جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماستر أكاديمي

الميدان :رياضيات و إعلام آلي

الشعبة :رياضيات

التخصص :تحليل دالي

من إعداد الطالب : مقداد تهامي عصام الدين

تحت إشراف الأستاذ : عمارة قرفي

تحت عنوان

طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا

نوقشت يوم 07 جويلية 2019 من طرف أعضاء اللجنة :

الأستاذ : مصطفى عسيلة	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الأستاذ : السعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الأستاذ : عمارة قرفي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية 2018-2019

شكر وعرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

"*وما توفيقي إلا بالله*"

الحمد لله الذي أخرجني من الظلمات إلى النور وسهل لي طريق العلم

الحمد لله الذي هداني وكل الإحسان أتاني و أن وفقني لإنجاز هذا العمل والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى صلى الله عليه وسلم ، الذي قال ....

"((....من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله به طريق إلى الجنة..))"

بعد إسدال الستار على العام الجامعي الخامس ، وبمناسبة إتمام مذكرتي في الماستر أتقدم بالشكر الجزيل إلى الأستاذ القدير :

"الدكتور عمـــارة قرفـــي"

على إقتراحه موضوع المذكرة ، وما بذله من جهد ومتابعة مدة الإشراف ، الذي لم تكتفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره عليَّ لإتمام هذا العمل

لا يفوتني توجيه الشكر والتقدير الى أساتذة اللجنة المناقشة : إلى الأستاذ " **سليم بديجة** " على قبوله ترؤس لجنةالمناقشة، و الأستاذ الدكتور "**السعيد محمد السعيد** " على قبوله مناقشة هذه المذكرة.

كما أوجه تحية عطرة ونيّرة إلى كل أساتذة قسم الرياضيات .

إهـــداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبنوره تتنزل البركات

أهذي ثمرة جهدي إلى

رمز الحب الصافي ونبع الحنان والعطاء الوافي إلى التي أوصى بها خير الأنام

وجعلت الجنة إكراما لها تحت الأقدام

"أمي ....أمي لآخر يوم في عمري "

إلى من أهداني بسمة الأمل وعلمني المبادئ والكفاح و أن أسير إلى طريق النجاح لنيل المبتغى

"أبي العزيز "

إلى من قاسمني فرحة نجاحي كل سنة وفي كل لحظة طوال مشواري الدراسي

" عائلتي و أصدقائي "

إلى حاملي مشعل العلم والأمل وساروا بهذا النهج من معلمي الأول إلى أستاذي اليوم.

إلى كل أساتـــــــــــــــدة وطلبة قسم الرياضيـــــــــــات

مقداد تهامي عصام الدين

الفَهرَس

مقدّمـــــة

إنه من المعروف جيدا هذه المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية لفولتيرا توجد في الكثير من المجالات العلمية مثل ديناميكية السكان , إنتشار الأوبيئة , و أجهزة المواصلات .

بدأ فولتيرا العمل على المعادلات التكاملية في 1884 , لكن دراسته الجادة بدأت في 1896 .

ـ الإسم " المعادلات التكاملية " أطلق من طرف Bois-Reymond في 1888 ,

هدفنا في هذه المذكرة دراسة المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمط الأول و النمط الثاني . المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا تتميز بمتغير واحد على الأقل من التكامل .

معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية غير الخطية من النوع الثاني تكتب كالتالي :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt$$

و الشكل الثاني لمعادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية غير الخطية من النوع الأول تقدم كالتالي :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt; k_2(x,x) \neq 0$$

وعلى هذا الأساس اخترنا عنوان المذكرة :

" طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا"

قسمنا هذه المذكرة إلى ثلاثة فصول :

"الفصل الأول :" "أشرنا لأشكال المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية نذكر منها : معادلة فريد هولم التكاملية , معادلة وينز هويف التكاملية , معادلة آبل التكاملية , معادلة رينوال التكاملية , معادلة التكاملية المختلطة , معادلة فولتيرا التكاملية . أما غير خطية معادلة هامر يشتين التكاملية , معادلة كوشي الشاذة , معادلة فريد هولم-فولتيرا التكاملية , معادلة يورشون فولتيرا . ثم وضحنا شروط وجود و وحدانية حل المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرا .

"الفصل الثاني :" "قمنا بدراسة طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمطين الثاني و الأول , بالنسبة للنمط الثاني تطرقنا إلى : الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلة , طريقة تكرار المتغير , طريقة الحل على شكل سلسلة . أما بالنسبة للنمط الأول تطرقنا إلى : الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلة , تحويل معادلة فولتيرا الغير خطية إلى النمط الثاني .

"الفصل الثالث :" "درسنا أنظمة المعادلات التكامل-تفاضية الغير خطية لفولتيرا من النمط الثاني ذكرنا طريقة التكرار التبايني , الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلة

الفصل

1

أشكال المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية

بالرغم من أن معظم المسائل الفيزيائية يمكن صياغتها و تحليلها بدلالة المعادلات التفاضلية إلا أنه يمكننا إستبدال المعادلات التفاضلية بمعادلات تكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية ليكون حل المعادلة بكفاءة أكثر و بطرق أبسط و في ما يلي سوف نذكر أشكال المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية .

تعريف 1.0.1 المعادلة التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المتغير تحت علامة التكامل و قد يضاف أيضا خارج التكامل و يكون في أحد طرفي المعادلة و تكون على سبيل المثال :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

$$0 = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.2}$$

فإذا كان x (الجزء العلوي لتكامل) عدد ثابت فهي معادلة فريد هولم و أما إذا كان متغير فهي لفولتيرا .

و هي عبارة عن معادلات تكاملية حيث الدالة :

- $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة .
- $f(x)$ و $k(x,t)$ دوال معلومة و قد تكون مركبة أو حقيقية و ذلك في قيم x و t .
- و هناك نوعان من المعادلات التكاملية معادلات تكاملية خطية و غير خطية .

1.1 المعادلات التكاملية الخطية

يقال عن المعادلات التكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات الخطية منطبقة و محققة على الدوال المجهولة و تكون المعادلات التكاملية الخطية بصفة عامة من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (1.3)$$

حيث :

ـ b ثابت (فريد هولم) أو متغير (فولتيرا) .

- λ ثابت يحمل (معاني فيزيائية عن خواص المادة) .

- $k(x,t)$ معلومة و تسمى نواة المعادلة و (تحمل صفات و خواص المادة المستخدمة) و قد تكون مستمرة أو غير مستمرة .

- $f(x)$ الدالة معلومة أيضا (أما بالمفهوم الفيزيائي تمثل دالة السطح المراد حساب التكامل عليه) .

أما $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها و (تمثل فيزيائيا دالة الهمد) .

و المعادلات (1.3) خطية لأن الدالة المجهولة هي من الدرجة الأولى .

و هناك العديد من أشكال المعادلات التكاملية الخطية و منها :

ـ معادلة فريد هولم التكاملية .

ـ معادلة وينز هويف التكاملية .

ـ معادلة آبل التكاملية .

ـ معادلة رينوال التكاملية.

ـ معادلة التكاملية المختلطة .

ـ معادلة فولتيرا التكاملية .

