1^2$$

$i = 2$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_2^2 - u_2^1}{k} + r_2 \frac{u_3^2 - u_2^2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_2^2 + g_1 u_1^2 \right) = f_2^2$$

$i = 3$ le probléme (3.4) devient :

$$i = 3 \ , \ \frac{u_3^2 - u_3^1}{k} + r_3 \frac{u_4^2 - u_3^2}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_3^2 + g_1 u_2^2 + g_2 u_1^2 \right) = f_3^2$$

$i = 4$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_4^2 - u_4^1}{k} - r_4 \frac{u_4^2}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_4^2 + g_1 u_3^2 + g_2 u_2^2 + g_3 u_1^2 \right) = f_4^2$$

c-à-d :

$$\begin{aligned}
i = 1 \ , \ & \frac{u_1^2}{k} + r_1 \frac{u_2^2 - u_1^2}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1^2 = f_1^2 + \frac{u_1^1}{k} \\
i = 2 \ , \ & \frac{u_2^2}{k} + r_2 \frac{u_3^2 - u_2^2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_2^2 + g_1 u_1^2 \right) = f_2^2 + \frac{u_2^1}{k} \\
i = 3 \ , \ & \frac{u_3^2}{k} + r_3 \frac{u_4^2 - u_3^2}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_3^2 + g_1 u_2^2 + g_2 u_1^2 \right) = f_3^2 + \frac{u_3^1}{k} \\
i = 4 \ , \ & \frac{u_4^2}{k} - r_4 \frac{u_4^2}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_4^2 + g_1 u_3^2 + g_2 u_2^2 + g_3 u_1^2 \right) = f_4^2 + \frac{u_4^1}{k}
\end{aligned}$$

On obtenue la matrice A_1 dans la forme $A_1 U_i^2 = B_2$ est définie :

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{k} - \frac{r_1}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0 \\
\alpha \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{r_2}{h} & 0 \\
-\alpha (\alpha - 1) \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{r_3}{h} \\
2\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) \frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha (\alpha - 1) \frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_4^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_4}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1^2 + \frac{u_1^1}{k} \\ f_2^2 + \frac{u_2^1}{k} \\ f_3^2 + \frac{u_3^1}{k} \\ f_4^2 + \frac{u_4^1}{k} \end{bmatrix}$$

on prend $\alpha = 0.1, k = 1, r_0 = 1, h = 0.5$ donc :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4.41 & 3 & 0 & 0 \\ 0.43 & -7.29 & 4 & 0 \\ 0.60 & 0.67 & -10.7 & 5 \\ 3.3 & 0.87 & 0.96 & -14.65 \end{bmatrix}$$

On calcule A_1^{-1} :

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.11 & -0.04 & -0.01 \\ -0.04 & -0.16 & -0.06 & -0.02 \\ -0.05 & -0.03 & -0.11 & -0.04 \\ -0.06 & -0.04 & -0.02 & -0.08 \end{bmatrix}$$

La solution donne $U_i^2 = A_1^{-1} B_2$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1^2 = -0.25\,(f_1^2 + u_1^1) - 0.11\,(f_2^2 + u_2^1) - 0.04\,(f_3^2 + u_3^1) - 0.01\,(f_4^2 + u_4^1) \\ u_2^2 = -0.04\,(f_1^2 + u_1^1) - 0.16\,(f_2^2 + u_2^1) - 0.06\,(f_3^2 + u_3^1) - 0.02\,(f_4^2 + u_4^1) \\ u_3^2 = -0.05\,(f_1^2 + u_1^1) - 0.03\,(f_2^2 + u_2^1) - 0.11\,(f_3^2 + u_3^1) - 0.04\,(f_4^2 + u_4^1) \\ u_4^2 = -0.06\,(f_1^2 + u_1^1) - 0.04\,(f_2^2 + u_2^1) - 0.02\,(f_3^2 + u_3^1) - 0.08\,(f_4^2 + u_4^1) \end{cases}$$

