الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعــــة قاصـــــدي مربــــــاح
ورقلــــة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

N° d'ordre :
N° de série :

ماستر

التخصص: احتمالات و إحصاء

مقدمة من طرف الطالب:

مقراني نبيل

دراســــــة نمـــــوذج إهرينفيســـــــت

إعلان المناقشة بتاريخ:

طاقم لجنة التحكيم:

أقطي محمد - أستاذ جامعي. - جامعة قاصدي مرباح - ورقلة - رئيس لجنة

بوسعد عبد المالك- أستاذ جامعي.- جامعة قاصدي مرباح- ورقلة - مناقش

بهدي عيسى – أستاذ التعليم العالي . جامعة قاصدي مرباح – ورقلة – مؤطر

جــامعة قـاصدي مربــاح
ورقلـــة

كليـة الرياضـيات و علـوم المادة

قسم الرياضيـات

N° d'ordre :
N° de série :

ماستـر

اختصاص: الاحتمالات والإحصاء

الطالب: مقراني نبيـل

العنـوان

دراســــــة نمـــــوذج إهرينفيســـــت

تشكيلة لجنة التحكيم:
بهدي عيسى – أستاذ التعليم العالي . جامعة قاصدي مرباح – ورقلة – مؤطر

إهـــــــداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الذي وفقنا في إنهاء هذا العمل.

أهدي هذا العمل إلى ذكره والدتي رحمها الله و والدي الكريم حفظه الله .

كما أهديها إلى زوجتي العزيزة التي كانت لي عون في كل خطوات عملي .

و إلى بناتي الغاليات "آلاء"و"ريناد"و"ريتال".

و إلى كل أفراد العائلة صغيرا و كبيرا.

كما أهديها لكل أساتذة الذين علموني و الذين بفضلهم نحن نتقدم في رتب العلم.

و إلى كل الآهل و الأصدقاء.

تشكـــــــــــــر

أولا أشكر الأستاذ الكريم "بهدي عيسى" على مجهداته المعتبرة من توجيه و إرشاد لكي أتمم هذا البحث.

الشكر موصول لكل أساتذة قسم رياضيات اختصاص إحصاء و احتمالات وهم " مدي فطيمة " و "حنان عربية".

و لا أنسي الأساتذة "حدة" و "زيبار"و"غزال" وكذا الأستاذ و الأخ"أقطي محمد".

و إلى كل عمال وعاملات كلية الرياضيات وعلى رأسهم الأساتذة "مفلاح " و " عمارة ".

و أشكر كل من كان سبب في إتمام هذا العمل من قريب أو بعيد.

الفهـــــــــرس

الترميــــــــــز

- (Ω,A,P) : فضاء الاحتمالات .
- $\mathcal{S}$: فضاء منتهي أو قابل للعد .
- X : متغير عشوائي .
- $\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية .
- X_t : متتالية المتغير العشوائي أو العملية العشوائية.
- $\mathcal{L}$, λ_i , P, π_i : قوانين احتمالات .
- S_i : فضاء مجموعة القيم الممكنة .
- $\mathbb{P}$: مصفوفة الانتقال .
- T_k : زمن العودة الأولى المتعلق بالرتبة k .
- $\rho_i(k)$: الحد الأدنى لعدد زيارات السلسلة بين زيارتين متتاليتين في الرتبة k
- μ_i : الزمن المتوسط من التكرارات ذات الرتبة i .
- $\mathbb{E}$: الأمل أو التوقع الرياضي .
- $\mathbb{V}$: التباين الرياضي .

1

مقدمـــــــــــة

اقترح نموذج إهرينفيست " Le modèle d'Ehrenfest " أول مرة سنة **1907** , وهو نموذج رياضي نظري بسيط .

من طرف الفيزيائي النمساوي بول إهرينفيست" Paul Ehrenfest"(ولد في فينا في 18 يناير 1880 و توفي في 25 سبتمبر 1933).

و بمساعدة زوجته المختصة في الرياضيات الروسية تاتيانا الكسيفنا " Tatiana Alekseïevna" .

- عمل هذا النموذج على تبسيط و شرح ظاهرة تسرب الغاز من خلال غشاء مسامي , وكذا التبادل الحراري بين وسطين مختلفين.

- حيث أن هذا النموذج يسمح بشرح هذه الظواهر أفضل من الديناميكا الحرارية , و يرفع عدد كبير من التناقضات قبل تاريخ 1907.

يتمثل هذا التناقض في طبيعة عودة أو عدم عودة الجزيئات المتسربة .

- يوضح كل ذالك باستعمال لقوانين الاحتمالات .

الهدف من نموذج إهرينفيست هو وضع نموذج يصف مجهرينا في خلال مرور الوقت كيفية توزيع وانتقال N جزيئات,

داخل حاوية مقسومة إلى جزئيين مفصولين بغشاء مسامي.

الشكل (1) : يشرح عموما الميدان الذي يدرسه نموذج إهرينفيست

الفصـــل الأول

استـــعراض المراجـــــع

2.1 / الإشكالية :

- كيف يتم عرض المتغيرات العشوائية لنموذج إهرينفيست ؟

3.1 / الإشكاليات الفرعية :

(1) هل ظاهرة نموذج إهرينفيست عشوائية ؟

(2) كيف يمكن تقديم نموذج إهرينفيست ؟

4.1 / الفرضيات :

* ظاهرة نموذج إهرينفيست عشوائية.

* * يمكن عرض نموذج إهرينفيست بواسطة قوانين الاحتمالات "سلاسل ماركوف" .

1.5.1/ المرجع الأول : (Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov) .

الكاتب: Pierre Brémaud .

مفاتيح الكلمات: سلال مركوف – مصفوفة الانتقال - توزيع سلال مركوف المتجانسة CMH .

- سلاسل مركوف المستقلة.

ملخص: دراسة سلوك سلاسل مركوف.

2.5.1/ المرجع الثاني : (Introduction aux chaînes de Markov).

الكاتب: Ophélie Rouby .

مفاتيح الكلمات: سلال مركوف – مصفوفة الانتقال - نموذج التوزيع لإهرينفيست .

ملخص: تعريف نموذج إهرينفيست على أنه "تطبيق لسلاسل مركوف"

3.5.1/ المرجع الثالث: (Étude du modèle d'Ehrenfest)

الكاتب: Raymond Moché .

مفاتيح الكلمات: العملية العشوائية لمركوف – مصفوفة الانتقال – تعريف نموذج إهرينفيست – التقارب الاحتمالي .

ملخص : تم تعريف نموذج إهرينفيست مستعمل مبدأ الفيزياء "تسرب الغاز" و "نظرية الانحرافات الكبيرة".

3.5.1/ المرجع الرابع : (Simulation de l'urne d'Ehrenfest) .

الكاتب: Alain Marie-Jeanne, Frédéric Beau, Michel Janvier .

مفاتيح الكلمات: نموذج إهرينفيست ، محاكاة الكمبيوتر ، تحليل النتائج ، وقت العودة .

ملخص: محاكاة باستعمال الحاسوب لنموذج إهرينفيست .

6.1 / ملخــص :

باستخدام مفاتيح البحث ، نستنتج أن هناك تشابهًا في البيانات الأساسية لكل باحث المتعلقة بسلاسل مركوف ونموذج إهرينفيست.

ومن خلال العناوين التي تمت دراستها .

المؤلف: **رايموند موشيه** درس سلاسل مركوف بطريقة نظرية.

والمؤلفان: **أوفي روبي** و **ريموند موشيه** تم تعريف النموذج كل واحد بطريقته الخاصة .

لكن المؤلفين: **آلان ماري جان** ، **فريديريك بو** ، **ميشيل يناير** أنهم عملوا على محاكاة نموذج إهرينفيست .

الفصل الثانـي

الجــــزء النظــــــري

1/- سلاسل مركوف "chaîne de Markov":

1-1/العملية العشوائية لمركوف" Processus de Markov " :

تعريف 1 :

ليكن (Ω,A,P) فضاء احتمالي .

نذكر أن متغير عشوائي X هو عبارة عن مجموعة من القيم القابلة للقياس علـى I .

نعبر عنه بواسطة الدالة : $X : \Omega \to I$.

نضع $\lambda_i = P(X = i)$, مع $\lambda = (\lambda_i , i \in I)$ ....(1-1)

وعليه المجموع $\sum_{i\in I} \lambda_i$ هو قابل للقياس في المجموعة I تحقق : $\sum_{i\in I} \lambda i = \sum_{i\in I} P(X = i) = 1$ ....(2-1)

ومنه يسمى λ توزيع المتغير العشوائي X .

العملية العشوائية: $\{ X_t ,t \in T\}$ هي عائلة من المتغيرات العشوائية .

حيث X_t هو الشئ الملاحظ أو المرصود عمليا عند الزمن t , وتعبر T عن المجموعة التي ينتمي إليها زمن الرصد t .

1-2/ تعريف سلال مركوف:

تعريف 2 :-

ليكن S فضاء منتهي أو قابل للعد.

ولتكن $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ عبارة من متتالية المتغيرات العشوائية قيمها في S .

نقول أن X هي عبارة عن سلسلة مركوف من أجل كل: $S_0, S_1, \ldots, S_n, S_{n+1} \in S$, إذا كان :

$$(3\text{-}1)\ldots P\left(X_{n+1} = S_{n+1} / X_0 = S_0, X_1 = S_1, \ldots. X_n = S_n\right) = P\left(X_{n+1} = S_{n+1} / X_n = S_n\right)$$

المستقبل الماضي الحاضر المستقبل الحاضر

ويمكن كتابة عبارة سلسلة مركوف أيضا كتالي :

$$\mathcal{L}\left(X_{n+1} = S_{n+1} / X_0 = S_0, X_1 = S_1, \ldots. X_n = S_n\right) = \mathcal{L}\left(X_{n+1} = S_{n+1} / X_n = S_n\right)$$

Raphael Lachieze-Rey- Chaînes de Markov (et applications)- Article via Internet 25 janvier 2016

ملاحظة 1 :-

مفهوم عمليات مركوف هو نفسه مفهوم التضعيفات (Martingale) بحيث:لا يعتمد حسابات المستقبل على حسابات الماضي بل على الحاضر فقط ، لهذا نطلق على نموذج سلاسل مركوف هي سلاسل عشوائية بدون ذاكرة " sans mémoire" .

بحيث أن احتمال العملية العشوائية X_t يكون محصور في نطاق محدد لا تعتمد على القيم السابقة لـ X_n في الماضي $(n < t)$ ولا تتغير قيمة الاحتمال بمعرفة الماضي, أي أن حسابات المستقبل لا تتأثر إلا بالحاضر.

3-1/ مصفوفة الانتقال" Matrice de transition" :

تعريف 3 :-

مهما تكن $x , y \in \mathcal{S}$ نسمي $P_{x,y}$ **احتمال الانتقال** للانتقال من الحالة x إلى الحالة y هو الاحتمال الآتي :

$$(4\text{-}1)\text{...........}\quad P_{x,y} = P\left(X_{n+1} = y \big/ X_n = x\right)$$

تعريف 4 :-

لتكن $\mathbb{P}$ مصفوفة في $(k+1) \times (k+1)$

مصفوفة الانتقال لسلاسل مركوف $(X_0, X_1, X_2, \dots\dots)$ قيمها في الفضاء $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots\dots, S_k\}$.

هي كتالي :

$$(5\text{-}1)\text{..........}\quad \mathbb{P} = (P_{i,j}) = \begin{pmatrix} P_{X_0,X_0} & P_{X_0,X_1} & \dots\dots\dots P_{X_0,X_K} \\ P_{X_1,X_0} & P_{X_1,X_1} & \dots\dots\dots\dots\dots. \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots P_{X_K,X_K} \end{pmatrix}$$

نظرية 1 :-

مصفوفة الانتقال $\mathbb{P}$ هي مصفوفة عشوائية " matrice stochastique" تحقق مايلي :

(i) $0 \le P_{ij} \le 1$ مهما يكن $i , j \in \mathcal{S}$.

(ii) $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij} = 1$ من أجل كل $i \in \mathcal{S}$ . ...(6-1)

البرهان :-

نبرهن أن المصفوفة الانتقال $\mathbb{P}$ أنها مصفوفة عشوائية .

(i) لدينا من أجل كل $i ,j \in \mathcal{S}$ فأن : $0 \leq P_{ij} = P(X_{n+1}= j|\ X_n= i) \leq 1$

لأن الاحتمال قيمة موجبة أو معدومة .