و في ما يلي سوف نذكر بعض أشكال المعادلات التكاملية الخطية :

1.1.1 معادلة فريد هولم التكاملية:

في جميع معادلات فريد هولم التكاملية تكون نهاية الجزء العلوي عبارة عن ثابت محدد , معلوم أي $x\epsilon[a,b]$ و تكون غلى الشكل التالي :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (1.4)$$

ـ في المعادلة)1.4(إذا كان $\mu = 0$ أي أن المعادلة من الشكل :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.5}$$

فهي معادلة فريد هولم من النمط الأول .
ـ في المعادلة)1.4(أيضا إذا كان $\mu = C^{int} \neq 0$ أي المعادلة من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

و في هذه الحالة نقول أن معادلة فريد هولم من النمط الثاني .
ـ و في حالة حاصة لما $\mu = 1$ و $f(x) = 0$ أي تصبح المعادلة)1.4(من الشكل

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.7}$$

و هي معادلة فريد هولم التكاملية المتجانسة .
ـ تكون المعادلة)1.4(من النمط الثالث في حالة $\mu = \mu(x)$

1.1.2 معادلة فولتيرا التكاملية:

تكون معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.8}$$

و تكون من النمط الأول إذا كان $\mu = 0$, و من النمط الثاني لما $\mu = C^{int} \neq 0$, و النمط الثالث لما يكون $\mu = \mu(x)$

ملاحظة 1.1.1 :
ليس شكل المعادلة هو الدليل على نوعها فمعادلة فريد هولم نشأت من مسألة تفاضلية ذات شروط حدية بينما معادلة فولتيرا فقد نشأت من مسألة تفاضلية ذات شروط إبتدائية .

1.1.3 معادلة وينر هويف التكاملية :

تسمى المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt \tag{1.9}$$

معادلة وينر هويف التكاملية

1.1.4 معادلة رينوال التكاملية:

تسمى المعادلة التكاملية من الشكل

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x-t)\varphi(t)dt \tag{1.10}$$

معادلة رينوال التكاملية

1.1.5 معادلة آبل التكاملية :

تكون معادلة آبل التكاملية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{1.11}$$

حيث $0 \leqslant \alpha < 1$
و قد سميت بهذا الإسم نسبة إلى العالم آبل الذي توصل إليها

1.1.6 معادلة كوشي الشاذة:

و تكون المعادلة من الشكل

$$\alpha(x)\varphi(x) + b(x)\int_r \frac{\varphi(t)}{(x-t)}dt + \int_r k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{1.12}$$

حيث r يعني مجال مغلق أو مفتوح .

معادلة التكاملية المختلطة:

نعتبر المعادلات التالية

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t F(x,T)\varphi(x,t)dT + \tag{1.13}$$
$$\lambda \textstyle\int_a^b k(x,r)\varphi(r,t)dr$$

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_a^b F(t,T)k(x,r)\varphi(r,T)drdT \tag{1.14}$$

حيث $T < \infty$, $t \in [0,T]$, $x \in [a,b]$
ـ نسمي المعادلة (1.13) بمعادلة لفريد هولم-فولتيرا , أما المعادلة (1.14) بمعادلة فولتيرا-فريد هولم .

ـ الجزء التكاملي لفريد هولم مقاسا بالنسبة للموضع بينما الجزء التكاملي الخاص بفولتيرا يعتبر مقاسا بالنسبة للزمن .
ـ الدالة $k(x,t)$ مقاسا بالنسبة للموضع , الدالة $F(t,T)$ مقاسا بالنسبة للزمن .
ـ الدالة $f(x,t)$ دالة معلومة , و λ ثابت قد يكون مركب و هو يحمل معاني فيزيائية .
ـ $\varphi(x,t)$ هي الدالة المجهولة المراد تعيينها , و يكون الحل محقق في الفضاء

$L_2([a,b])\times C[0,T], 0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$

1.2 المعادلات التكاملية غير الخطية

تعريف 1.2.1 المعادلة التكاملية غير الخطية هي معادلة يكون المجهول فيها تحت علامة التكامل حيث تكون الدالة المجهولة عبارة عن دالة مركبة , أي تكون:

$F(\varphi(x))$ على سبيل المثال

$\varphi^2(x), \varphi^3(x), \cos\varphi(x), \sin\varphi(x), e^{\varphi}(x)$..........

قد يضاف المجهول خارج علامة التكامل .

و هناك العديد من أشكال غير الخطية نذكر بعضا منها :

1.2.1 معادلة يورشون-فولتيرا :

شكلها

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.15}$$

حيث :

$$x \in [0,T]; T < \infty$$

حيث $f(x), k(x,t,\varphi(t))$ دالتان معلومتان أي $f(x) \in C[0,T]$ و λ ثابت يحمل معاني فيزيائية و $\varphi(x)$ الدالة المجهولة .

نسمي المعادلة (1.15) بمعادلة فولتيرا الغير خطية .

و تكون من النمط الأول إذا كان $\mu = 0$.

تكون من النمط الثاني إذا كان $\mu = C^{int} \neq 0$.

تكون من النمط الثالث إذا كان $\mu = \mu(x)$.

و بصفة عامة نسمي المعادلة التكاملية الغير خطية إذا إختلفت درجة الدالة المجهولة عن الواحد الصحيح .

1.2.2 معادلة هامر يشتين التكاملية

معادلة هامر يشتين التكاملية تكون من الشكل :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x,t)F(t,\varphi(t))dt \tag{1.16}$$

حيث :

$$D \subset \Re^n, 1 \leqslant n$$

و نعتمد على قيم μ فإذا كانت $\mu = 1$ لتصبح المعادلةمن الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(t,\varphi(x))dt \tag{1.17}$$

فإننا نسمي المعادلة)1.17(بمعادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية من النمط الثاني .
أما في حالة $\mu = 0$ تصبح المعادلة من الشكل :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(t,\varphi(t))dt = 0 \tag{1.18}$$

فإننا نسمي المعادلة)1.18(بمعادلة هامر يشتين-فولتيرا التكاملية من النمط الأول .

1.2.3 معادلة كوشي الشاذة :

تكون هذه المعادلة من الشكل :

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_r \frac{\varphi(t)}{(t-x)}dt + \int_r F(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{1.19}$$

1.2.4 معادلة فريد هولم-فولتيرا التكاملية

تكون معادلة فريد هولم-فولتيرا غير حطية من الشكل :

$$\mu\varphi(\bar{x},t) + \lambda \int_\eta k(\bar{x}-\bar{\xi},\bar{y}-\bar{s})F(t,\varphi(\bar{\xi},\bar{s}))d\bar{\xi}d\bar{s} + \tag{1.20}$$

$$\lambda \textstyle\int_0^t G(t,T)\varphi(\bar{x},\bar{y},T)dT = f(\bar{x},\bar{y},T)$$

حيث :

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3.....x_n), \bar{t} = t(t_1, t_2, t_3.....t_n)$$

نسمي المعادلة)1.20(بمعادلة فريد هولم-فولتيرا الغير خطية , حيث η تعتمد على منحنى التكامل .

1.3 مسألة الوجود و الوحدانية لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية

سوف نكتفي في هذا الجزء على ذكر شروط وجود و وحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية و التي من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x G(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.21}$$

لإثبات وجود و وحدتنية الحل للمعادلة)1.21(يكفي حل مسألة كوشي و هو تحقيق الشروط التالية :

- تكامل الدالة $f(x)$ محدود على المجال $x \in [a,b]$.
- تكامل الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ محدود أي $|G(x,t,\varphi(t))|$ حيث

$$a \leqslant x, r \leqslant b$$

- الدالة $f(x)$ تحقق شرط ليبشيتز على المجال $x \in [a,b]$ أي

$$|f(x) - f(t)| < k|x - t|$$

- الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ تحقق شرط ليبشيتز أي

$$|G(x,t,z) - G(x,t,\acute{z})| < k|z - \acute{z}|$$

الفصل

2

طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا

2.0 تمهيد:

لقد تعددت طرق حل المعادلات التكاملية و التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمطين الأول و الثاني , فسوف نتطرق لذكر طرق الحل لكل نمط .