$n = 2$, $\frac{u_i^3 - u_i^2}{k} + r\frac{u_{i+1}^3 - u_i^3}{h} - \frac{r^2}{h^\alpha}\sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}^3 = f_i^3$

$i = 1$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_1^3 - u_1^2}{k} + r_1\frac{u_2^3 - u_1^3}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1^3 = f_1^3$$

$i = 2$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_2^3 - u_2^2}{k} + r_2\frac{u_3^3 - u_2^3}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0 u_2^3 + g_1 u_1^3\right) = f_2^3$$

$i = 3$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_3^3 - u_3^2}{k} + r_3\frac{u_4^3 - u_3^3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha}\left(g_0 u_3^3 + g_1 u_2^3 + g_2 u_1^3\right) = f_3^3$$

$i = 4$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_4^3 - u_4^2}{k} - r_4 \frac{u_4^3}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_4^3 + g_1 u_3^3 + g_2 u_2^3 + g_3 u_1^3 \right) = f_4^3$$

c-à-d

$$\begin{aligned}
i = 1 \ , \ & \frac{u_1^3}{k} + r_1 \frac{u_2^3 - u_1^3}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1^3 = f_1^3 + \frac{u_1^2}{k} \\
i = 2 \ , \ & \frac{u_2^3}{k} + r_2 \frac{u_3^3 - u_2^3}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_2^3 + g_1 u_1^3 \right) = f_2^3 + \frac{u_2^2}{k} \\
i = 3 \ , \ & \frac{u_3^3}{k} + r_3 \frac{u_4^3 - u_3^3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_3^3 + g_1 u_2^3 + g_2 u_1^3 \right) = f_3^3 + \frac{u_3^2}{k} \\
i = 4 \ , \ & \frac{u_4^3}{k} - r_4 \frac{u_4^3}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \left(g_0 u_4^3 + g_1 u_3^3 + g_2 u_2^3 + g_3 u_1^3 \right) = f_4^3 + \frac{u_4^2}{k}
\end{aligned}$$

On obtenue la matrice A_1 dans la forme $A_1 U_i^3 = B_3$ est définie :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} - \frac{r_1}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_2}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{r_2}{h} & 0 \\ -\alpha (\alpha - 1) \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_3}{h} - \frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{r_3}{h} \\ 2\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) \frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha (\alpha - 1) \frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha \frac{r_4^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k} - \frac{r_4}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^3 + \frac{u_1^2}{k} \\ f_2^3 + \frac{u_2^2}{k} \\ f_3^3 + \frac{u_3^2}{k} \\ f_4^3 + \frac{u_4^2}{k} \end{bmatrix}$$

on prend $\alpha = 0.1, k = 1, r_0 = 1, h = 0.5$ donc :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4.41 & 3 & 0 & 0 \\ 0.43 & -7.29 & 4 & 0 \\ 0.60 & 0.67 & -10.7 & 5 \\ 3.3 & 0.87 & 0.96 & -14.65 \end{bmatrix}$$

On calcule A_1^{-1} :

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.11 & -0.04 & -0.01 \\ -0.04 & -0.16 & -0.06 & -0.02 \\ -0.05 & -0.03 & -0.11 & -0.04 \\ -0.06 & -0.04 & -0.02 & -0.08 \end{bmatrix}$$

La solution donne $U_i^3 = A_1^{-1} B_3$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1^3 = -0.25\,(f_1^3 + u_1^2) - 0.11\,(f_2^3 + u_2^2) - 0.04\,(f_3^3 + u_3^2) - 0.01\,(f_4^3 + u_4^2) \\ u_2^3 = -0.04\,(f_1^3 + u_1^2) - 0.16\,(f_2^3 + u_2^2) - 0.06\,(f_3^3 + u_3^2) - 0.02\,(f_4^3 + u_4^2) \\ u_3^3 = -0.05\,(f_1^3 + u_1^2) - 0.03\,(f_2^3 + u_2^2) - 0.11\,(f_3^3 + u_3^2) - 0.04\,(f_4^3 + u_4^2) \\ u_4^3 = -0.06\,(f_1^3 + u_1^2) - 0.04\,(f_2^3 + u_2^2) - 0.02\,(f_3^3 + u_3^2) - 0.08\,(f_4^3 + u_4^2) \end{cases}$$