(ii) و لدينا من أجل كل $i ,j \in \mathcal{S}$ مايلي :

باستعمال خواص الاحتمال الشرطي $P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ *نجد بوضع :* $A = (X_{n+1} = j)$ *و* $B = (X_n = i)$ *مايلي :*

$$\sum_{j\in \mathcal{S}} P_{ij} = \sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1} = j|\ X_n = i) = \sum_{j\in \mathcal{S}} \frac{P(X_{n+1}= j\cap X_n= i)}{P(\ X_n= i)} = \frac{\sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1}= j\cap X_n= i)}{P(\ X_n= i)}$$

كذلك نلاحظ أن : $\{X_{n+1} = j; j \in \mathcal{S}\ \}$ *هو منفصل عن المجموعة S ,*

وعليه : $P(\ X_n = i) = \sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1} = j \cap X_n = i)$

لدينا :
$$\sum_{j\in \mathcal{S}} P_{ij} = \frac{\sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1}= j\cap X_n= i)}{P(\ X_n= i)} = \frac{\sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1}= j\cap X_n= i)}{\sum_{j\in \mathcal{S}} P(X_{n+1}= j\cap X_n= i)} = 1$$

أي : $\sum_{j\in \mathcal{S}} P_{ij} = 1$

4-1/ توزيع سلاسل مركوف المتجانسة " CMH chaîne de Markov homogène " :

تعريف 5 :-

نقول أن السلسلة لمركوف $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متجانسة أذا كان :

$P(X_{n+1}= j|\ X_n= i) = P(X_1= j|\ X_0= i)$ *مهما يكن* $n \in \mathbb{N}$ *و* $i , j \in S$ ....*(7-1)*

حيث أن مصفوفة الانتقال $\mathbb{P} = (P_{ij})$ *هي مصفوفة احتمالات انتقال في* $|S|\times|S|$

أي من أجل كل $i ,j \in S$ فإن $P_{ij}= P(X_{n+1}= j|\ X_n= i)$.

5-1 / التوزيع المستقر" Distribution stationnaire " :

تعريف 6 :-

ليكن $(X_0, X_1, ...)$ سلسلة مركوف قيمه في الفضاء $\mathcal{S} = \{\ S_0, S_1, \ldots\ldots, S_k\}$.

و يكون الشعاع $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ توزيع مستقر بواسطة سلاسل مركوف إذا كان :

(i) $\pi_i > 0$ من أجل كل $i = 1,2, \dots \dots, k$ مع $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ و

(ii) $\pi\mathbb{P} = \pi$ يحقق $\sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathbb{P}_{i,j} = \pi_j$ من أجل كل $j = 1,2, \dots, k$ ....**(8-1)**

6-1 / الوضعية الغير قابلة للاختزال " Classes irréductibles "

تعريف 7 :

تكون السلسلة $(X_n)_{n\geq 0}$ للمتغيرات العشوائية غير قابلة للاختزال في الفضاء $\mathcal{S}$

إذا كان :

$$P_{i,j}{}^{(n)} = P\left({X_n = j}/{X_0 = i} \right) > 0 \quad \text{حيث} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{..........(9-1)}$$

كما يمكن القول أن كلا من الحالتين i و j متواصلان أي كل واحد منهما يمكن الوصول للآخر من جهة أخرى .

ونكتب : $i \leftrightarrow j$

نظرية 2 :-

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة مركوف متجانسة في فضاء محدود $\mathcal{S}$.

و $\mathbb{P}$ هي مصفوفة انتقال السلسلة و التي تعرف توزيع مستقر واحد على الأقل .

إذا كانت السلسلة غير قابلة للاختزال فإنه يوجد توزيع مستقر وحيدا π يحقق :

$$\pi_i > 0 \quad \text{مهما يكن} \quad i \in \mathcal{S}$$

$$\text{و} \quad \pi_i = \frac{1}{\mu_i} \quad \text{......................(10-1)}$$

حيث μ_i متوسط وقت التكرار المتعلق بالحالة i والذي يساوي مقلوب π_i .

البرهان:-

نقوم بتثبيت في حالة $k \epsilon \mathcal{S}$.

لتكن $\rho_i(k)$ العدد لزيارات السلسلة في حالة i بين زيارتين متتاليتين لـ k .

وعليه نكتب : $\rho_i(k) = \mathbb{E}\left({N_i}/{X_0 = k} \right)$

$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\} \cap \{T_n \geq n\}}$:حيث

مع T_k : هو أول وقت للعودة حالة k .

يمكن ملاحظة أن: $N_k = 1$ و $\rho_i(k) = 1$.

ولدينا أيضا:

$$\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n = i \cap T_k \geq n \,/\, X_0 = k\right)$$

ثم نضع: $\rho(k) = \left(\rho_i(k)\right)_{i\epsilon\mathcal{S}}$ نجد أن : $T_k = \sum_{i\epsilon\mathcal{S}} N_i$

وعليه :

$$\mu_k = \sum_{i\epsilon\mathcal{S}} \rho_i(k)$$

نستنتج أن متوسط زمن التكرار μ_k هو عبارة عن مجموع عبارات الشعاع $\rho_i(k)$ من أجل كل $i\epsilon\mathcal{S}$.

7-1 / سلاسل مركوف المستقلة:

نظرية 3 :-

لتكن: $(X_n\ ,\ n > 0)$ متتالية المتغيرات العشوائية مستقلة و تتبع نفس قانون الاحتمالي .

عندها نحصل على سلسلة مركوف خاصة جدا

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_0 = i_0) \cap \dots \cap P(X_{n-1} = i_{n-1}) \cap P(X_n = i)$$

$$= P(X_0 = i_0) \cdots P(X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_n = i) > 0$$

وأيضا:

$$\textbf{(9-1)}\dots\dots\ P(X_{n+1} = j \,/\, X_0 = i_0, \dots\dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j)$$

Ophélie Rouby.- Étude du modèle d'Ehrenfest , page 18- Rapport de stage, 31 août 2010.

البرهان:-

$$P(X_{n+1} = j \,/\, X_0 = i_0, \dots\dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \frac{P(X_{n+1}=j \cap X_0=i_0,\dots\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)}{P(\,X_0=i_0,\dots\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=j\,)P(\,X_0=i_0,\dots\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)}{P(\,X_0=i_0,\dots\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)}$$

$$= P(X_{n+1} = j)$$

أي : $P(X_{n+1} = j \,/\, X_0 = i_0, \dots\dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j)$

لاحظ مايلي : من أجل كل عدد طبيعي k حيث $k \leq n$

لدينا : $P(X_{k+1} = j \,/\, X_0 = i_0, \dots\dots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = i) = P(X_{k+1} = j)$

باستعمال الخاصية التراجعية نجد مايلي :

$$P(X_3 = j \,/\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i) = P(X_3 = j)$$

$$P(X_2 = j \,/\, X_0 = i_0, X_1 = i) = P(X_2 = j)$$

ومنه نستنتج أن : $P(X_1 = j \,/\, X_0 = i) = P(X_1 = j)$

تعريف 8 :-

أن مصفوفة الانتقال: $\mathbb{p} = P(m, m+n) = P_{i,j}(m, m+n)$ هي مصفوفة احتمالات الانتقال

حيث أن : $P_{i,j}(m, m+n) = P\left(X_{m+n} = j \big/ X_m = i\right)$ من أجل كل $i\,,j \in \mathcal{S}$ و $m\,,n \in \mathbb{N}$ ....***(10-1)***

ملاحظة 2 :-

(i) *مصفوفة الانتقال هي مصفوف عشوائية .*

(ii) *يمكن كتابة* $P(m, m+n) = P$.

(iii) *الاحتمال* $P(m, m+n)$ *هو غير مرتبط (مستقل) عن* m .

8-1 / معادلات تشابمان- كولموغوروف " Chapman-Kolmogorov " :

نظرية 4 :-

من أجل كل $i, j \in \mathcal{S}$ و $m, n, r \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$P_{i,j}(m, m+n+r) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{i,k}(m, m+n) P_{k,j}(m+n, m+n+r) \quad \textbf{(11-1)}$$

وعليه نحصل على المساواة الآتية :

$$P(m, m+n+r) = P(m, m+n)\, P(m+n, m+n+r)$$

و أيضا: $P(m, m+n) = \mathbb{p}^n$*, حيث أن* $\mathbb{p}$ *هي مصفوفة الانتقال.*

البرهان:-

من أجل كل $i, j \in \mathcal{S}$ و $m, n, r \in \mathbb{N}$.

بالرجوع إلى تعار يف التي تخص معاملات مصفوفة الانتقال:

$$P_{i,j}(m, m+n+r) = P\left(X_{m+n+r} = j \middle/ X_m = i\right) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P\left(X_{m+n+r} = j \cap X_{m+n} = k \middle/ X_m = i\right)$$

نستخدم العلاقة الآتية: $\boldsymbol{P\left(A \cap B \middle/ C\right) = P\left(A \middle/ B \cap C\right) P\left(B \middle/ C\right)}$ " خواص الاحتمال الشرطي"

نضع : $A = (X_{m+n+r} = j)$ و $B = (X_{m+n} = k)$ و $C = (X_m = i)$

نجد مايلي : $P_{i,j}(m, m+n+r) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P\left(X_{m+n+r} = j \middle/ X_m = i \cap X_{m+n} = k\right) P\left(X_{m+n} = k \middle/ X_m = i\right)$

$$= \sum_{k \in \mathcal{S}} P\left(X_{m+n+r} = j \middle/ X_{m+n} = k\right) P\left(X_{m+n} = k \middle/ X_m = i\right)$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{S}} P\left(X_{m+n} = k \middle/ X_m = i\right) P\left(X_{m+n+r} = j \middle/ X_{m+n} = k\right)$$

$$P_{i,j}(m, m+n+r) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{i,k}(m, m+n) P_{k,j}(m+n, m+n+r)$$

وعليه : $P(m, m+n+r) = P(m, m+n)\, P(m+n, m+n+r)$

9-1 / عكس سلاسل مركوف:

نفرض أن : $\{X_n \,,\, 0\leq n \leq N\}$ سلسلة مركوف غير قابلة للاختزال,عناصرها غير معدومة و معلومة.

و أيضا الشعاع π هو دالة توزيع المستقرة لـ X_n من أجل كل n .

نعرف Y_n المتغير العشوائي الذي يعبر عن عكسية سلسلة ماركوف كتالي:

$$Y_n = X_{N-n} \,,\, 0\leq n \leq N \quad \text{..............(12-1)}$$

نظرية 5 :-

إذا كان : $i\,,j \in \mathcal{S}$ و $0 \leq n \leq N$ المتتالية سلسلة مركوف $Y = (Y_n)_{0\leq n\leq N}$ تحقق العلاقة:

$$P\left({Y_{n+1} = j}/{Y_n = i} \right) = \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{j,i} \quad \text{..........(13-1)}$$

البرهان:-

من أجل كل: $i\,,j \in \mathcal{S}$ و $n \in [0;N]$.

نضع: $m = N - n$ لدينا : $Y_n = X_{N-n} = X_m$ ومنه $Y_{n+1} = X_{N-(n+1)} = X_{(N-n)-1} = X_{m-1}$ ومنه

$$P\left({Y_{n+1} = j}/{Y_n = i} \right) = P\left({X_{N-n-1} = j}/{X_{N-n} = i} \right)$$

نحصل على العلاقة: $P\left({Y_{n+1} = j}/{Y_n = i} \right) = P\left({X_{m-1} = j}/{X_m = i} \right)$

ثم نستخدم الخاصية: $\boldsymbol{P\left({A}/{B}\right) = P\left({B}/{A}\right)\frac{P(A)}{P(B)}}$ "الخاصة بالاحتمال الشرطي" وذلك بوضع:

$$A = (X_{m-1} = j) \quad \text{و} \quad B = (X_m = i)$$

فنحصل على النتيجة الآتية :

$$P\left({X_{m-1} = j}/{X_m = i} \right) = P\left({X_m = i}/{X_{m-1} = j} \right) \frac{P(X_{m-1}=j)}{P(X_m=i)} = P_{j,i} \frac{\pi_j}{\pi_i}$$

-*Pierre Brémaud- Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov(page 229).*

نظرية 6 :-

لتكن : $\mathbb{p}$ هي مصفوفة الانتقال لسلسة العكسية X .

و نفرض أنه يوجد شعاع التوزيع π يحقق: $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}\ , \forall i\ , j \epsilon S$ .... **(14-1)**

و عليه π هو توزيع مستقر لـ X .

وأيضا عكسية السلسلة X تكون متوازنة.

البرهان :-

نفرض أن التوزيع π يحقق شروط ***نظرية 6*** وعليه نجد:

$$\sum_{i \epsilon S} \boldsymbol{\pi_i P_{i,j}} = \sum_{i \epsilon S} \boldsymbol{\pi_j P_{j,i}}$$

$$= \boldsymbol{\pi_j} \textstyle\sum_{i \epsilon S} \boldsymbol{P_{j,i}} \quad \text{مع} \quad \left(\textstyle\sum_{i \epsilon S} \boldsymbol{P_{j,i}} = \mathbf{1} \right)$$

$$= \boldsymbol{\pi_j}$$

-Pierre Brémaud- Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov(page 230).

2 / نموذج إهرينفيست "Le modèle d'Ehrenfest" :

1.2 / تجربة إهرينفيست:-

تتكون تجربة إهرينفيست العشوائية من صندوقين اقتراع.