2.1 معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمط الثاني:

تكتب على الشكل :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \qquad (2.1)$$

حيث :

$u^{(i)}(x)$ ال (i) تمثل درجت الإشتقاق , $F(u(t))$ دالة غير خطية , و الدالة $f(x)$ و النواة $k(x,t)$ معلومتان , أما الدالة $u(x)$ هي الدالة المجهولة .

من الضروري تحديد الشروط الأولية لتحديد الحل الخاص $u(x)$ لهذه المعادلة .

* و في هذه الحالة سوف نتطرق إلى طرق الحل التالية :

- طريقةالجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية .
- طريقة تكرار التغير .
- طريقة الحل على شكل سلسلة .

* بعض خصائص تحويل لابلاص :

ـ الخطية :

$$L(\alpha f(t)+\beta g(t))=\alpha f(t)+\beta g(t) \tag{2.2}$$

ـ التناسب :

$$L(Af(t))=AL(f(t)) \tag{2.3}$$

ـ التفاضلية :

$$L(\frac{d^n f(t)}{dt^n})=p^n F(p)-\sum_{k-1}^{n} p^{n-k} f^{k-1}(0) \tag{2.4}$$

ـ الإزاحة في المجال p :

$$L(e^{at} f(t))=F(p-a) \tag{2.5}$$

ـ الجداء التنسوري :

$$f*g=L(\int_0^t f(t-s)g(s)ds)=F(p).G(p) \tag{2.6}$$

2.1.1 طرق الحل

2.1.2 طريقةاجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية

سوف نأخذ بعين الإعتبار النواة $k(x,t)$ كنواة الفرق الذي يعتمد على الفرق $(x-t)$ كهذه (e^{x-t}) , $cosh(x-t)$ و $sin(x-t)$.

معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية يمكن تمثيلها كالتالي :

$$u^{(i)}(x)=f(x)+\int_0^x k(x-t)F(u(t))dt \tag{2.7}$$

لحل هذه المعادلة نستخدم طريقة تحويل لابلاص فنجد :

$$L(u^{(i)}(x))=p^i L(u(x))-p^{i-1}u(0)-p^{i-2}u'(0)-.....-u^{(i-1)}(0) \tag{2.8}$$

و منه :

$$p^i L(u(x))-p^{i-1}u(0)-p^{i-2}u'(0)-....-u^{(i-1)}= \tag{2.9}$$

$$L(f(x))+L(k(x-t))\times L(F(u(x)))$$

نقسم على p^i

$$L(u(x))=\frac{1}{p}u(0)+\frac{1}{p^2}u'(0)+.....+\frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{p^i}L(k(x-t))\times L(F(u(x))) \quad (2.10)$$

للتغلب على صعوبة الغير خطية $F(u(x))$ نطبق طريقة أدوميان التحليلية , في الأول نركز على الخطية $u(x)$ التي في الجانب الأيسر من السلسلة اللانهائية

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \quad (2.11)$$

حيث : $n\geqslant 0$

$u(x)$ سيكون بشكل متكرر . و مع ذلك الغير خطية $F(u(x))$ التي في الجانب الأيمن سوف تمثلها السلسلة اللانهائية متعددة الحدود لأدوميان A_n على الشكل :

$$F(u(x))=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x) \quad (2.12)$$

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[F(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \quad (2.13)$$

حيث A_n , $n\geqslant 0$ يمكن الحصول عليها لجميع الأشكال الغير خطية .

بتعويض (2.11) , (2.12) , (2.13) في (2.10) نجد :

$$L(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x))=\frac{1}{p}u(0)+....+\frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{p^i}L(f(x))+\frac{1}{p^i}L(k(x-t))\times L(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)) \quad (2.14)$$

طريقة أدوميان التحليلية بالشكل التالي :

$$L(u_0(x))=\frac{1}{p}u(0)+\frac{1}{p^2}u'(0)+....+\frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0)+\frac{1}{p^i}L(f(x)) \quad (2.15)$$

$$L(u_{k+1}(x))=\frac{1}{p^i}L(k(x-t))\times L(A_k(x));k\geqslant 0 \quad (2.16)$$

بتطبيق تحويل لابلاص العكسي على الجزء الأول من (2.16) يعطي $u_0(x)$, التي ستحدد A_0 . و هذا بدوره سيؤدي إلى التصميم الكامل لمكونات u_{k+1} , $k\geqslant 0$ عند إستخدام الجزء الثاني من (2.16)

. الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية لحل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمط الثاني سيتم توضيح ذلك من خلال دراسة المثال التالي .

مثال 2.1.1 :

لدينا :

$$u'(x)=\frac{9}{4}-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2-3e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\int_0^x(x-t)u^2(t)dt \qquad (2.17)$$

حيث :

$$u(0)=2$$

بإدخال تحويل لابلاص نجد :

$$L(u'(x))=L(\frac{9}{4}-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x^2-3e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x})+L((x-t)*u^2(x)) \qquad (2.18)$$

حيث :

$$L(u'(x))=pL(u(x))-u(0)=pU(p)-u(0)$$

$$L(1)=\frac{1}{p}$$

$$L(x)=\frac{1}{p^2}$$

$$L(x^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$L(e^{ax})=\frac{1}{p-a}$$

و منه :

$$pU(p)-u(0)=\frac{9}{4p}-\frac{5}{2p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}+\frac{1}{p^3}L(u^2(x)) \qquad (2.19)$$

من أجل $u(0)=2$ نجد :

$$U(p)=\frac{2}{p}+\frac{9}{4p^2}-\frac{5}{2p^3}-\frac{1}{p^4}-\frac{3}{p(p+1)}-\frac{1}{4p(p+2)}+\frac{1}{p^3}L(u^2(x)) \qquad (2.20)$$

بإدخال طريقة التحليل و من أجل $n=0$ نجد :

$$U_0(s)=\frac{2}{p}+\frac{9}{4p^2}-\frac{5}{2p^3}-\frac{1}{p^4}-\frac{3}{p(p+1)}-\frac{1}{4p(p+2)} \qquad (2.21)$$

$$L(u_{k+1}(x))=\frac{1}{p^3}L(A_k(x))$$

حيث : $k\geqslant 0$

نسمي هذا بمتعدد الحدود لأدوميان من أجل $F(u(x))=u^2(x)$ تقدم كالتالي :

$$A_0 = \frac{1}{0!}[F(u_0)]_{\lambda=0}$$

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}[F(u_0 + \lambda u_1)]'_{\lambda=0}$$

$$A_1 = [(u_0 + \lambda u_1)^2]'_{\lambda=0}$$

$$A_1 = [u_0^2 + \lambda^2 u_1^2 + 2\lambda u_0 u_1]'_{\lambda=0} = [2\lambda u_1^2 + 2u_0 u_1]$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}[F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]''_{\lambda=0} = \frac{1}{2}[(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2]''_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[u_0^2 + \lambda u_0 u_1 + \lambda^2 u_0 u_2 + \lambda u_0 u_1 + \lambda^2 u_1^2 + \lambda^3 u_1 u_2 + \lambda^2 u_0 u_2 + \lambda^3 u_1 u_2 + \lambda^4 u_2^2]''_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(2u_0 u_2 + 2u_1^2 + 6\lambda u_1 u_2 + 2u_0 u_2 + 6\lambda u_1 u_2 + 12\lambda^2 u_2^2)_{\lambda=0} = \frac{1}{2}(4u_0 u_2 + 2u_1^2)$$

$$A_2 = 2u_0 u_2 + u_1^2$$

و منه يصبح لدينا :