$n = 3$, $\frac{u_i^4 - u_i^3}{k} + r\frac{u_{i+1}^4 - u_i^4}{h} - \frac{r^2}{h^\alpha}\sum_{m=0}^{i} g_m u_{i-m}^4 = f_i^4$

$i = 1$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_1^4 - u_1^3}{k} + r_1\frac{u_2^4 - u_2^4}{h} - \frac{r_1^2}{h^\alpha} g_0 u_1^4 = f_1^4$$

$i = 2$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_2^4 - u_2^3}{k} + r_2\frac{u_3^4 - u_2^4}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0 u_2^4 + g_1 u_1^4\right) = f_2^4$$

$i = 3$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_2^4 - u_2^3}{k} + r_2\frac{u_3^4 - u_2^4}{h} - \frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0 u_2^4 + g_1 u_1^4\right) = f_2^4$$

$i = 3$ le probléme (3.4) devient :

$$\frac{u_4^4 - u_4^3}{k} - r_4\frac{u_4^4}{h} - \frac{r_4^2}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{4}\left(g_0 u_4^4 + g_1 u_3^4 + g_2 u_2^4 + g_3 u_1^4\right) = f_4^4$$

c-à-d

$$
\begin{aligned}
i=1\ ,\ & \frac{u_1^4}{k}+r_1\frac{u_2^4-u_2^4}{h}-\frac{r_1^2}{h^\alpha}g_0u_1^4=f_1^4+\frac{u_1^3}{k}\\
i=2\ ,\ & \frac{u_2^4}{k}+r_2\frac{u_3^4-u_2^4}{h}-\frac{r_2^2}{h^\alpha}\left(g_0u_2^4+g_1u_1^4\right)=f_2^4+\frac{u_2^3}{k}\\
i=3\ ,\ & \frac{u_3^4}{k}+r_3\frac{u_4^4-u_3^4}{h}-\frac{r_3^2}{h^\alpha}\left(g_0u_3^4+g_1u_2^4+g_2u_1^4\right)=f_3^4+\frac{u_3^3}{k}\\
i=4\ ,\ & \frac{u_4^4}{k}-r_4\frac{u_4^4}{h}-\frac{r_4^2}{h^\alpha}\left(g_0u_4^4+g_1u_3^4+g_2u_2^4+g_3u_1^4\right)=f_4^4+\frac{u_4^3}{k}
\end{aligned}
$$

On obtenue la matrice A_1 dans la forme $A_1U_i^3=B_3$ est définie :

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{k}-\frac{r_1}{h}-\frac{r_1^2}{h^\alpha} & \frac{r_1}{h} & 0 & 0\\
\alpha\frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k}-\frac{r_2}{h}-\frac{r_2^2}{h^\alpha} & \frac{r_2}{h} & 0\\
-\alpha\left(\alpha-1\right)\frac{r_3^2}{h^\alpha} & \alpha\frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k}-\frac{r_3}{h}-\frac{r_3^2}{h^\alpha} & \frac{r_3}{h}\\
2\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & -\alpha\left(\alpha-1\right)\frac{r_4^2}{h^\alpha} & \alpha\frac{r_4^2}{h^\alpha} & \frac{1}{k}-\frac{r_4}{h}-\frac{r_4^2}{h^\alpha}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1^4\\ u_2^4\\ u_3^4\\ u_4^4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1^4+\frac{u_1^3}{k}\\ f_2^4+\frac{u_2^3}{k}\\ f_3^4+\frac{u_3^3}{k}\\ f_4^4+\frac{u_4^3}{k} \end{bmatrix}
$$

on prend $\alpha=0.1, k=1, r_0=1, h=0.5$ donc :

$$
A_1=\begin{bmatrix}
-4.41 & 3 & 0 & 0\\
0.43 & -7.29 & 4 & 0\\
0.60 & 0.67 & -10.7 & 5\\
3.3 & 0.87 & 0.96 & -14.65
\end{bmatrix}
$$