صندوق A فيه N كرة مرقمة من 1 إلى N , و الصندوق B فارغ.

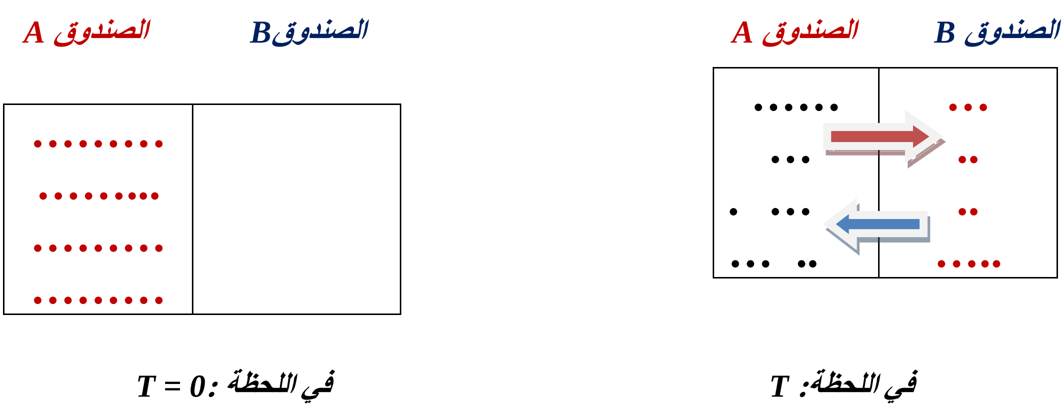
تعمل هذه التجربة بالسحب العشوائي لـ i كرة من الصندوق A و وضعها نحو الصندوق B ثم العكس.

مع تخصيص الوقت الكافي لتكرار تجربة .

نهتم بعدد الكرات الموجودة داخل الصندوق A في لحظة معينة .

من المفترض أن في بداية التجربة الصندوق A يحوي على جميع الكرات.

الشكل (2) :- يوضح أكثر تجرب إهرينفيست



الشكل (2)

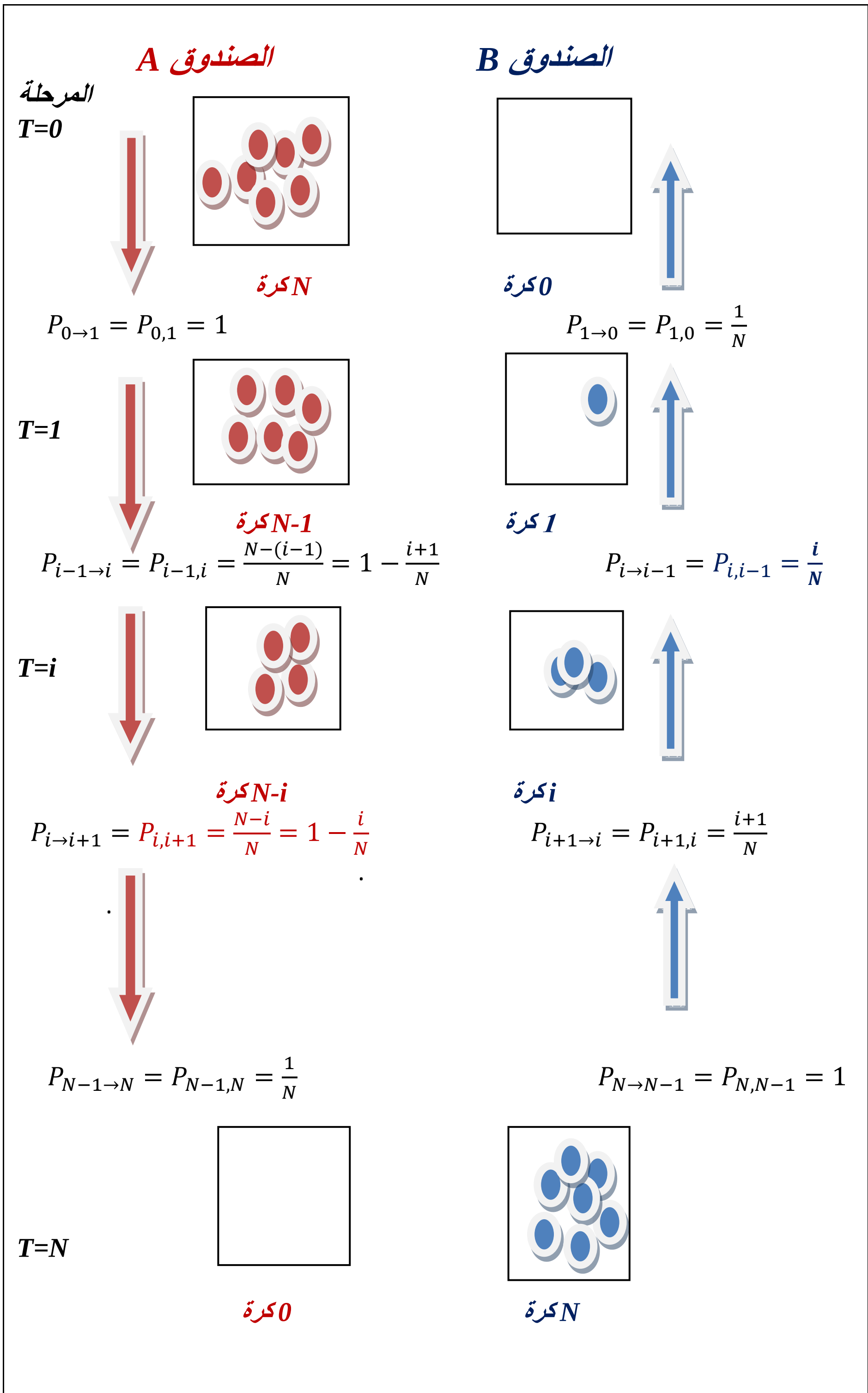
2-2 / أول اتصال:-

نحن نعتبر الصندوقين A و B مفصولين بغشاء مسامي يسمح بمرور الجزئيات من صندوق إلى آخر.

في الأصل نعتبر الصندوق A يحوي كل الجزئيات $N \in \mathbb{N}^*$ ، وعليه أثناء تحرك جزئيات بمرور الوقت نتبع الإجراءات الآتية:

في كل لحظة يمكن نقل جزئيات من صندوق نحو صندوق الذي لا يحتوي عليها.

الشكل (3): تمثيل تجربة إهرينفيست مع حساب احتمال الاقتراع



الشكل (3) :-
يوضح خطوات تجربة إهرينفيست بالتفصيل مع كيفية حساب احتمال سحب الكرات في كل حالة .

السهم الأحمر:-
يمثل سحب عشوائي للكرة من الصندوق A نحو الصندوق B .

السهم الأزرق:-
يمثل سحب عشوائي للكرة من الصندوق B نحو الصندوق A .

الاحتمال يساوي:-
$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$ حيث: $|\Omega| = N$
و $|A|$: هو عدد الحالات الملائمة من السحب لكل حالة.

3-2 / دراسة احتمالية لنموذج إهرينفيست:

1-3-2 / عملية عشوائية لمركوف:-

نعتبر الفضاء $S=\{0,1,2,3,\ldots,N\}$ الذي يشمل الحالات المختلفة في الصندوق A .

في الواقع أن الصندوق A يمكن أن يحوي كل الكرات N إلى غاية أن لا تحوي أي كرة (0 كرة)

و عليه نضع: $(X_n)_{n\in S}$ تعبر عن عائلة من المتغيرات العشوائية (عملية عشوائية) قيمها تكون في الفضاء S ,

الذي يعرف في كل لحظة عن عدد الكرات الموجدة داخل الصندوق A .

فرضية 1 :-

1- إن العملية العشوائية $(X_n)_{n\geq 0}$ تعبر عن سلسلة مركوف ومنه يمكن أن تحصل على مصفوفة الانتقال الآتية:

$$(1\text{-}2)\ldots\ldots\ \mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ 1/N & 0 & (N-1)/N & & & & & & \\ & \vdots & & i/N & 0 & (N-i)/N & & \vdots & \\ & & & & & & (N-1)/N & 0 & 1/N \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0\cdots & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

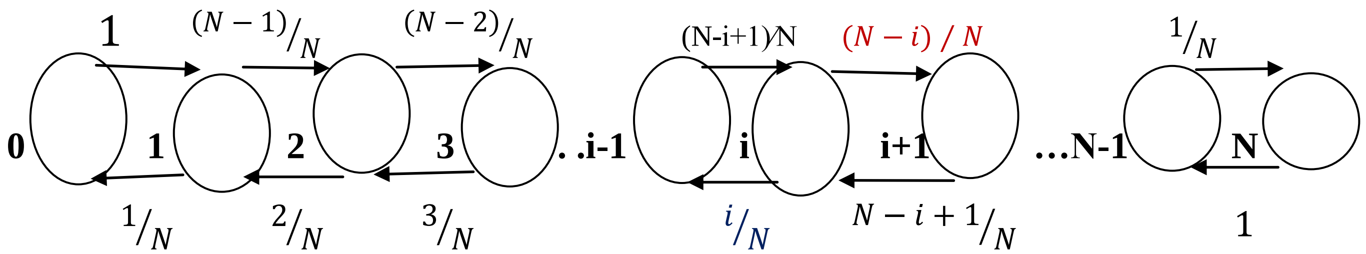
أو بعبارة آخري يمكن كتابة هذه المصفوفة بشكل: $\mathbb{P}=(P_{i,j})$ من أجل كل $i,j\in S$

فنحصل على عبارة قانون الاحتمالات الأسيسة لهذا النموذج وهي:

$$(2\text{-}2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ P_{i,j}=\begin{cases}\frac{i}{N} & si: j=i-1\\ 1-\frac{i}{N} & si: j=i+1\end{cases}$$

وعليه يمكن توضيح سلسلة مركوف في **الشكل (4)** و الذي يوضح احتمال مرور الكرات من و إلى الصندوق A .

الشكل (4): تمثيل سلسلة مركوف الخاصة بنموذج إهرينفيست



وعليه يمكن التعرف على خصائص سلسلة مركوف الموالية في هذا النموذج.

الفرضية 2 :-

السلسلة $(X_n)_{n\geq 0}$ الخاصة بنموذج إهرينفيست غير قابلة للاختزال .

البرهان:-

لبرهان أن نموذج السلسلة $(X_n)_{n\geq 0}$ إهرينفيست غير قابلة للاختزال نتحقق من صحة مايلي :

من أجل كل $\{x\ ,y\} \in \mathcal{S}$ فإن احتمال $x \mp y$ موجب .

أي نبرهن أنه :

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \therefore\ {P_{x,y}}^{(n)} > 0$$

لدينا من العلاقة (2-2) مايلي :

$$P_{x,y} = P(x,y) = \begin{cases} \frac{N-x}{N} & si \quad y = x+1 \\ \frac{x}{N} & si \quad y = x-1 \\ 0 & si \qquad non \end{cases}$$

نفرض أن $x < y$ نجد مايلي :

<u>الحالة الأولى :</u>

$$\begin{aligned} {P_{x,y}}^{(n)} &= P(x,x+1)P(x+1,x+2)P(x+2,x+3)\ldots\ldots\ldots.P(y-1,y) \\ &= \left(\frac{N-x}{N}\right)\left(\frac{N-x-1}{N}\right)\left(\frac{N-x-2}{N}\right)\ldots\ldots\ldots.\left(\frac{N-x-n-1}{N}\right) \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(N-x-k)}{N^n} > 0 \quad \ldots\ldots(*) \end{aligned}$$

<u>الحالة الثانية :</u>

$$\begin{aligned} {P_{x,y}}^{(n)} &= P(x-1,x)P(x-2,x-1)P(x-3,x-2)\ldots\ldots\ldots.P(y-1,y) \\ &= \left(\frac{x}{N}\right)\left(\frac{x-1}{N}\right)\left(\frac{x-2}{N}\right)\ldots\ldots\ldots.\left(\frac{x-n-1}{N}\right) \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)}{N^n} > 0 \quad \ldots\ldots(**) \end{aligned}$$

من (*) و (**) نستنتج أن :

ومنه : نموذج السلسلة $(X_n)_{n\geq 0}$ لإهرينفيست غير قابلة للاختزال .

الفرضية 3 :-

التوزيع المستقر للسلسلة مركوف الخاص بنموذج إهرينفيست يتبع قانون احتمالي ثنائي الحد **"la loi binomiale"** $\mathcal{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)$

وهي سلسلة قابلة للانعكاس .