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = 2u_0 u_2 + u_1^2$$

بإسعمال تحويل لابلاص العكسي نجد :

أولا :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+2)}$$

و عليه يكون :

$$U_0(p) = \frac{2}{p} + \frac{9}{4p^2} - \frac{5}{2p^3} - \frac{1}{p^4} - \frac{3}{p} + \frac{3}{p+1} - \frac{1}{8p} + \frac{1}{8(p+2)}$$

$$u_0(p) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - 3 + 3e^{-x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$u_0(p) =$$
$$-1+\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3+3(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5)-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(1-2x+2x^2-\frac{8}{6}x^3+\frac{16}{4!}x^4-\frac{32}{5!}x^5)$$

و منه نجد :

$$u_0(x) = 2 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{5}{3!}x^3 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{7}{5!}x^5 + ... \qquad (2.22)$$

نحسب u_1

$$L(u_1(x)) = \frac{1}{p^3}L[A_0(x)]$$

حيث : $A_0 = u_0^2$

$$u_0^2 = (2 - x + \frac{1}{2}x^2)^2 = 4 - 4x + 3x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

بإدخال تحويل لابلاص :

$$L(u_0^2) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{6}{p^3} - \frac{6}{p^4} + \frac{1}{4}\frac{4!}{p^5}$$

$$\frac{1}{p^3}L(u_0^2) = \frac{4}{p^4} - \frac{4}{p^5} + \frac{6}{p^6} - \frac{6}{p^7} + \frac{1}{4}\frac{4!}{p^8}$$

$$u_1(x) = 4\frac{x^3}{6} - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{6}{5!}x^5 + ...$$

$$u_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + ...$$

بإستعمال (2.11) نجد حل السلسلة :

$$u(x) = 2 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + ... \qquad (2.23)$$

يتقاب هذا إلى الحل الدقيق :

$$u(x) = 1 + e^{-x} \qquad (2.24)$$

2.1.3 طريقة تكرار المتغير

توفر هذه الطريقة تقريبا متتابعا للحل الدقيق إذا وجد مثل هذا الحل و ليس مكونات كما في طريقة تحليل أدوميان .
تعالج طريقة تكرار المتغير المشاكل الخطية و غير الخطية بنفس الطريقة دون الحاجة إلى قيود محددة في

كثيرات الحدود في أدوميان .

معادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية من الشكل :

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \tag{2.25}$$

إن وضيفة التصحيح للمعادلة التكامل-تفاضلية الغير خطية هي :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(u_n^{(i)}(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi k(\xi,r)F(\tilde{u}_n(r))dr)d\xi \tag{2.26}$$

يتم إستخدام طريقة تكرار المتغير من خلال تطبيق خطوتين أساسيتين :

- يطلب أولا تحديد مضاعف لغرانج λ الذي يمكن تحديده على النحو الأمثل من خلال التكامل بالتجزئة و بلإستخدام تنوع مقيد . وقد يكون مضاعف لاغرانج λ ثابت أو دالة . إذا كانت هناك صيغة محددة

- يجب إستخدام صيغة التكرار دون تباين مقيد , لتحديد تقريب التتابع $u_{n+1}(x)$ للحل $u(x)$.

تقريب زيروث u_0 يكمن أن يكون أي وظيفة إنتقائية , و مع ذلك فإن القيم الأولية $u(0)$, $u'(0)$ .... يفضل إستخدامها لتقريب زيروث الإنتقائي u_0 . فيما يلي نلخص مضاعافات لاغرانج , و تقديرات زيروث الإنتقائية :

$$u' + f(u(\xi), u'(\xi)) = 0; \tag{2.27}$$

حيث :

$$\lambda = -1; u_0(x) = u(0)$$

$$u'' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi)) = 0; \tag{2.28}$$

حيث :

$$\lambda = \xi - x; u_0(x) = u(0) + u'(0)x$$

$$u''' + f(u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)) = 0; \tag{2.29}$$

حيث :

$$\lambda = -\frac{1}{2!}(\xi - x)^2; u_0(0) = u(0) + u'(0)x + \frac{1}{2!}u''(0)x^2$$

و هكذا دواليك . بناءا على ذلك , يعطى الحل كالتالي :

$$u(x) = \lim_{n\longmapsto\infty} u_n(x) \tag{2.30}$$

مثال 2.1.2 :

لدينا :

$$u'(x) = 1 + e^x - 2xe^x - e^{2x} + \int_0^x e^{x-t}u^2(t)dt; \tag{2.31}$$

$$u(0) = 2$$

نضع :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(t) - 1 - e^t + 2te^t + 2e^{2t} - \tag{2.32}$$

$$\textstyle\int_0^t e^{t-r}u_n^2(r)dr)dt$$

حيث $\lambda = -1$

بوضع $u_0(x) = u(0) = 2$ يصبح لدينا :

$$u_0(x) = 2 \tag{2.33}$$

لحساب u_1 نقوم بتعويض u_0 في المعادلة (2.32) فنجد :

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x (u_0'(t) - 1 - e^t + 2te^t + 2e^{2t} - \int_0^t e^{t-r}u_0^2(r)dr)dt \tag{2.34}$$

$$= 2 - \textstyle\int_0^x (-1 - e^t + 2te^t + e^{2t} - \int_0^t e^{t-r} \times 4dr)dt$$

بإستخدام التكامل و التكامل بالتجزئة نجد :

$$= 2 - ([-t]_0^x - [e^t]_0^x + ([2te^t]_0^x - \textstyle\int_0^x 2e^t dt) + [\frac{1}{2}e^{2t}]_0^x) - \int_0^x -4\times[-e^{t-r}]_0^t dt$$

$$= 2 - (-x - e^x + 1 + 2xe^x - 2e^x + 2 + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}) - \textstyle\int_0^x 4 - 4e^t dt$$

بإستعمال نشر تايلور نجد :

$$= 2 + x + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - 1 - 2x - 2x^2 - x^3 + 2 + 2x + x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - 2 - \frac{1}{2} - x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2} - 4x + 4 + 4x + 2x^2 + \frac{4}{3!}x^3 - 4$$

ومنه نجد u_1 و هي :

$$u_1(x) = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3.....$$

$$u_2(x) = 2 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3.....$$

$$u_3(x) = 2 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3.....$$

يتقارب هذا إلى الحل الدقيق :

$$u(x) = 1 + e^x \tag{2.35}$$

2.1.4 طريقة الحل على شكل سلسلة

هذه الطريقة كانت تستخدم بشكل فعال للتعامل مع المعادلات التكاملية و التكامل-تفاضلية الأسلوب ينبع تماما من سلسلة تايلور للوظائف التحليلية .

الدالة الحقيقية $u(x)$ تسمى التحليلية يكون لديها مشتقات من جميع الدرجات مثل سلسلة تايلور في أي نقطة b من مجالها :

$$U_K(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{u^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{2.36}$$

تتقارب إلى $u(x)$ في جوار b

للتبسيط , الشكل العام لسلسلة تايلور لما $x = 0$ يمكن كتابتها كالتالي :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.37}$$

طريقة سلسلة تايلور , أو ببساطة طريقة حل السلسلة سوف يستخدم لحل المعادلات التكامل-تفضلية الغير خطية لفولتيرا .

سوف نفرض أن الحل $u(x)$ من أجل المعادلات التكامل-تفضلية الغير خطية لفولتيرا .

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)F(u(t))dt; \tag{2.38}$$

حيث :

$$u^{(k)}(0) = k!a_k; 0 \leqslant k \leqslant (n-1)$$

هو تحليلي , و بالتالي تمتلك سلسلة تايلور من النموذج المعطى في (2.37) , حيث المعاملات a_n سيتم تحديدها بشكل متكرر .