On calcule A_1^{-1} :

$$
A_1^{-1}=\begin{bmatrix}
-0.25 & -0.11 & -0.04 & -0.01\\
-0.04 & -0.16 & -0.06 & -0.02\\
-0.05 & -0.03 & -0.11 & -0.04\\
-0.06 & -0.04 & -0.02 & -0.08
\end{bmatrix}
$$

La solution donne $U_i^4=A_1^{-1}B_4$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1^4 = -0.25\,(f_1^4 + u_1^3) - 0.11\,(f_2^4 + u_2^3) - 0.04\,(f_3^4 + u_3^2) - 0.01\,(f_4^4 + u_4^3) \\ u_2^4 = -0.04\,(f_1^4 + u_1^3) - 0.16\,(f_2^4 + u_2^3) - 0.06\,(f_3^4 + u_3^2) - 0.02\,(f_4^4 + u_4^3) \\ u_3^4 = -0.05\,(f_1^4 + u_1^3) - 0.03\,(f_2^4 + u_2^3) - 0.11\,(f_3^4 + u_3^2) - 0.04\,(f_4^4 + u_4^3) \\ u_4^4 = -0.06\,(f_1^4 + u_1^3) - 0.04\,(f_2^4 + u_2^3) - 0.02\,(f_3^4 + u_3^2) - 0.08\,(f_4^4 + u_4^3) \end{cases}$$

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de quelques théorèmes et applications des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire pour quelques équations différentielles d'ordre non entier . On prend par exemple l'intégrale de poisson, dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé quelques outils de base utiles pour notre travail (les fonctions Gamma, Béta, Mettag-Leffler,...) et nous avons présenté trois approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo).Nous avons également utilisé la transformation Laplace fractionnaire d'ordre non entier et ses propriétés. On peut modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire , depuis ces découvertes , beaucoup de contributions autant théorique que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre non entier et leur intérêt dans différentes disciplines telles que l'électricité, la chimie, la biologie , l'économie, l'automatisme et le traitement du signal et dans les différentes applications telles que la modélisation, l'identification et la commande. En effet , il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématique d'ordre non entier

Bibliographie

[1] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[3] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 3. McGraw-Hill, New York (1955)

[4] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003

[5] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] Erdelyi A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[7] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscolasticity ,University of Bologna,Italy,2010.

[8] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[9] R.P. Agarwal, M. Benchohra, J.Nieto et A.Ouhab, Fractional Differantial Equations and Inclusions , Springer 2010.

[10] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York

[11] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Theory of fractional differential inequalities and applications, Commun. Appl. Anal. (2007) (in press).

[12] H.Hadjar Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.

[13] Fatiha ZAIDOUR La résolution numérique des équations différentiellesd'ordre fractionnaire ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.Université de Djilali BOUNAÂMA, Khemis Miliana

الملخص

المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية للحل لهذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق أو الخوارزميات المعروفة و الكثيرة الاستعمال, حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى كابيتو

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية , المشتقات الكسرية , كابيتو

Résumé

Les équations différentielles d'ordre fractionnaires sont une généralisation des équations différentielles classiques. Dans cette note, nous avons étudié l'approximation numérique de la solution à ces équations en utilisant certaines méthodes ou algorithmes connus et largement utilisés, où les dérivés fractionnaires ont été utilisés dans le sens de Caputo

Mots clés

Équations différentielles , dérivés fractionnaires, Caputo

Abdtract

Fractiona differential equations are a generalization of conventional differential equations. In this note, we studied the numerical approximation of the solution to these equations using certain known and widely used methods or algorithms, where fractional derivatives were used in the direction of Caputo

Keywords

Differential equations, fractional derivatives, Caputo