البرهان :-

الطريقة الأولى :-

نبرهن أن التوزيع π المستقر لسلسلة مركوف الخاصة بنموذج إهرونفيست هي من الشكل:

$$\textbf{(4-2)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \pi=\left\{\pi_i=C_N^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{N-i}=\frac{1}{2^N}C_N^i,\ \ i\epsilon\mathcal{S}\right\}$$

(i) لدينا مهما يكن : $i\epsilon\mathcal{S}$ $\forall$ فإن :

$$\pi_i=\frac{1}{2^N}C_N^i\ \geq 0$$

(ii) نحسب المجموع الآتي :

$$\sum_{i\epsilon\mathcal{S}}\pi_i=\sum_{i\epsilon\mathcal{S}}\frac{1}{2^N}C_N^i=\frac{1}{2^N}\sum_{i\epsilon\mathcal{S}}C_N^i=\frac{1}{2^N}2^N=1$$

مع العلم أن : $\sum_{i\epsilon\mathcal{S}}\boldsymbol{C_N^i}=\sum_{i\epsilon\mathcal{S}}\boldsymbol{C_N^i}(\mathbf{1})^{\boldsymbol{i}}(\mathbf{1})^{\boldsymbol{N-i}}=(\mathbf{1}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{N}}=\mathbf{2}^{\boldsymbol{N}}$

من (i) و (ii) نلاحظ أن الدالة π تعبر عن قانون احتمال

(iii) نفرض أن : π يتبع قانون احتمالي ثنائي الحد "la loi binomiale" $\boldsymbol{\mathcal{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)}$

ونبرهن على أنه توزيع مستقر، أي نبرهن الخاصية الآتية: $\pi_iP_{i,j}=\pi_jP_{j,i}$ مهما يكن $\forall i\ ,j\epsilon\mathcal{S}$.

نحن نعلم من **نظرية (5)** عبارة الاحتمال $P_{i,j}$ حيث:

$$P_{i,j}=\begin{cases}1-\frac{i}{N} & si: j=i+1\\ \frac{i}{N} & si: j=i-1\\ 0 & si: non\end{cases}$$

وعليه يمكن حساب الجداء الآتي :

$$\pi_i P_{i,j} = \frac{1}{2^N} C_N^i P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^N} C_N^i \left(1 - \frac{i}{N}\right) & si: j = i+1 \\ \frac{1}{2^N} C_N^i \left(\frac{i}{N}\right) & si: j = i-1 \\ 0 & si: non \end{cases} \quad \text{.......(2-4)}$$

أي :

ومنه :

$$\pi_i P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^N} C_N^{j-1} \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) = \frac{1}{2^N} C_N^{j-1} \left(\frac{N-j+1}{N}\right) & si: i = j-1 \\ \frac{1}{2^N} C_N^{j+1} \left(\frac{j+1}{N}\right) & si: i = j+1 \\ 0 & si: non \end{cases}$$

لدينا :

$$C_N^{j+1} = C_N^j \frac{N-j}{j+1} \quad \text{و} \quad C_N^{j-1} = C_N^j \frac{j}{N-j+1}$$

بالتعويض نجد:

$$\pi_i P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^N} C_N^j \left(1 - \frac{j}{N}\right) & si: i = j+1 \\ \frac{1}{2^N} C_N^j \left(\frac{j}{N}\right) & si: i = j-1 \\ 0 & si: non \end{cases} = \pi_j P_{j,i} \Longrightarrow \pi_j P_{j,i} = \pi_i P_{i,j}$$

*<u>**طريقة ثانية :**</u> - للبرهان أن : التوزيع π يتبع قانون احتمالي ثنائي الحد **" la loi binomiale "** $\boldsymbol{\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)}$

أي نبرهن المساواة الآتية:

$$\pi = \left\{\pi_k = C_N^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} = C_N^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} = \frac{1}{2^N} C_N^k, k \epsilon \mathcal{S}\right\}$$

لنفرض أن: $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \dots, \pi_N)$

نعلم أنه من أجل التوزيع π يكون مستقر بالنسبة لاحتمال نموذج إهرينفيست يحقق مايلي:

$\pi = \pi\mathbb{P}$ مع $\mathbb{P}$ هي مصفوفة الانتقال الاحتمالي لهذا النموذج" وفق العلاقة (1-7)

نقوم بالحسابات الآتية :

$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k,\dots,\pi_N)=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k,\dots,\pi_N)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0\cdots & & 0 & 0 & 0 \\ 1/N & 0 & N-1/N & & & & & & \\ & \vdots & & k/N & 0 & N-k/N & & \vdots & \\ 0\dots\dots\dots & 0 & 0 & & 0\cdots & & N-1/N & 0 & 1/N \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0=\dfrac{1}{N}\pi_1 \\ \pi_1=\pi_0+\dfrac{2}{N}\pi_2 \\ \pi_2=\dfrac{N-1}{N}\pi_1+\dfrac{3}{N}\pi_3 \\ \vdots \\ \pi_k=\dfrac{N-(k-1)}{N}\pi_{k-1}+\dfrac{k+1}{N}\pi_{k+1} \\ \vdots \\ \pi_N=\dfrac{1}{N}\pi_{N-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1=N\pi_0 \\ \pi_2=\dfrac{N}{2}(\pi_1-\pi_0)=\dfrac{N(N-1)}{2}\pi_0=C_N^2\pi_0 \\ \pi_3=\dfrac{N}{3}\left(\pi_2-\dfrac{N-1}{N}\pi_1\right)=C_N^3\pi_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \pi_k=\dfrac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k-1)}{1\times2\times3\times\dots\times k}\pi_0=C_N^k\pi_0 \end{cases}$$

نعلم أن : $\sum_{k\epsilon\mathcal{S}}\pi_k=1$ لأنه قانون احتمال و أيضا : $\sum_{k\epsilon\mathcal{S}}C_N^k=2^N$ أي أن :

لدينا : $\pi_k=C_N^k\pi_0$

ومنه : $\sum_{k\epsilon\mathcal{S}}\pi_k=\pi_0\sum_{k\epsilon\mathcal{S}}C_N^k=\pi_0(2^N)=1$ أي : $\pi_0=\frac{1}{2^N}$

بالتعويض نحصل على :

$$\pi_k=C_N^k\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

وعليه نستنتج :

التوزيع π يتبع قانون احتمالي ثنائي الحد "la loi binomiale" $\boldsymbol{\mathcal{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)}$

أو نكتب :

$$\boldsymbol{\pi\sim\mathcal{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)}$$

2-3-2/ وقت التكرار " Temps de récurrence ":-

الفرضية 4 :-

متوسط زمن أول عودة للحالة الأولى, انطلاقا من الحالة $\frac{N}{2}+k$ مع $-\frac{N}{2}\leq k\leq\frac{N}{2}$ للعودة لصندوق A هو:

$$\mu_{\frac{N}{2}+k} = 2^N\,\frac{\left(\frac{N}{2}+k\right)!\left(\frac{N}{2}-k\right)!}{(N)!} \quad \text{........(5-2)}$$

البرهان:-

وفق **نظرية (2)** الخاصة بسلاسل مركوف :

نعلم أن السلسلة الغير قابلة للاختزال تقبل توزيع مستقر و وحيد π , يكتب بدلالة μ_i متوسط وقت التكرار من أجل كل $i\epsilon S$.

$$\pi_i=\frac{1}{2^N}C_N^i \Longrightarrow \mu_i = 2^N\frac{1}{C_N^i}=\frac{2^N i!(N-i)!}{N!} \quad \text{مع} \quad \pi_i=\frac{1}{\mu_i}\Longrightarrow \mu_i=\frac{1}{\pi_i}$$

نضع: $i=\frac{N}{2}+k$ نجد أن

$$\mu_{\frac{N}{2}+k}=\frac{2^N\left(\frac{N}{2}+k\right)!\left(\frac{N}{2}-k\right)!}{N!}$$

ملاحظة سمولوتشو فسكي " Smoluchovski ":

كانت ملاحظة سمولوتشو فسكي بالنسبة لمتوسط وقت التكرار تخص العدد $\frac{N}{2}\mp k$.

بحث أنه كلما كان العدد k كبيرا كلما كان متوسط وقت التكرار أكبر و العكس صحيح .

على سبيل المثال

- في حالة : $\boldsymbol{k=10\,000}$ و $\frac{N}{2}=10\,000$ نجد متوسط وقت التكرار حوالي $\boldsymbol{10^{600}}$ **سنة** .

- في حالة : $\boldsymbol{k=0}$ و $\frac{N}{2}=10\,000$ نجد متوسط وقت التكرار حوالي $\boldsymbol{175}$ **ثانية** .

Auteur :Ophélie Rouby. Ophélie Rouby.- Étude du modèle d'Ehrenfest , page 49- Rapport de stage, 31 août 2010.

2-3-3 / التوقع و التباين الرياضي:

2-3-3-1 / التوقع الرياضي :

الفرضية 5 :-

نضع: $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$ و الاحتمال $P_n = \frac{X_n}{N}$ مهما يكن $n \in N$ ، نجد أن

التوقع احتمال P_n يساوي :

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n \quad \text{(6-2)}$$

البرهان:

لدينا من العلاقة (2-2) خاصة بحساب احتمال نموذج إهرينفيست ميلي :

احتمال الحادث $X_n + 1$ بالنسبة لـ X_n هو $P_{X_n,X_n+1} = P_{X_n/X_n+1} = 1 - \frac{X_n}{N}$

و احتمال الحادث $X_n - 1$ بالنسبة لـ X_n هو $P_{X_n,X_n-1} = P_{X_n/X_n-1} = \frac{X_n}{N}$

ومنه :

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}/{X_n}\right) = \sum_{k=1}^{N} X_K P\left({X_{k+1}}/{X_k}\right)$$

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}/{X_n}\right) = (X_n+1)P_{X_n,X_n+1} + (X_n-1)P_{X_n,X_n-1} = (X_n+1)\left(1-\frac{X_n}{N}\right) + (X_n-1)\left(\frac{X_n}{N}\right)$$

$$= X_n - \frac{2X_n}{N} + 1$$

$$= \left(1 - \frac{2}{N}\right)X_n + 1 \quad / \quad \alpha = 1 - \frac{2}{N}$$

نجد أن : $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X_{n+1}}/\boldsymbol{X_n}\right) = \boldsymbol{\alpha X_n + 1}$

وعليه ومن خلال خواص خطية التوقع الرياضي و كذا خواص الاحتمال الشرطي نحصل على :

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}/{X_n}\right) = \alpha X_n + 1 \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left({X_{n+1}}/{X_n}\right)\right] = \mathbb{E}(\alpha X_n + 1) = \alpha\mathbb{E}(X_n) + 1$$

$$\textbf{\textit{(7-2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbb{E}(\boldsymbol{X_{n+1}}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbb{E}(\boldsymbol{X_n}) + \mathbf{1}$$

لدينا :

$$X_n = NP_n \; ; \; X_{n+1} = NP_{n+1} \; : \text{ومنه} \quad P_n = \frac{X_n}{N} \; ; \; P_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{N}$$

نعوض في (7-2) نحصل على مايلي :

$$\mathbb{E}(NP_{n+1}) = \alpha\mathbb{E}(NP_n) + 1 \Longrightarrow$$

$$\textbf{\textit{(8-2)}}\ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbb{E}(\boldsymbol{P_{n+1}}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbb{E}(\boldsymbol{P_n}) + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}$$

سوف نستخدم العلاقة (8-2) من أجل برهان (5-2) باستعمال بالرهان بالتراجع

وعليه :

نبرهن صحة العلاقة : $\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n$ *مهما يكن* $n \in N$ *" نستعمل البرهان بالترجع .*

1 / من أجل : $\boldsymbol{n=0}$

$\mathbb{E}(P_0) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^0 = \frac{1}{2} + \mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2} = \mathbb{E}(P_0)$ *العلاقة (5-2) صحيحة من أجل n=0 .*

2 */ من أجل :* $n \geq 0$ *، نبرهن صحة (5-2) لأجل* $\boldsymbol{n+1}$ *.*

$$\mathbb{E}(P_{n+1}) = \alpha\mathbb{E}(P_n) + \frac{1}{N}$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n\right) + \frac{1}{N}$$

$$= \alpha^{n+1}\left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{N}$$

نعوض : $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{N}}$ نجد

$$\mathbb{E}(P_{n+1}) = \alpha^{n+1}\left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{N}}}{2} + \frac{1}{N} = \alpha^{n+1}\left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

من 1 / و 2 / المساواة الآتية صحيحة

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n, \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

2-3-3 / التباين الرياضي:

الفرضية 2 :-

نضع: $\beta = 1 - \frac{4}{N}$ و $P_n = \frac{X_n}{N}$ نجد من أجل كل $n \in N$ مايلي :

التباين الرياض للاحتمال P_n يساوي:

$$\mathbb{V}(P_n) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^n - \alpha^{2n}) \qquad \text{............(9-2)}$$

البرهان :-

بنفس طريقة البرهان السابق سوف نبرهن عن صحة العلاقة (2-9) .