المعاملات القليلة الأولى a_k يمكن تحديدها بإستخدام الشروط الأولية بحيث :

$$a_0 = u(0); a_1 = u'(0); a_2 = \frac{1}{2!}u''(0); a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0) \tag{2.39}$$

و هكذا , المعاملات المتبقية a_k من (2.37) سيتم تحديدها من خلال تطبيق طريقة حل السلسلة على المعادلة التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا .
بتعويض (2.37) في (2.38) نجد :

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t) F(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k) dt \tag{2.40}$$

حيث $T(f(x))$ هي سلسلة تايلور من أجل $f(x)$.
المعادلة التكامل-تفاضلية (2.38) سوف يتم تحويلها إلى التكامل التقليدي في (2.40) بدلا من التكامل للدالة المجهولة $F(u(x))$
شروط النموذج t^n , $n \geqslant 0$ سوف تكون متكاملة
لاحظ لأننا نسعى إلى الحل على شكل سلسلة , ثم إذا $f(x)$ يتضمن وظائف إبتدائية مثل الدالة المثلثية , الدالة الأسية ... إلخ , ثم توسعات تايلور للوظائف المعنية في $f(x)$ يجب أن تستعمل .
نقوم أولا بمكاملة الجانب الأيمن من التكامل الموجود في (2.40) , و جمع المعاملات التي من نفس القوة . بعد المساواة المعاملات التي من نفس القوة في كلا الجانبين للمعادلة لتحديد علاقة التكرار في a_j , $j \geqslant 0$
حل علاقة التكرار سيؤدي إلى تحديد كامل للمعاملات a_j , $j \geqslant 0$
حيث سيتم إستخدام بعض هذه المعاملات للشروط الأولية .
بعد تحديد المعاملات a_j , $j \geqslant 0$, يتبع الحل مباشرة بسلسلة إستبدال المعاملات المشتقة في (2.37)

مثال 2.1.3 :
لدينا :

$$u'(x) = -\frac{1}{2}x + \sin x + \cos x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \int_0^x (x-t)(1-u^2(t))dt; \tag{2.41}$$

حيث :

$$u(0) = -1$$

نضع :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.42}$$

بتعويض (2.42) في (2.41) نجد :

$$(u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = T(-\frac{1}{2}x + \sin x + \cos x + \frac{1}{4}\sin(2x)) + \tag{2.43}$$

$\int_0^x (T(x-t)(1-(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)^2))dt$

حيث :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... \quad (2.44)$$

$$\sin x = 0 + x - \frac{1}{3!}x^3 + ... \quad (2.45)$$

$$\sin(2x) = 0 + \frac{2}{1!}x - \frac{8}{3!}x^3.... \quad (2.46)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \quad (2.47)$$

$$\int_0^x (x-t)(1-(a_0-a_1t)^2)dt \quad (2.48)$$

$= \int_0^x (x-t)(1-(a_0^2+a_1^2t^2-2a_0a_1t))dt$

بوضع $a_0 = -1$ نجد :

$$= \int_0^x (x-t)(1-1-a_1^2t^2-2a_1t)dt \quad (2.49)$$

$= -\int_0^x (x-t)(a_1^2t^2+2a_1t)dt$

$= -\int_0^x a_1^2t^2x + 2a_1tx - a_1t^2dt$

$$= -([\frac{a_1^2}{3}t^3x]_0^x + [a_1t^2x]_0^x + [-\frac{a_1^2}{4}t^4]_0^x + [-\frac{2}{3}t^3]_0^x)$$

$$= -\frac{a_1^2}{3}x^4 - a_1x^3 + \frac{a_1^2}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$$

إذا تصبح المعادلة (2.43) كالتالي حيث $a_0 = -1$:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + ... \quad (2.50)$$

$$= -\frac{1}{2}x + (x - \frac{1}{3!}x^3) + (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4) + (\frac{2}{4}x - \frac{2}{3!}x^3) - \frac{a_1^2}{3}x^4 - a_1x^3 + \frac{a_1^2}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$$

$$1+x-\frac{1}{2!}x^2+(\frac{1}{3!}-a_1)x^3+(\frac{1}{4!}-\frac{a_1^2}{12})x^4+....$$

بالمطابقة نجد : $a_0=-1;a_1=1;a_2=\frac{1}{2!};a_3=-\frac{1}{3!}..$
أي :

$$u(x)=-1+x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+.... \tag{2.51}$$

و منه :

$$u(x)=\sin x-\cos x \tag{2.52}$$

2.2 المعادلات التكامل-تفاضلية غير الخطية من النمط الأول

تكتب على الشكل :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt+\int_0^x k_2(x,t)u^{(i)}(t)dt=f(x) \tag{2.53}$$

حيث : $u^{(i)}(x)$ ال i تمثل درجة الإشتقاق , و $f(x)$ قيمة حقيقة , و $F(u(x))$ دالة غير خطية , و $k_1(x,t);k_2(x,t)$ تمثل الأنوية .

*و في هذه الحالة سوف نتطرق إلى طرق الحل التالية :

- الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية .
- تحويل معادلة فولتيرا الغير خطية إلى النمط الثاني .

تذكير حول تحويل لابلاص :

يمكن القول بأن تحويل لابلاص هو عبارة عن تحويل رياضي خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة , كما يمكن به تحويل المعادلات التفاضلية أو التكاملية أو التفاضل-تكاملية إلى معادلات رياضية يمكن تبسيطها و إختصارها و التعامل معها بسهولة , و نعرف تحويل لابلاص كما يلي :

$$F(p)=L(f(t))=\int_0^\infty f(t)e^{-pt} \tag{2.54}$$

حيث $F(p)$ الدالة المجهولة بدلالة الكمية المركبة $p=\alpha+i\beta, f(t)$ الدالة الأصلية و رمز تحويل لابلاص . و رغم أن تحويل لابلاص العكسي المعطي بالعلاقة :

$$L^{-1}(F(p))=L^{-1}(L(f(t)))=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\beta}^{c+i\beta}F(p)e^{pt}dt \tag{2.55}$$

مثال 2.2.1 لدينا تحويل لابلاص $f(x)=x$ هو $L(x)=\frac{1}{p^2}$

2.2.1 طرق الحل

2.2.2 طريقةالجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية

تكتب على الشكل :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(i)}(t)dt = f(x) \tag{2.56}$$

هذه الطريقة أستعملت في حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير حطية لفولتيرا من النمط الثاني . سوف يركز التحليل على المعادلات حيث الأنوية $k_1(x,t)$ و $k_2(x,t)$ من (2.53) أنوية مختلفة . هذا يعني أن كل نواة تعتمد على الفرق $(x-t)$. نسمى هذا بتحويل لابلاص
بإدخال تحويل لابلاص نجد :

$$L(k_1(x-t)*F(u(x))) + L(k_2(x-t)*u^{(i)}(x)) = L(f(x)) \tag{2.57}$$

إذا

$$k_1(s)L(F(u(x))) + k_2(s)L(u^{(i)}(x)) = \phi(s) \tag{2.58}$$

حيث :

$$\phi(s) = L(f(x)); k_1(s) = L(k_1(x)); k_2(s) = L(k_2(x)) \tag{2.59}$$

$$L(u^{(i)}(x)) = s^iL(u(x)) - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - ....u^{(n-1)}(0) \tag{2.60}$$