لدينا من ما سبق :

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}/{X_n}\right) = (X_n + 1)\left(1 - \frac{X_n}{N}\right) + (X_n - 1)\left(\frac{X_n}{N}\right)$$

ومنه :

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2/{X_n}\right) = (X_n + 1)^2\left(1 - \frac{X_n}{N}\right) + (X_n - 1)^2\left(\frac{X_n}{N}\right)$$

وعليه :

$$\mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2/{X_n}\right) = \left({X_n}^2 + 2X_n + 1\right)\left(1 - \frac{X_n}{N}\right) + \left({X_n}^2 - 2X_n + 1\right)\left(\frac{X_n}{N}\right)$$

$$= {X_n}^2 + 2X_n + 1 - 4\frac{{X_n}^2}{N} = {X_n}^2\left(1 - \frac{4}{N}\right) + 2X_n + 1 = \beta {X_n}^2 + 2X_n + 1$$

أي أن : $\mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2/{X_n}\right) = \beta {X_n}^2 + 2X_n + 1$ حيث : $\beta = 1 - \frac{4}{N}$

باستعمال خواص التوقع الشرطي نستنتج :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2 / X_n\right)\right) = \mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2\right) = \mathbb{E}\left(\beta {X_n}^2 + 2X_n + 1\right) = \beta\mathbb{E}\left({X_n}^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1$$

(10-2)........ $\boldsymbol{\mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2\right) = \beta\mathbb{E}\left({X_n}^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1}$

نستعمل (2-9) لكي نعرف التباين الرياضي بحيث:

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}\left({X_n}^2\right) - \mathbb{E}(X_n)^2 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2\right) - \mathbb{E}(X_{n+1})^2 \\ \text{و} \\ \mathbb{E}\left({X_n}^2\right) = \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 \end{cases}$$

ومنه :

$$\mathbb{V}(X_{n+1}) = \mathbb{E}\left({X_{n+1}}^2\right) - \mathbb{E}(X_{n+1})^2 = \beta\mathbb{E}\left({X_n}^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1 - (\alpha\mathbb{E}(X_n) + 1)^2$$

$$\mathbb{V}(X_{n+1}) = \beta(\mathbb{V}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1 - \alpha^2\left(\mathbb{E}(X_n)\right)^2 - 2\alpha\mathbb{E}(X_n) - 1$$

$$\mathbb{V}(X_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2(\beta - \alpha^2) + 2(1-\alpha)\ \mathbb{E}(X_n) \ldots\ldots (*)$$

و نعلم أن : $P_n = \frac{X_n}{N} \Longrightarrow X_n = NP_n\ ;\ X_{n+1} = NP_{n+1}$

بالتعويض في (*) :

$$\mathbb{V}(NP_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(NP_n) + \mathbb{E}(NP_n)^2(\beta - \alpha^2) + 2(1-\alpha)\ \mathbb{E}(NP_n) \Longrightarrow$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \mathbb{E}(P_n)^2(\beta - \alpha^2) + \frac{2(1-\alpha)}{N}\ \mathbb{E}(P_n)$$

نضع : $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$ *و* $\beta = 1 - \frac{4}{N}$ *و* $\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n$ *نجد :*

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \mathbb{E}(P_n)^2\left(1 - \frac{4}{N} - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^2\right) + \frac{2\left(1 - 1 + \frac{2}{N}\right)}{N}\ \mathbb{E}(P_n)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \mathbb{E}(P_n)^2\left(-\frac{4}{N^2}\right) + \mathbb{E}(P_n)\left(\frac{4}{N^2}\right) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \frac{4}{N^2}\mathbb{E}(P_n)\left(1 - \mathbb{E}(P_n)\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n\right)\left(\frac{1}{2} - \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n\right)$$

(11-2)...... $\boldsymbol{\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\ \mathbb{V}(P_n) + \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{4} - \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^{2n}\right)}$

سوف نبرهن على صحة العلاقة (2-9) باستعمال البرهان بالتراجع وذلك بمساعدة عبارة الخاصية (2- 10)

أي نبرهن على صحة :

مهما يمكن $n \in \mathrm{N}$ فإن : $\mathbb{V}(P_n) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^n - \alpha^{2n})$

1/ من أجل : n =0

$$\mathbb{V}(P_0) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^0 + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^0 - \alpha^{20})$$

$$= \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)1 + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (0) = \frac{1}{4N} + \mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N} = \mathbb{V}(P_0)$$

ومنه العلاقة (2-8) صحيحة من أجل n=0 .

2/ من أجل : n ≥ 0 ، نبرهن صحة (2-8) لأجل n+1 .

لدينا : $\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta\, \mathbb{V}(P_n) + \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{4} - \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^{2n}\right)$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \beta \left(\frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^n - \alpha^{2n})\right) + \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{4} - \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{\beta}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^{n+1} - \beta\alpha^{2n}) + \frac{4}{N^2}\left(\frac{1}{4} - \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{\boldsymbol{\beta}}{4N} + \frac{1}{N^2} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^{n+1} - \beta\alpha^{2n} - \frac{4}{N^2}\alpha^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{\boldsymbol{\beta}}{4N} + \frac{1}{N^2} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^{n+1} - (\boldsymbol{\beta} + \frac{4}{N^2})\alpha^{2n}\right)$$

نضع : $\boldsymbol{\beta = 1 - \frac{4}{N}}$ فنجد

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{\mathbf{1 - \frac{4}{N}}}{4N} + \frac{1}{N^2} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^{n+1} - (\mathbf{1} - \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{N}} + \frac{4}{N^2})\alpha^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^{n+1} - (1 - \frac{4}{N} + \frac{4}{N^2})\alpha^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\beta^{n+1} - \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{N}}\right)^2 \alpha^{2n}\right)$$

ثم نضع : $\boldsymbol{\alpha = 1 - \frac{2}{N}}$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^{n+1} - \alpha^2\alpha^{2n})$$

$$\mathbb{V}(P_{n+1}) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^{n+1} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^{n+1} - \alpha^{2n+2})$$

من 1 / و 2 / المساواة الآتية صحيحة

$$\mathbb{V}(P_n) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^n - \alpha^{2n}) \ ; \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

4-3-2 / التقارب الاحتمالي" Convergence en probabilité " :-

في هذا العنصر سوف نهتم بالمتغير : $\frac{X_{Nt}}{N}$ *، حيث* $\boldsymbol{t}$ *عدد صحيح غير معدوم.*

الهدف تحديد كم يتقارب المتغير العشوائي $\frac{X_{Nt}}{N}$ *عندما :* $N \to \infty$.

الفرضية 4 :-

التقارب الاحتمالي لـ $\frac{X_{Nt}}{N}$ *من أجل* $t > 0$ *, هي الدالة المعرفة على بالعبارة*

$$\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}} \quad \textit{(12-2)}$$

البرهان :-

1 / تحديد نهاية التوقع للمتغير $\frac{X_{Nt}}{N}$:

لدينا من سبق:

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\alpha^n$$

من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ لدينا:

بوضع : $P_n = \frac{X_{Nt}}{N}$ و $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$ و $n = Nt$ ثم نعوض $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$

نجد مايلي : $\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)\alpha^{Nt}$

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{Nt}$$

نهتم في هذه الحالة عندما كل الكرات تكون في الصندوق A .

إذا كان : $P(X_0 = N) = 1$ فإن : $\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{N}{N}\right) = 1$

وعليه :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{Nt}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\boldsymbol{X_{N_t}}}{\boldsymbol{N}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{N}}\right)^{Nt}$$

أي : $\lim_{N\to\infty}\left[\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{Nt}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

ومنه : $\boldsymbol{\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_{N_t}}{N}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} = h(t)}$ **......... (13-2)**

ملاحظة 1 :-

* نتيجة هذه النهاية تسمى بقانون نيوتن للتبريد السوائل.

2 / تحديد نهاية التباين للمتغير $\frac{X_{Nt}}{N}$:

لدينا :

$$\mathbb{V}(P_n) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}(P_0) - \frac{1}{4N}\right)\beta^n + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)^2 (\beta^n - \alpha^{2n})$$

نضع :

$$P_n = \frac{X_{Nt}}{N} \Longrightarrow P_0 = \frac{X_0}{N} \text{ و } \alpha = 1 - \frac{2}{N} \text{ و } \beta = 1 - \frac{4}{N} \text{ و } n = Nt$$

نجد ما يلي :

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{4N} + \left(\mathbb{V}\left(\frac{X_0}{N}\right) - \frac{1}{4N}\right)\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2Nt}\right)$$

إذا كان : $\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) = 1$ فإن : $\mathbb{V}\left(\frac{X_0}{N}\right) = 0$.

لأن: $\mathbb{V}\left(\frac{X_0}{N}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_0}{N}\right)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{N}{N}\right)^2\right) - 1 = 1 - 1 = 0$.

ومنه :

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{4N} + \left(-\frac{1}{4N}\right)\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2Nt}\right)$$

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \frac{1}{4N} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4N}\right)\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2Nt}$$

أي :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{4N} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4N}\right)\left(1 - \frac{4}{N}\right)^{Nt} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2Nt}\right]$$

$$= \frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4}(e^{-2t})^2 = \frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-4t} = 0$$

نستنتج :

$$(14\text{-}2) .... \lim_{N\to\infty} \mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = 0$$

ملاحظة 2 :-

* نطلق على سلاسل مركوف شبه حتمية لأن تباينها دائما معدوم .

3 / دراسة تقارب المتغير $\frac{X_{Nt}}{N}$:

لدينا: مهما يكن $\varepsilon > 0$

$P\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - h(t)\right|^2 > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - h(t)\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$ باستعمال متراجحة شيبشاف" Tchebychev"

نجد:

$$P\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - h(t)\right|^2 > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) - h(t)\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right)\right|^2\right)}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) - h(t)\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{\mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right)}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) - h(t)\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

باستعمال خواص التباين السابقة نجد:

$P\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - h(t)\right|^2 > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) - h(t)\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$ لأن: $\lim_{N\to\infty} \mathbb{V}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) = 0$

وعليه :

$$(15\text{-}2) .... \lim_{N\to\infty} P\left(\left|\frac{X_{Nt}}{N} - h(t)\right|^2 > \varepsilon\right) = 0$$

بشرط : $\mathbb{E}\left(\frac{X_{Nt}}{N}\right) \to h(t)$ عندما : $N \to \infty$.

نستخلص من 1 / و 2 / و 3 / أن المتغير $\frac{X_{Nt}}{N}$ متقارب احتماليا نحو الدالة h عندما $N \to \infty$.

Auteur :Ophélie Rouby. Ophélie Rouby.- Étude du modèle d'Ehrenfest , page 55- Rapport de stage, 31 août 2010.

الفصـــــل الثــالـــــث

تطبيـــق نمـــوذج إهرينفيســـت

3-1 / مقدمة :-

في هذا الفصل سوف نوضح أهمية نموذج إهرينفيست في الحياة اليومية.

لهذا سوف نختار مثال من الواقع ثم نقوم بالخطوات الآتية:

- نثبت شروط محددة على المثال المختار .
- نقوم بنمذجة هذا المثال احتماليا و ذلك وفق نموذج إهرينفيست
- نحاول تطبيق معظم نظريات **الفصل الثاني** في هذه المذكرة.

2-3 / المثال "المشكلة":-

تستعمل شركة متخصصة في إبادة الحشرات الضارة للمحاصيل الزراعية 10 طائرات .

تقوم هذه الطائرات بتزود بالوقود و المواد الكيمائية في مطار خاص بالشركة قبل تحليق نحو المزارع المتضررة من الحشرات.

سوف نهتم بوصف حركية هذه الطائرات من و إلى مطار الشركة ، وكذا زمن عودة كل طائرة.

3-3 / شروط المتخذة من أجل نمذجة المثال وفق نموذج إهرينفيست:-

1 / نقوم بتثبيت عدد الطائرات وهي 10 نرمز لهذا العدد بـ **(N=10)** .

2 / نرقم هذه الطائرات من 1 إلى 10 "وذلك للتميز بين كل طائرة و آخري" .

3 / تعمل هذه الطائرات بطريقة عشوائية أثناء الإقلاع ثم العودة للمطار .

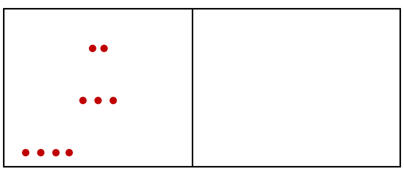
4-3 / نمذجة احتمالية للمثال وفق نموذج إهرينفيست:

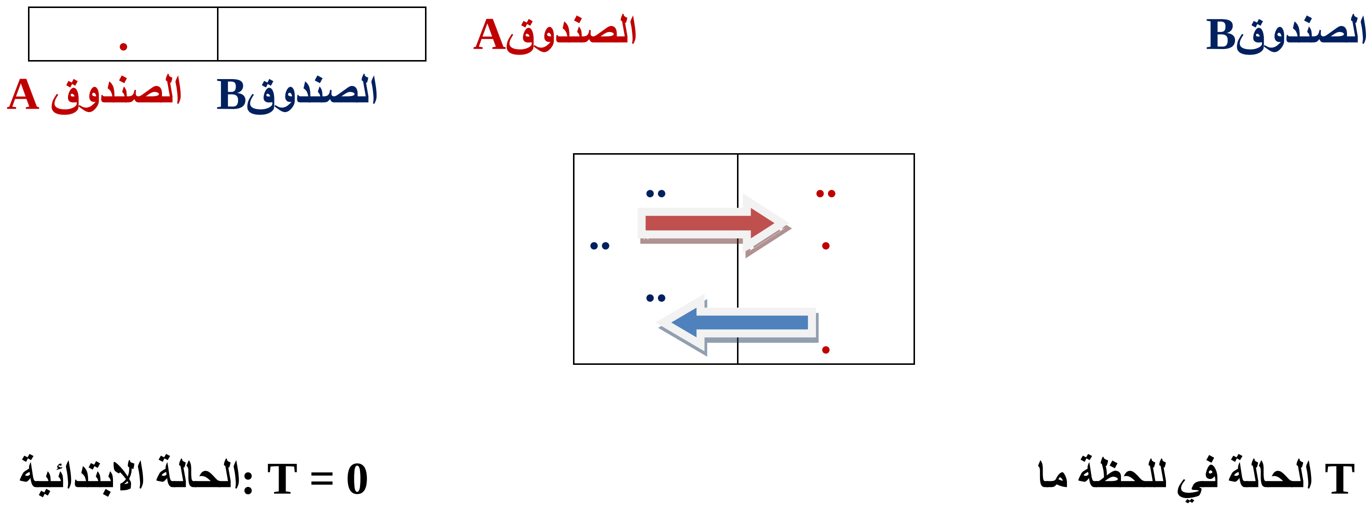
1-4-3 / التفسير المثال باستعمال الرسم :

الصندوق A يمثل **المطار** .

و الصندوق B يمثل **المزرعة المستهدفة للطائرات.**

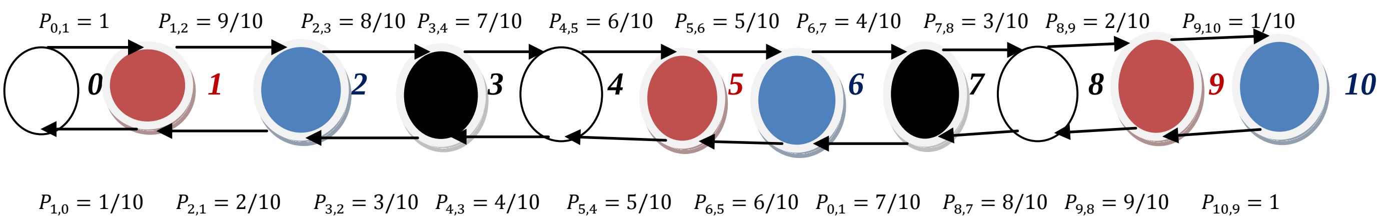
النقاط تعبر عن **الطائرات المستخدمة.**





الشكل (4)

3 -2-4 / تمثيل من خلال الرسم للتطور الاحتمالي يخص الصندوق A :



الشكل (5)

3-4-2/ مصفوفة الانتقال $\mathbb{p}$:

$$(1\text{-}4)\ldots\ldots\quad \mathbb{p}=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{10} & 0 & \frac{9}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{2}{10} & 0 & \frac{8}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{10} & 0 & \frac{6}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{10} & 0 & \frac{5}{0} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{10} & 0 & \frac{4}{10} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{10} & 0 & \frac{2}{10} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

يمكن تعريف مصفوفة الانتقال بطريقة مختصرة وهي : $\mathbb{P} = (P_{i,j})$ حيث : $i, j \in \mathcal{S} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

و الاحتمال $P_{i,j}$ معرف كتالي :

$$P_{i,j}=\begin{cases}\frac{i}{N} & si: j=i-1\\ 1-\frac{i}{N} & si: j=i+1\end{cases}\qquad \text{نعوض:}\quad \boldsymbol{N=10}$$

نجد :

$$\boldsymbol{.(2\text{-}4)\ldots.}P_{i,j}=\begin{cases}\frac{i}{10} & si: j=i-1\\ 1-\frac{i}{10} & si: j=i+1\end{cases}$$

المحاكاة باستخدام الحاسوب " La simulation informatique ":-

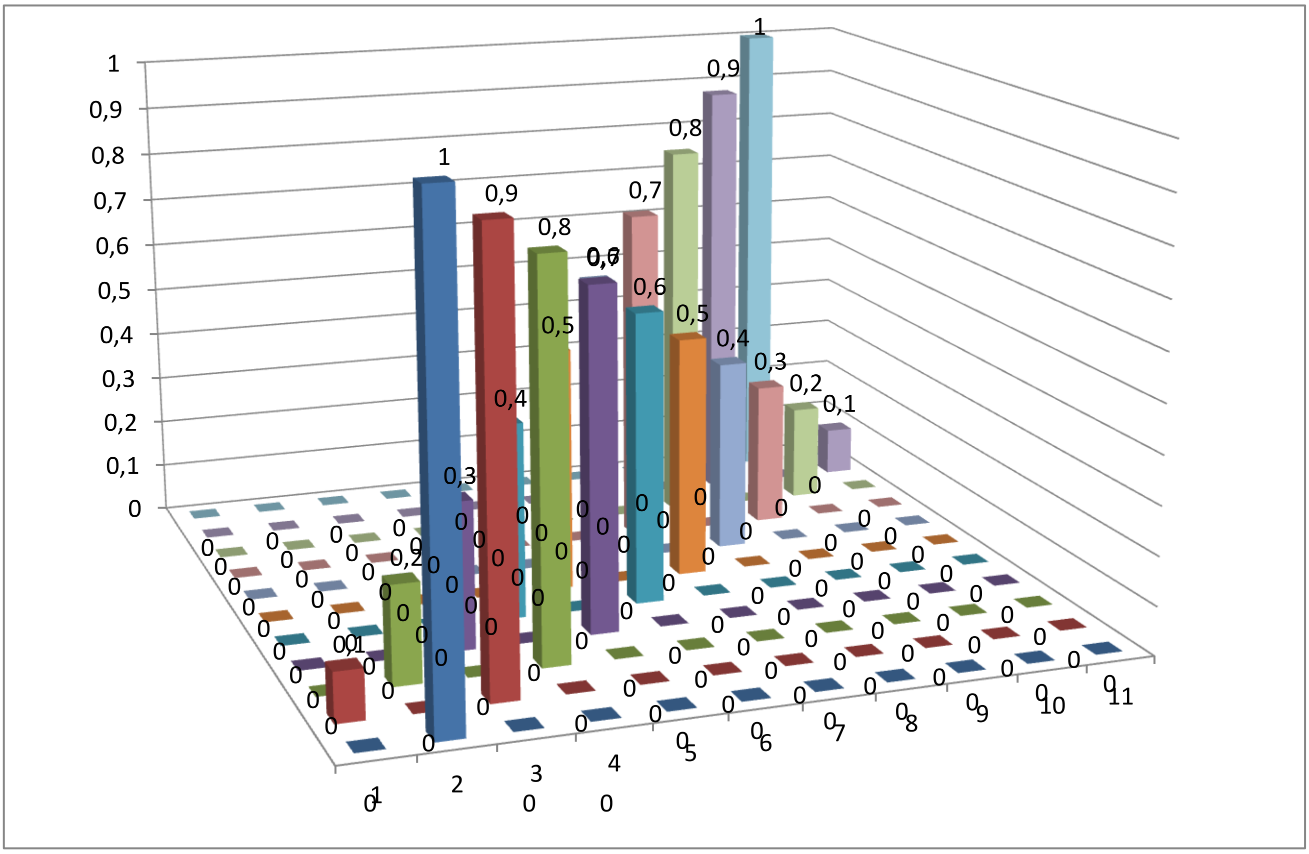
*يمكن محاكاة نموذج إهرينفيست وذلك باستعمال مجدول" **Excel** " وذلك بتابع الخطوات الآتية:*

1 / نكتب قيم مصفوفة الانتقال على مجدول "Excel" بالطريقة الآتية :

مصفوفة الانتقال $\mathbb{p}$

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0.9	0	0	0	0	0	0	0
0	0.2	0	0.8	0	0	0	0	0	0
0	0	0.3	0	0.7	0	0	0	0	0
0	0	0	0.4	0	0.6	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0
0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0
0	0	0	0	0	0	0.7	0	0.3	0
0	0	0	0	0	0	0	0.8	0	0.2
0	0	0	0	0	0	0	0	0.9	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

2/ نطلب الرسم في البعد 3D



الشكل(7)

الرسومات هي عبارة عن توزيع احتمالات للمتغير X_i حيث $0 \le i \le 10$ وهو عدد الجسيمات"الطائرات" هو N=10 .

من خلال هذا الرسم البياني ثلاثي الأبعاد نلاحظ أن هناك تناظر في توزيع عدد الطائرات أثناء مراحل عملها.

4-3 / احتساب التوزيع الاحتمالي المستقر الذي يتبع قانون ثنائي الحد" loi binomiale $\mathcal{B}\left(10,\frac{1}{2}\right)$" .

ليكن شعاع $\pi = (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_8,t_9,t_{10},t_{11})$ المتغير عشوائي و الذي يتبع التوزيع احتمال المستقر.

للحالات الممكنة N=10 .

قيمه في الفضاء $S = \{0,1,2,3,4;5,6,7,8,9,10\}$ التي تخص عدد الطائرات المنطلقة من المطار (الصندوق A).

$$\pi = \pi \mathbb{p} \iff$$

$$(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_8,t_9,t_{10},t_{11}) = (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_8,t_9,t_{10},t_{11})\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{10} & 0 & 9/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{2}{10} & 0 & \frac{8}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3/10 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{10} & 0 & \frac{6}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{10} & 0 & \frac{5}{10} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{10} & 0 & \frac{4}{10} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{10} & 0 & \frac{2}{10} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

فنحصل على جملة المعادلات التالي :

$$\begin{cases}
t_1 = \frac{1}{10}t_2\\
t_2 = t_1 + \frac{2}{10}t_3\\
t_3 = \frac{9}{10}t_2 + \frac{3}{10}t_4\\
t_4 = \frac{8}{10}t_3 + \frac{4}{10}t_5\\
t_5 = \frac{7}{10}t_4 + \frac{5}{10}t_6\\
t_6 = \frac{6}{10}t_5 + \frac{6}{10}t_7\\
t_7 = \frac{5}{10}t_6 + \frac{7}{10}t_8\\
t_8 = \frac{4}{10}t_7 + \frac{8}{10}t_9\\
t_9 = \frac{3}{10}t_8 + \frac{9}{10}t_{10}\\
t_{10} = \frac{2}{10}t_9 + t_{11}\\
t_{11} = \frac{1}{10}t_{10}
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
t_2 = 10t_1\\
t_3 = 45t_1\\
t_4 = 120t_1\\
t_5 = 210t_1\\
t_6 = 252t_1\\
t_7 = 210t_1\\
t_8 = 120t_1\\
t_9 = 45t_1\\
t_{10} = 10t_1\\
t_{11} = t_1
\end{cases}$$

نعلم أن : $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} = 1 \Leftarrow 1024t_1 = 1 \Leftarrow \boldsymbol{t_1 = \frac{1}{1024}}$

فنحصل المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع المستقر :

$$\textit{(3-4)}\ldots\ldots\pi = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1024}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{512}}, \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{1024}}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{128}}, \frac{\mathbf{105}}{\mathbf{512}}, \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{256}}, \frac{\mathbf{105}}{\mathbf{512}}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{128}}, \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{1024}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{512}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1024}}\right)$$

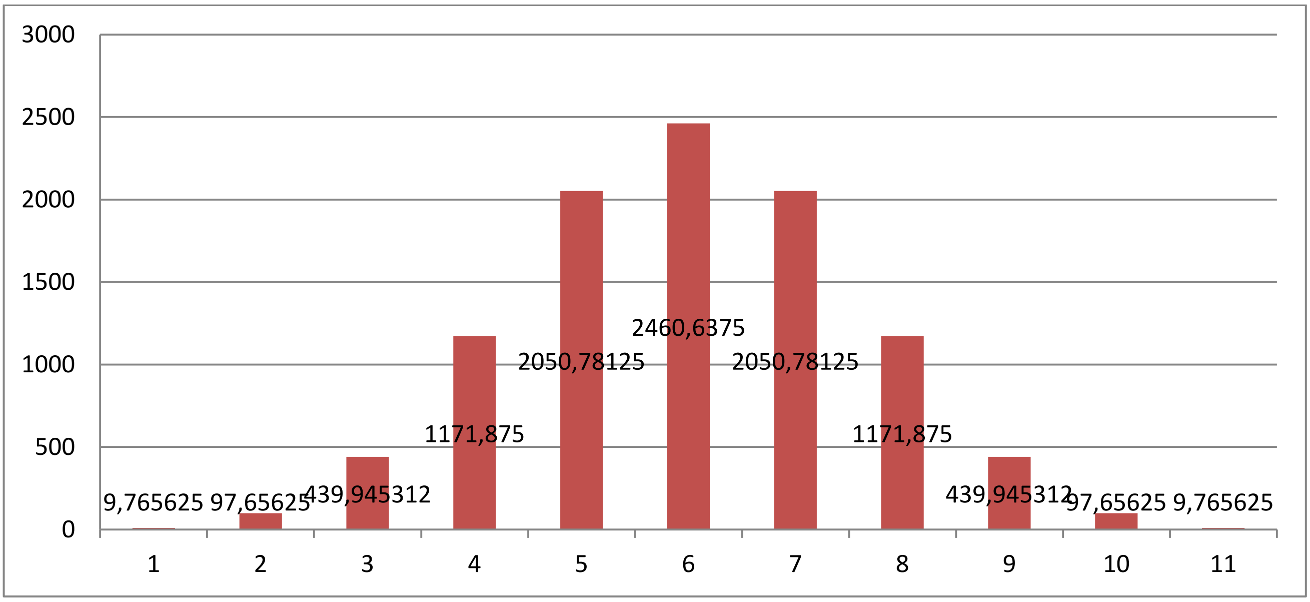
نعرف قانون ثنائي الحد $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ *كتالي :*