و منه :

$$K_2(s)*s^iL(u(x)) - k_2(s)[s^{i-1}u(0) + ...u^{(n-1)}(0)] \tag{2.61}$$

$$= \phi(s) - k_1(s)L(F(u(x)))$$

بحيث :

$$\Gamma(s) = s^{i-1}u(0) + s^{i-2}u'(0) + ... + u^{(i-1)}(0) \tag{2.62}$$

$$U(s) = L(u(x)) \tag{2.63}$$

إذا

$$U(s) = \frac{\phi(s) + k_2(s)\Gamma(s) - k_1(s)L(F(u(x)))}{s^i k_2(s)} \qquad (2.64)$$

هذه الطريقة تستخدم بشكل فعال في المعادلة (2.64) إثبات ذلك :

$$\lim_{s \longmapsto \infty} \frac{k_1(s)}{s^i k_2(s)} = 0 \qquad (2.65)$$

للتغلب على صعوبة الغير خطية $F(u(x))$ نطبق طريقة أدوميان التحليلية على (2.64) . لتحقيق هذا الهدف نقوم أولا بتمثيل العبارة الخطية $u(x)$ في الجانب الأيسر بواسطة سلسلة غير منتهية من العناصر تعطى كالتالي :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (2.66)$$

حيث العناصر $u_n(x)$, $n \geqslant 0$ سيتم تحديد التكرار . و مع ذلك , العبارة الغير خطية $F(u(x))$ التي في الجانب الأيمن من (2.64) سيمثلها سلسلة لانهائية من كثيرات الحدود لأدوميان A_n في العبارة :

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \qquad (2.67)$$

حيث كثيرات حدود أدوميان A_n , $n \geqslant 0$ تعطى بالشكل :

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[F(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \qquad (2.68)$$

$$n = 0, 1, 2, ...$$

نعوض (2.66) و (2.67) في (2.64) نجد :

$$L(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)) = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + ... + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \qquad (2.69)$$

$$\frac{1}{s^i k_2(s)}\phi(s) - \frac{k_1(s)}{s^i k_2(s)}L(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x))$$

طريقة أدوميان التحليلية تعرف بإستخدام مايلي :

$$U_0(s) = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + ... + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i k_2}\phi(s) \qquad (2.70)$$

$$L(u_{k+1}(x)) = -\frac{k_1(s)}{s^i k_2(s)}L(A_k(x)); k \geqslant 0 \qquad (2.71)$$

إثبات ذلك :

$$\lim_{s \longmapsto \infty} \frac{k_1(s)}{s^i k_2(s)} = 0 \qquad (2.72)$$

مثال 2.2.2 :

لدينا :

$$\int_0^x (x-t)u^2(t)dt + \int_0^x (x-t)u'(t)dt = \frac{7}{8} + \frac{1}{4}x^2 - \cos x + \frac{1}{8}\cos(2x) \tag{2.73}$$

حيث :

$$u(0) = 0$$

بإدخال تحويل لابلاص :

$$L((x-t)u^2(t)) + L((x-t)u'(t)) = L(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}x^2 - \cos x + \frac{1}{8}\cos(2x)) \tag{2.74}$$

$$\frac{1}{p^2}L(u^2)(p) + \frac{1}{p^2}(pU(p) - u(0)) = \frac{7}{8p} + \frac{1}{2p^3} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{8(p^2+4)} \tag{2.75}$$

حيث $u(0) = 0$:

$$U(p) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2p^2} - \frac{p^2}{p^2+1} + \frac{p^2}{8(p^2+4)} - \frac{1}{p}L(u^2)(p) \tag{2.76}$$

إذا :

$$u_0(p) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2p^2} - \frac{p^2}{p^2+1} + \frac{p^2}{8(p^2+4)} \tag{2.77}$$

$$L(u_{k+1}(x)) = -\frac{1}{p}L(A_k(x))$$

حيث $k \geqslant 0$

بإستخدام تحويل لابلاص العكسي نجد :

$$u_0(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{7}{120}x^5 + ... \tag{2.78}$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5 + ...$$

$$u_2(x) = \frac{2}{15}x^5 + ...$$

يكون الحل على شكل سلسلة كالتالي :

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... \tag{2.79}$$

يتقارب هذا إلىالحل الدقيق :

$$u(x) = \sin x \tag{2.80}$$

2.2.3 طريقة تحويل معادلة فولتيرا الغير خطية إلى النمط الثاني

في هذه الطريقة سوف نقوم بتحويل المعادلة التكامل-تفاضلية الغير حطية لفولتيرا من النمط الأول :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x) \tag{2.81}$$

حيث :

$$k_2(x,x) \neq 0$$

إلى معادلة تكامل-تفاضلية غير خطية لفولتيرا من النمط الثاني . نقوم بدراسة القضايا من الدرجة الأولى و الثانية (الإشتقاق) :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u'dt = f(x) \tag{2.82}$$

$$k_2(x,x) \neq 0$$

و

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x k_2(x,t)u''(t)dt = f(x) \tag{2.83}$$

$$k_2(x,x) \neq 0$$

المعادلات من درجات أعلى يمكن التعامل معها بطريقة مماثلة . نقوم بعملية التكامل بالتجزئة على المعادلة (2.82) نجد :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt + k_2(x,x)u(x) - k_2(x,0)u(0) - \int_0^x \frac{\partial k_2(x,t)}{\partial t}u(t)dt = f(x) \tag{2.84}$$

إذا :

$$u(x) = \frac{f(x)}{k_2(x,x)} + \frac{k_{k_2(x,0)}}{k_2(x,x)}u(0) + \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial(k_2(x,t))}{\partial t}u(t)dt - \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt \tag{2.85}$$

حيث :

$$k_2(x,x) \neq 0$$

المعادلة (2.85) أصبحت من النمط الثاني .

نقوم أيضا بعملية التكامل بالتجزئة على المعادلة (2.83) نجد :

$$\int_0^x k_1(x,t)F(u(t)) + k_2(x,x)u'(x) - k_2(x,0)u'(0) - \int_0^x \frac{\partial k_2(x,t)}{\partial t}u'(t)dt = f(x) \tag{2.86}$$

حيث :

$$k_2(x,x) \neq 0$$

إذا :

$$u'(x) = \frac{f(x)}{k_2(x,x)} + \frac{k_2(x,0)}{k_2(x,x)}u'(0) + \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial(k_2(x,t))}{\partial t}u'(t)dt - \frac{1}{k_2(x,x)}\int_0^x k_1(x,t)F(u(t))dt \quad (2.87)$$

حيث :

$$k_2(x,x) \neq 0$$

المعادلة (2.87) أصبحت من النمط الثاني .

مثال 2.2.3 :

لدينا :

$$\int_0^x (x-t)u^2(t)dt + \int_0^x e^{x-t}u'(t)dt = xe^x + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x; \quad (2.88)$$

حيث :

$$u(0) = 1$$

حسب قانون التحويل إلى النمط الثاني نجد :

$$u(x) = e^x + xe^x + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \quad (2.89)$$
$$\textstyle\int_0^x (x-t)u^2(t)dt - \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

بإستخدام تقارب التكرار نجد :

$$u_0(x) = e^x + xe^x \quad (2.90)$$

$$u_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \int_0^x (x-t)u_0^2(t)dt - \int_0^x e^{x-t}u_0(t)dt \quad (2.91)$$

$$u_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \textstyle\int_0^x (x-t)(e^t+te^t)^2dt - \int_0^x e^{x-t}(e^t+te^t)dt$$

$$u_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \textstyle\int_0^x (x-t)(e^{2t}+t^2e^{2t}+2te^{2t})dt - \int_0^x e^x + te^x dt$$

$$u_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \textstyle\int_0^x xe^{2t} + xt^2e^{2t} + 2xte^{2t} - te^{2t} - t^3e^{2t} - 2t^2e^{2t}dt - (e^x[t]_0^x + e^x[\frac{1}{2}t^2]_0^x)$$