حيث: $0 \le k \le 10$ وعليه :- *(3-3)*.....$\pi(k) = C_k^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{k!(10-k)!} = \frac{3543,75}{k!(10-k)!}$

$$
\begin{cases}
\pi(0) = C_0^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{0!(10)!} = \frac{3543{,}75}{0!(10)!} = 9{,}765625 \times 10^{-4} = \frac{1}{1024} = t_1 \\
\pi(1) = C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{1!(9)!} = \frac{3543{,}75}{1!(9)!} = 97{,}65625 \times 10^{-4} = \frac{5}{125} = t_2 \\
\pi(2) = C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{2!(8)!} = \frac{3543{,}75}{2!(8)!} = 439{,}945312 \times 10^{-4} = \frac{45}{1024} = t_3 \\
\pi(3) = C_3^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{3!(7)!} = \frac{3543{,}75}{3!(7)!} = 1171{,}875 \times 10^{-4} = \frac{15}{128} = t_4 \\
\pi(4) = C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{4!(6)!} = \frac{3543{,}75}{4!(6)!} = 2050{,}78125 \times 10^{-4} = \frac{105}{512} = t_5 \\
\boldsymbol{\pi(5) = C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{5!(5)!} = \frac{3543{,}75}{5!(5)!} = 2460{,}6375 \times 10^{-4} = \frac{63}{256} = t_6} \\
\pi(6) = C_6^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{6!(4)!} = \frac{3543{,}75}{6!(4)!} = 2050{,}78125 \times 10^{-4} = \frac{105}{512} = t_7 \\
\pi(7) = C_7^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{7!(3)!} = \frac{3543{,}75}{7!(3)!} = 1171{,}875 \times 10^{-4} = \frac{15}{128} = t_8 \\
\pi(8) = C_8^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{8!(2)!} = \frac{3543{,}75}{8!(2)!} = 439{,}945312 \times 10^{-4} = \frac{45}{1024} = t_9 \\
\pi(9) = C_9^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{9!(1)!} = \frac{3543{,}75}{9!(1)!} = 97{,}65625 \times 10^{-4} = \frac{5}{125} = t_{10} \\
\pi(10) = C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}\frac{10!}{10!(0)!} = \frac{3543{,}75}{10!(0)!} = 9{,}765625 \times 10^{-4} = \frac{1}{1024} = t_{11}
\end{cases}
$$

الشكل (8): هو تمثيل $y = \pi(k)$ للتوزيع المستقر الذي تبع قانون $B\left(10,\frac{1}{2}\right)$

وحدة محور التراتيب في 10^{-4}



الشكــل (8):-

نلاحظ أن توزيع الاحتمال المستقر لإهرينفيست أنه توزيع يقارب التوزيع الطبيعي وذلك عندما $n \to \infty$.

5-3 / وقت التكرار :

متوسط وقت تكرار الحالة الأولية ، إذا بدأنا من الحالة: $\frac{N}{2}+k = 5 + k$ مع $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} \Longrightarrow -5 \leq k \leq 5$

وعليه : $k = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

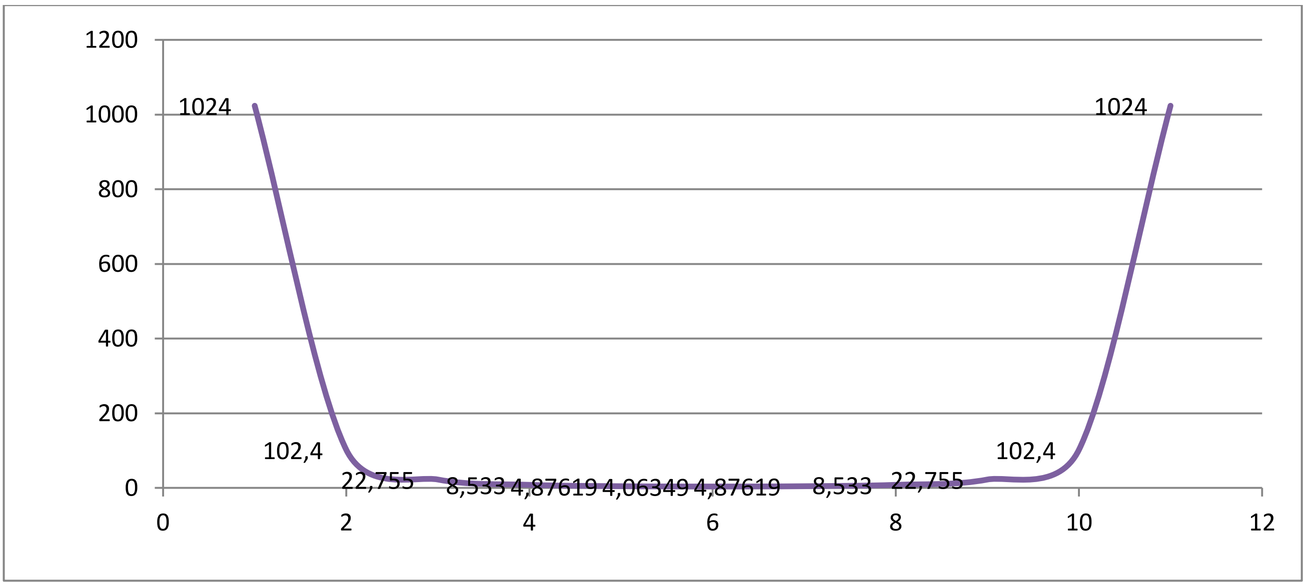
من أجل الصندوق A نجد مايلي: $\boldsymbol{\mu_{5+k} = 2^{10}\frac{(5+k)!(5-k)!}{10!}} \Longrightarrow \mu_{\frac{N}{2}+k} = 2^N\frac{\left(\frac{N}{2}+k\right)!\left(\frac{N}{2}-k\right)!}{(N)!}$ ....**(5-4)**

$$\begin{cases} si: k=-5 \Longrightarrow \mu_0 = 2^{10}\frac{(0)!(10)!}{10!} = 1024 \\ si: k=-4 \Longrightarrow \mu_1 = 2^{10}\frac{(1)!(9)!}{10!} = 102{,}4 \\ si: k=-3 \Longrightarrow \mu_2 = 2^{10}\frac{(2)!(8)!}{10!} = 22{,}755.. \\ si: k=-2 \Longrightarrow \mu_3 = 2^{10}\frac{(3)!(7)!}{10!} = 8{,}533.. \\ si: k=-1 \Longrightarrow \mu_4 = 2^{10}\frac{(4)!(6)!}{10!} = 4{,}876190.. \\ si: \boldsymbol{k=0} \Longrightarrow \boldsymbol{\mu_5 = 2^{10}\frac{(5)!(5)!}{10!} = 4{,}06349..} \\ si: k=1 \Longrightarrow \mu_6 = 2^{10}\frac{(6)!(4)!}{10!} = 4{,}876190.. \\ si: k=2 \Longrightarrow \mu_7 = 2^{10}\frac{(7)!(3)!}{10!} = 8{,}533.. \\ si: k=3 \Longrightarrow \mu_8 = 2^{10}\frac{(8)!(2)!}{10!} = 22{,}755.. \\ si: k=4 \Longrightarrow \mu_9 = 2^{10}\frac{(9)!(1)!}{10!} = 102{,}4 \\ si: k=5 \Longrightarrow \mu_{10} = 2^{10}\frac{(10)!(0)!}{10!} = 1024 \end{cases}$$

نلاحظ أن :

نلاحظ أن أقل وقت تكرار هو عندما $n = 5$ أي الحالة الأكثر تكرار هو 5 طائرات في المطار و 5طائرات خارجه

الشكل (9) : هو تمثيل $y = \mu_{5+k}$ لوقت التكرار



3-3-6/ التوقع و التباين الرياضي:

3-3-6-1 / التوقع الرياضي :

نضع : $\alpha = 1 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$ و $P_n = \frac{X_n}{N} = \frac{X_n}{10}$ مهما يكن $n \in N$ ، لدينا:

التوقع الرياضي للاحتمال P_n يساوي :

$$\mathbb{E}(P_n) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}(P_0) - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{10}\right) = \frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{10}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = 5 + (\mathbb{E}(X_0) - 5)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

لدينا أنه من أجل n=0 لدينا : $\mathbb{E}[P(X_0)] = 1$ لأن: في بداية التجربة كل الكرات في الصندوق A أي : $P(X_0 = N) =$ 1 .

ومنه : $\mathbb{E}\left(\frac{X_0}{N}\right) = 1$ وعليه $\mathbb{E}(X_0) = N = 10$

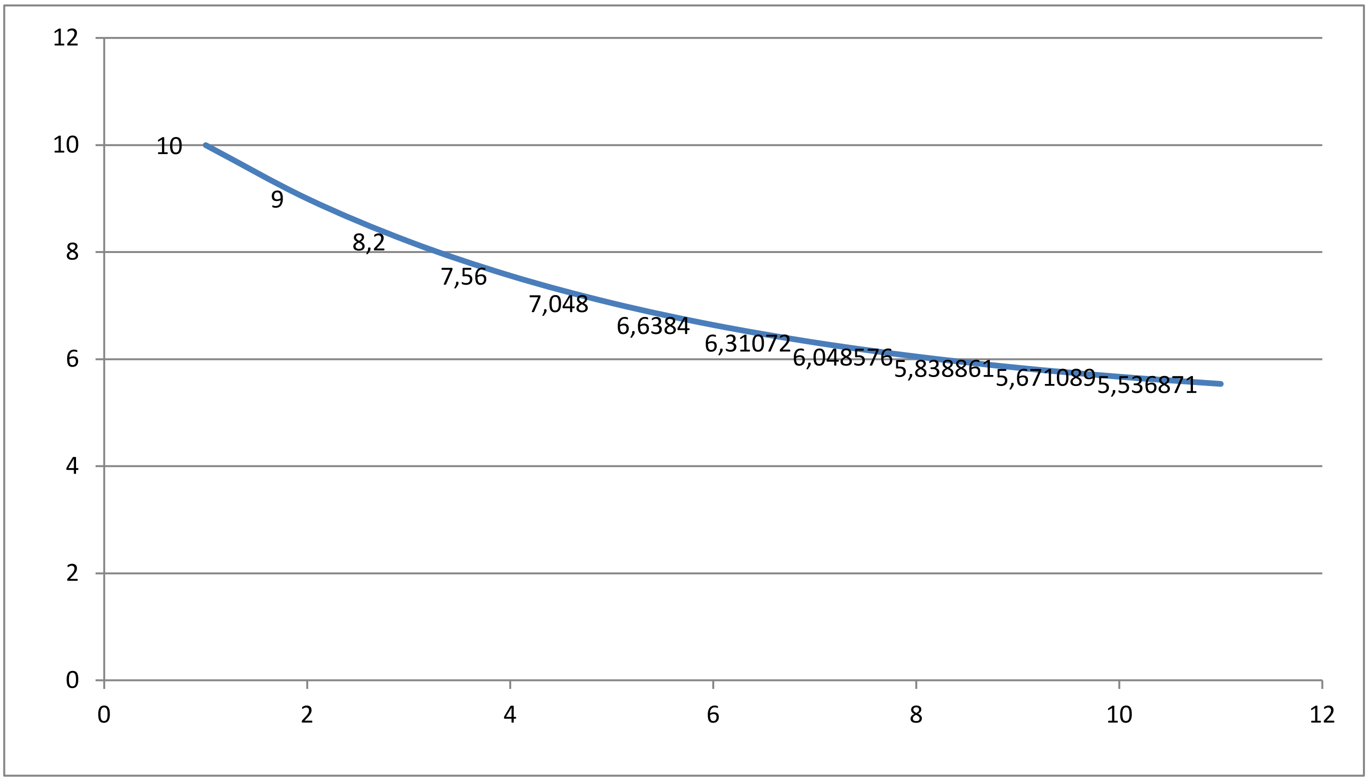
$$\textit{(6-4)}....... \mathbb{E}(\mathbf{X_n}) = \mathbf{5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^n} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 10 & si: n = 0 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^1 = 9 & si: n = 1 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 8.2 & si: n = 2 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 7.56 & si: n = 3 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 7.048 & si: n = 4 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^5 = 6.6384 & si: n = 5 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^6 = 6.31072 & si: n = 6 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^7 = 6.048576 & si: n = 7 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 5.8388608 & si: n = 8 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^9 = 5.67108864 & si: n = 9 \\ 5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 5.536870912 & si: n = 10 \end{cases}$$

* نحسب نهاية التوقع الرياضي عندما : $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbb{E}(\mathbf{X_n})] = \lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{5 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^n}\right] = \mathbf{5}$$

الشكل (10) هو التمثيل $y = \mathbb{E}(X)$ التوقع الرياضي للمتغير X_n



<u>نلاحظ أن</u> : * التمثيل $y = \mathbb{E}(X)$ التوقع الرياضي للمتغير X_n متناقص و يقارب نحو $y = 5$ عندما $n \to \infty$

**الهدف من البيان هو معرفة طبيعة التوقع الرياضي التقاربية عندما $n \to \infty$.

3-3-6-1 / التباين الرياضي :

نضع : $\alpha=\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{5}=\frac{4}{10}-1=\frac{4}{N}-1=\beta$ و $P_n=\frac{X_n}{10}$ من أجل كل $n\in N$ ، لدينا :

التباين الرياضي للاحتمال P_n يساوي:

$$\mathbb{V}(P_n)=\frac{1}{4N}+\left(\mathbb{V}(P_0)-\frac{1}{4N}\right)\beta^n+\left(\mathbb{E}(P_0)-\frac{1}{2}\right)^2(\beta^n-\alpha^{2n})$$

$$\mathbb{V}(P_n)=\frac{1}{40}+\left(\mathbb{V}(P_0)-\frac{1}{40}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\mathbb{E}(P_0)-\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\right)$$

لدينا : $P_n=\frac{X_n}{10}$ و $\mathbb{V}(X_0)=0$ و $\mathbb{E}(X_0)=10$ نجد مايلي :

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_n}{10}\right)=\frac{1}{40}+\left(-\frac{1}{40}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_n}{10}\right)=\frac{1}{40}+\left(-\frac{1}{40}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\right)$$

$$\mathbb{V}(X_n)=100\left[\frac{1}{40}+\frac{9}{40}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\right]$$

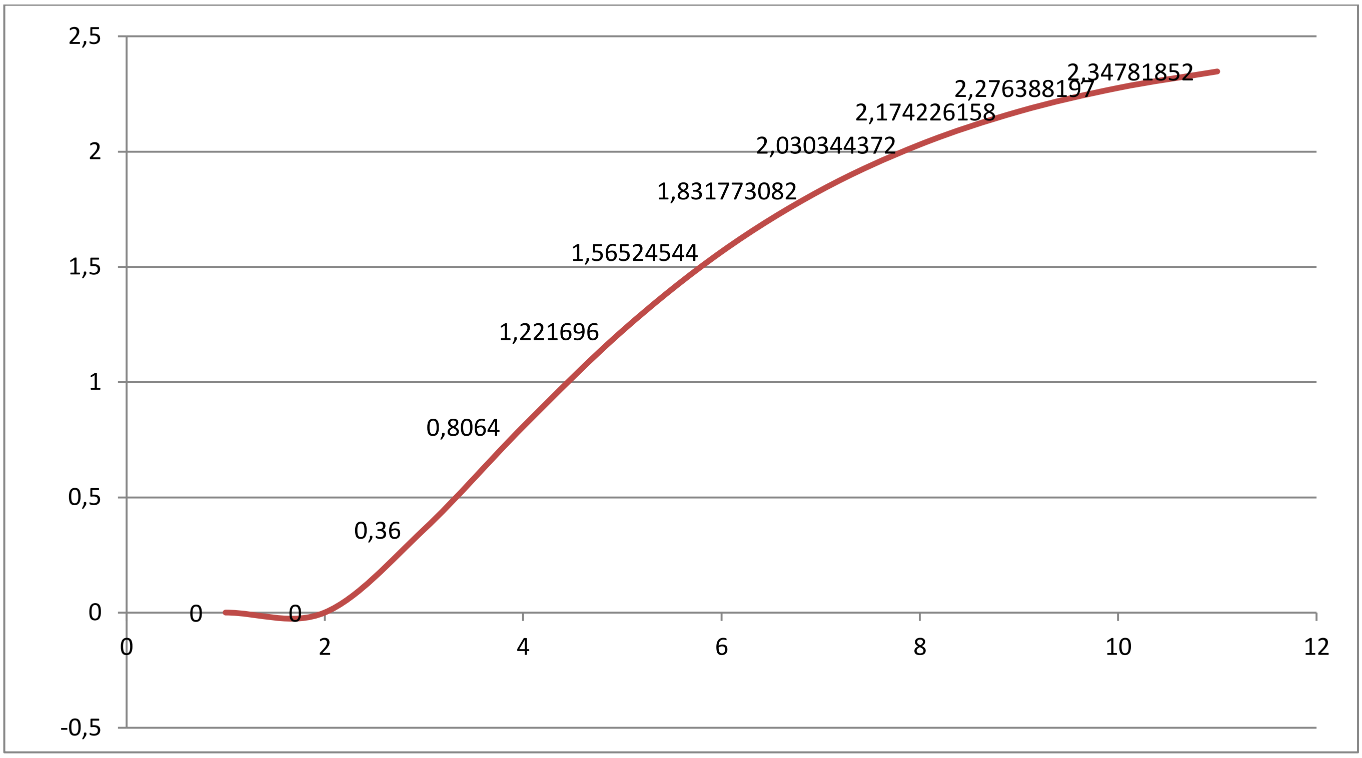
$$\textbf{(7-4)}\ldots\ldots\quad \mathbb{V}(\boldsymbol{X_n})=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{2}}\left(\frac{3}{5}\right)^n-25\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

$$\mathbb{V}(X_n)=\begin{cases}\frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^0-25\left(\frac{4}{5}\right)^0=0 & si: n=0\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^1-25\left(\frac{4}{5}\right)^2=0 & si: n=1\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2-25\left(\frac{4}{5}\right)^4=0{,}36 & si: n=2\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3-25\left(\frac{4}{5}\right)^6=0{,}8064 & si: n=3\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^4-25\left(\frac{4}{5}\right)^8=1{,}221696 & si: n=4\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^5-25\left(\frac{4}{5}\right)^{10}=1{,}56524544 & si: n=5\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^6-25\left(\frac{4}{5}\right)^{12}=1{,}8317730816 & si: n=6\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^7-25\left(\frac{4}{5}\right)^{14}=2{,}030344372224 & si: n=7\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^8-25\left(\frac{4}{5}\right)^{16}=2{,}1742261582233 & si: n=8\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^9-25\left(\frac{4}{5}\right)^{18}=2{,}2763881972629504 & si: n=9\\ \frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}-25\left(\frac{4}{5}\right)^{20}=2{,}347818519848288256 & si: n=10\end{cases}$$

* حساب نهاية تباين الرياضي لـX_n عندما $n\to\infty$:

$$\mathbf{lim}_{n\to\infty}[\ \mathbb{V}(\boldsymbol{X_n})]=\mathbf{lim}_{n\to\infty}\left[\frac{5}{2}+\frac{45}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-\mathbf{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\right]=\frac{5}{2}=\mathbf{2,5}$$

الشكل (11) هو التمثيل لـ $y = \mathbb{V}(X)$ التباين الرياضي للمتغير X_n



نلاحظ أن: *التمثيل لـ $y = \mathbb{V}(X)$ التباين الرياضي للمتغير X_n متزايد و متقارب نحو $y = 2,5$ عندما $n \to \infty$

** يهدف هذا البيان هو معرفة طبيعة تغيرات التباين وكذا تقاربه عندما $n \to \infty$.

الخــلاصــة:

- إلى غاية سنة 1900 كان شغل علماء الفيزياء حول تفسير ظاهرة التسرب الحراري, ولعل أهم سؤال في ذلك الوقت هو عودة الجزيئات المتسربة من عدمها, بحيث في ذلك الوقت الوسائل المستعملة كانت عاجزة عن تحديد المفهوم الحقيقي لهذه الظاهرة.

- مع تطور الرياضيات على وجه الخصوص الاحتمالات في سنة 1907 ظهر أول نموذج للعالم الفيزيائي "إهرينفيست". حيث أن هذا النموذج أستعمل براهين رياضية تفسر هذه الظاهرة , و تم الإجابة عن السؤال هو عودة كل جزيئات المتسربة.

- أستعمل صندوقين اقتراع A و B بحيث أن الصندوق A يحوي N كرة مرقمة من 1 إلى N و الصندوق B فارغ. وهي تجربة "صندوق إهرينفيست" تقوم على سحب عشوائي لكرة من الصندوق A ثم نضعها في الصندوق B و ثم العكس, بشرط أن الكرة المسحوبة من صندوق لا تكون موجودة في الصندوق الآخر و تخصيص الوقت الكافي لهذه التجربة.

- أثناء تسجيل نتائج التجربة نعتمد على مفاهيم الرياضيات الآتية " سلاسل ماركوف" -"مصفوفة الانتقال"

"التوزيع الاحتمالي المستقر" -"حساب التوقع و التباين الرياضي"

فكانت النتائج المتحصل عليها جد مهمة من بينها

* تحديد و بدقة كيفية توزيع الجزيئات المتنقلة بين وسطين من خلال غشاء مسامي.

* تحديد وقت عودة هذه الجزيئات إلي حالتها الابتدائية.

* من خلال هذا النموذج يمكن وضع التوقعات للحركية هذه الجزئيات.

* يمكن وضع برامج تحاكي هذه الظاهرة و توضحها أكثر.

- في الأخير نشير أن نموذج "إهرينفيست" في الوقت الحالي يتم استعماله في كثير من الميادين نذكر على سبيل المثال

**الهجرة السكانية .

** في مجال التربو ديناميك .

** ميدان الصحة العمومية .

المراجــــــع :

[1] *Étude du modèle d'Ehrenfest- Ophélie Rouby*

Rapport de stage, 31 août 201

***[2]** Introduction aux chaînes de Markov pour les professeurs*

Auteur : Raymond Moché

***[3]** Initiation aux Probabilisé et aux châınes de Markov- Pierre Brémaud*

Deuxieme edition entierement revisee

William Feller An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1, 3rd Edition, Wiley, New York (1968), p.121 et pp.377-378.

***[4]** Jean-Dominique Deuschel and Daniel W. Stroock. Large Deviations. American mathematical Society, 1989.*

***[5]** Frédéric BEAU, Michel Janvier, Alain MARIE-JEANNE Simulation d'expériences aléatoires et traitement statistique des données, in Suivi de formation à distance pour les enseignants de Mathématiques, I.R.E.M. de Montpellier, Université Montpellier II (2002)*

***[6]** Quelques aspects des chaînes de Markov*

Djalil Chafaï

Décembre 2006, Biskra, Algérie. Compilé le 18 janvier 2007

ملخص:-

نموذج إهرينفيست هو عبارة عن تطبيق سلاسل مركوف' كان أول ظهوره في سنة 1907 .

من خلال هذا النموذج تم تفسير الصحيح لعديد من ظواهر الفيزيائية لعملية انتقال العشوائي N جسيمات المادية من المكان A نحو المكان B أو العكس .

في هذه الرسالة تم توضيح بنية هذا النموذج و كل ما تعلق بجوانبه النظرية، ثم تطبيق معظم النتائج النظرية على مثال مختار و كذا نقوم محاكاة نتائج المتحصل عليها بواسطة مخططات توضيحية.

Résumé: -

Le modèle Ehrenfest est l'application des chaînes de Markov, Sa première apparition était en 1907 .

A travers ce modèle, l'interprétation correcte de nombreux phénomènes physiques a été expliquée, Pour le transfert aléatoire de N particules physiques de la place A à la place B ou inversement.

Dans cette thèse, la structure de ce modèle et ses aspects théoriques sont expliqués, Appliquez ensuite la plupart des résultats théoriques à un exemple sélectionné Nous simulons également les résultats obtenus par des schémas illustratifs.

Summary: -

The Ehrenfest model is the application of Markov chains, His first appearance was in 1907.

Through this model, the correct interpretation of many physical phenomena has been explained, for the random transfer of N physical particles from place A to place B or vice versa.

In this thesis, the structure of this model and its theoretical aspects are explained, Then apply most of the theoretical results to a selected example We also simulate the results obtained by illustrative diagrams.