بإستعمال التكامل و التكامل بالتجزئة نجد :

$$u_1(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x-(x[\frac{1}{2}e^{2t}]_0^x+x(\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4})+2x(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{6}{8}xe^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}+\frac{6}{16}-2(\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}))-(xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x)$$

$$u_1(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^3e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{4}xe^{2x}+\frac{1}{4}x-x^2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x^3e^{2x}+\frac{3}{4}x^2e^{2x}-\frac{3}{4}xe^{2x}+\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{3}{8}+x^2e^{2x}-xe^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}-xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x$$

بعد الحساب و الاختزالات نجد :

$$u_1(x)=-x^3e^{2x}+\frac{5}{4}x^2e^{2x}-\frac{3}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8}e^{2x}-\frac{7}{8}-xe^x-\frac{1}{2}x^2e^x$$

أي :

$$u_1(x)=-xe^x+\dots\dots\dots\dots$$

بإلغاء مصطلح الضوضاء ل xe^x الشكل : $u_0(x)$ يعطي الحل الدقيق :

$$u(x)=e^x \qquad (2.92)$$

الفصل

3

أنظمة المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا

في هذا الفصل , سوف ندرس معادلات تكامل-تفاضلية الغير حطية لفولتيرا من النمط الثاني من الشكل :

$$\begin{cases} u^i(x) = f_1(x) + \int_0^x (k_1(x,t)F_1(u(t)) + \tilde{k}_1(x,t)\tilde{F}_1(v(t)))dt \\ v^i(x) = f_2(x) + \int_0^x (k_2(x,t)F_2(u(t)) + \tilde{k}_2(x,t)\tilde{F}_2(v(t)))dt \end{cases} \tag{3.1}$$

حيث :

- $u^i(x)$ و $v^i(x)$ دالتان مجهولتان .
- $k_{(i)}(x,t); \tilde{k}_{(i)}(x,t)$ هي دوال معلومة .
- $f_{(i)}(x)$ دوال معلومة ذات متغيرات حقيقية .
- $f_i; \tilde{F}_i$ دوال غير خطية متعلقة بـ $u^i(x); v^i(x)$ من أجل كل قيم $i = 1,2$

هناك مجموعة متنوعة من الطرق العددية و التحليلية التي تستخدم لحل مثل هذه المعادلات . و مع ذلك , في هذا الفصل , سوف نهتم بطريقتين , و هما طريقة التكرار التبايني و طريقة الجمع بين لابلاص و تحويل أدوميان

3.1 طرق الحل

3.2 طريقة التكرار التبايني

هذه الطريقة تستخدم للتعامل مع المعادلات التكاملية لفولتيرا و المعادلات التكامل-تفاضلية لفولتيرا . توفر هذه الطريقة تقربا متتابعا سريعا للحل الدقيق
هذه الطريقة تسخدم للتعامل مع المشاكل الخطية و غير الخطية بنفس الطريقة دون أي حاجة لقيود محددة
إن وضيفة التصحيح للمعادلات التكامل-تفاضلية لفولتيرا) 3.1 (تعطى بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)(u_n^{(i)}(t) - f(t) - \int_0^t \gamma_1(t,r)dr)dt \\ v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0(x)\lambda(t)(u_n^{(i)}(t) - f_2(t) - \int_0^t \gamma_2(t,r)dr)dt \end{cases} \quad (3.2)$$

حيث :

$$\gamma_1(t,r) = k_1(t,r)F_1(\tilde{u}_n(r)) + \tilde{k}_1(t,r)\tilde{F}_1(\tilde{v}_n(r)) \quad (3.3)$$

$$\gamma_2(t,r) = k_2(t,r)F_2(\tilde{u}_n(r)) + \tilde{k}_2(t,r)\tilde{F}_2(\tilde{u}_n(r)) \quad (3.4)$$

هذه الطريقة تستخدم من خلال تطبيق خطوتين أساسيتين .
يطلب أولا تحديد مضاعف لاغرانج λ الذي يمكن تحديده على النحو الأمثل من خلال التكامل بالتجزئة و بإستخدام تنوع مقيد .
يجب إستخدام صيغة التكرار دون تباين مقيد , لتحديد التقريب التتابع $u_{n+1}(x)$ و $v_{n+1}(x)$ للحل $u(x)$ و $v(x)$
تقريب زيروث $u_0(x)$ و $v_0(x)$ يمكن أن يكون أي وظيفة إنتقائية , و مع ذلك فإن القيم الأولية $u(0)$ و $u'(0)$ يفضل إستخدامها لتقريب زيروث الإنتقائي $u_0(x)$ و $v_0(x)$. بناءا على ذلك , الحل يعطى كتالي :

$$\begin{cases} u(x) = \lim_{n\longmapsto\infty} u_n(x) \\ v(x) = \lim_{n\longmapsto\infty} v_n(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

مثال 3.2.1 :

لدينا :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x((x-t)u^2(t) + v^2(t))dt \\ v'(x) = -1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x(u^2(t) + (x-t)v^2(t))dt \end{cases} \quad (3.6)$$

حيث : $u(0) = 1; v(0) = -1$:

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x(u_n'(t) - 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - I_1(t))dt \\ v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^x(v_n'(t) + 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - I_2(t))dt \end{cases} \quad (3.7)$$

حيث :

$$I_1(t) = \int_0^t ((t-r)u_n^2(r) + v_n^2(r))dr$$

$$I_2(t) = \int_0^t (u_n^2(r) + (t-r)v_n^2(r))dr$$

و $\lambda = -1$

نضع $u_0(x) = u(0) = 1$ و $v_0(x) = v(0) = 1$ نجد :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ v_0(x) = 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

نقوم بتعويض u_0 و v_0 لإيجاد u_1 و v_1 نجد :

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x (u'(t) - 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - \tag{3.9}$$

$$\int_0^t ((t-r)u_0^2(r) + v_0^2(r))dr)dt$$

بإستعمال التكامل نجد :

$$u_1(x) = 1 - ([-t]_0^x + [\frac{1}{2}t]_0^x + [-\frac{1}{6}t^3]_0^x + [\frac{1}{60}t^5]_0^x) - \int_0^x (-\int_0^t ((t-r)+1)dr)dt$$

$$= 1 - (-x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5) - \int_0^x -(t[r]_0^t + [-\frac{1}{2}r^2]_0^t + [r]_0^t)dt$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{60}x^5 - \int_0^x (-\frac{1}{2}t^2 - t)dt$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 x \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

و منه نجد :

$$u_1(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5$$

حساب v_1

$$v_1(x) = v_0(x) - \int_0^x (v_0'(t) + 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - \tag{3.10}$$

$$\int_0^t (u_0^2(r) + (t-r)v_0^2(r))dr)dt$$

$$= 1 - ([t]_0^x + [\frac{1}{2}t^2]_0^x + [\frac{1}{3}t^3]_0^x + [\frac{1}{60}t]_0^x) - \int_0^x (-\int_0^t (1+t-r)dr)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{60}x^5 - \int_0^x -([r]_0^t + t[r]_0^t + [-\frac{1}{2}r^2]_0^t)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{60}x^5 + \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{60}x^5 + ([\frac{1}{2}t^2]_0^x + [\frac{1}{6}t^3]_0^x)$$

$$1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

و منه نجد :

$$v_1(x) = 1 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5$$

يصبح لدينا :

$$\begin{cases} u_1(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5 \\ v_1(x) = 1 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} u_2(x) = 1 + x + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3) + (\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^4).... \\ v_2(x) = 1 - x + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3) + (\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^4).... \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} u_3(x) = 1 + x + (\frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{30}x^5).... \\ v_3(x) = 1 - x + (\frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{30}x^5).... \end{cases} \tag{3.13}$$

من الواضح أن شروط الضوضاء تظهر في كل تقريب , و يالتالي الحل الدقيق يكون :

$$(u(x), v(x)) = (1 + x, 1 - x) \tag{3.14}$$

3.3 طريقةالجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية

سوف نستخدم هذه الطريقة لدراسة المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمط الثاني بإدخال تحويل لابلاص على المعادلتين (3.1) نجد :

$$s^i L(u(x)) - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - ... - u^{(i-1)}(0) = L(f_1(x)) + \tag{3.15}$$

$$L(k_1(x-t) \times f_1(u(t)) + \tilde{k}_1(x-t) \times \tilde{F}_1(v(t)))$$

$$s^iL(v(x)) - s^{i-1}v(0) - s^{i-2}v'(0) - ... - v^{(i-1)}(0) = L(f_2(x)) + L(k_2(x-t)\times f_2(u(t)) + \tilde{k}_2(x-t)\times \tilde{F}_2(v(t))) \quad (3.16)$$

إذا :

$$L(u(x)) = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + ... + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L(f_1(x)) + \frac{1}{s^i}L(k_1(x-t)\times F_1(u(t)) + \tilde{k}_1(x-t)\times \tilde{F}_1(v(t))) \quad (3.17)$$

$$L(v(x)) = \frac{1}{s}v(0) + \frac{1}{s^2}v'(0) + ... + \frac{1}{s^i}v^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L(f_2(x)) + \frac{1}{s^i}L(k_2(x-t)\times F_2(u(t)) + \tilde{k}_2(x-t)\times \tilde{F}_2(v(t))) \quad (3.18)$$

للتغلب على صعوبة الغير خطية $F_i(u(x))$ نطبق طريقة أدوميان التحليلية , في الأول نركز على الخطية $u(x)$ و $v(x)$ التي في الجانب الأيسر من السلسلة اللانهائية تعطى كالتلي :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x); v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \quad (3.19)$$

و الغير خطية $F_i(u(x))$ التي في الجانب الأيمن كالتالي :

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x); A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[F(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \quad (3.20)$$

بالتعويض (3.19) ; (3.20) في (3.17) ; (3.18) نجد :

$$L(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)) = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + ... + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L(f_1(x)) + \frac{1}{s^i}L(k_1(x-t))L(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)) + \frac{1}{s^i}L(\tilde{k}_1(x-t))L(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n(x)) \quad (3.21)$$

$$L(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)) = \frac{1}{s}v(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + ... + \frac{1}{s^i}v^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L(f_2(x)) + \frac{1}{s^i}L(k_2(x-t))L(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)) + \frac{1}{s^i}L(\tilde{k}_2(x-t))L(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(x)) \quad (3.22)$$

طريقة أدوميان التحليلية بالشكل التالي :

$$L(u_0(x)) = \frac{1}{p}u(0) + \frac{1}{p^2}u'(0) + ... + \frac{1}{p^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{p^i}L(f_1(x)) \qquad (3.23)$$

$$L(u_{k+1}(x)) = \frac{1}{p^i}L(k_1(x-t))\times L(A_k(x)) + \frac{1}{s^i}L(\tilde{k}_1(x-t))L(\tilde{A}_k(x)) \qquad (3.24)$$

و

$$L(v_0(x)) = \frac{1}{p}v(0) + \frac{1}{p^2}v'(0) + ... + \frac{1}{p^i}v^{(i-1)}(0) + \frac{1}{p^i}L(f_2(x)) \qquad (3.25)$$

$$L(v_{k+1}(x)) = \frac{1}{p^i}L(k_2(x-t))\times L(B_k(x)) + \frac{1}{s^i}L(\tilde{k}_2(x-t))L(\tilde{B}_k(x)) \qquad (3.26)$$

بتطبيق تحويل لابلاص العكسي على الجزء الأول من (3.26) يعطي $u_0(x)$ و $v_0(x)$, التي ستحدد A_0 , $\tilde{A}_0$, B_0 , $\tilde{B}_0$. و هذا بدوره سيؤدي إلى التصميم الكامل لمكونات u_{k+1} , v_{k+1} , $k \geqslant 0$ عند إستخدام الجزء الثاني من (3.26)

. الجمع بين تحويل لابلاص و تحويل أدوميان بطريقة التحليل لحل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمط الثاني سيتم توضيح ذلك من خلال دراسة المثال التالي .

مثال 3.3.1 :

لدينا :

$$\begin{cases} u'(x) = e^x - 2e^{2x} + 2 + \int_0^x e^{x-t}(u^2(t) + v^2(t))dt; u(0) = 2 \\ v'(x) = -e^x - 4xe^x + \int_0^x e^{x-t}(u^2(t) - v^2(t))dt; v(0) = 2 \end{cases} \qquad (3.27)$$

بإدخال تحويل لابلاص نجد :

$$L(u'(x)) = L(e^x - 2e^{2x} + 2) + L(e^{x-t}(u^2(t) + v^2(t)))$$

$$L(v'(x)) = L(-e^x - 4xe^x) + L(e^{x-t}(u^2(t) - v^2(t)))$$

إذا :

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}L(u^2(x) + v^2(x))$$

$$sV(s) - v(0) = -\frac{1}{s-1} - \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}L(u^2(x) - v^2(x))$$

ومنه :

$$U(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s(s-1)}-\frac{2}{s(s-2)}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s(s-1)}L(u^2(x)+v^2(x))$$

$$V(s)=-\frac{1}{s(s-1)}-\frac{4}{s(s-1)^2}+\frac{1}{s(s-1)}L(u^2(x)-v^2(x))$$

يصبح لدينا :

$$\begin{cases} U_0(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s(s-1)}+\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s(s-2)} \\ U_{k+1}(s)=\frac{1}{s(s-1)}L(A_k(x)+B_k(x)) \end{cases} \qquad (3.28)$$

و

$$\begin{cases} V_0(s)=-\frac{1}{s(s-1)}-\frac{4}{s(s-2)^2} \\ V_{k+1}(s)=\frac{1}{s(s-1)}L(A_k(x)-B_k(x)) \end{cases} \qquad (3.29)$$

بإستخدام لابلاص العكسي نجد :

$$u_0(x)=2+x-\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3......$$

$$u_1(x)=2x^2+\frac{4}{3}x^3.....$$

و

$$v_0(x)=-x-\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3.....$$

$$v_1(x)=2x^2+\frac{4}{3}x^3......$$

يكون الحل على شكل سلسلة كالتالي :

$$u(x)=1+(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3....)$$

$$v(x)=1-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3....)$$

يتقارب هذا إلى الحل الدقيق :

$$(u(x),v(x))=(1+e^x,1-e^x)$$

خـــــاتمة

يندرج محتوي هذه المذكرة في العمل على تحديد بعض طرق حل المعادلات تكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا .

لذالك قمنا أولا بعرض موجز لبعض أشكال المعادلات التكاملية مهما كانت خطية أو غير خطية , حيث تطرقنا إلى طريقة الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية , و طريقة تكرار المتغير , و طريقة الحل على شكل سلسلة , بالنسبة لمعادلة فولتيرا التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمط الثاني , و تطرقنا إلى طريقة الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية , و طريقة تحويل معادلة فولتيرا الغير خطية إلى النمط الثاني , بالنسبة إلى المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية من النمط الأول , و تطرقنا إلى طريقة التكرار التايني , و طريقة الجمع بين تحويل لابلاص و طريقة أدوميان التحليلية , بالنسبة إلى أنظمة المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا من النمط الثاني .

و تكمن أهمية المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية على العموم في المسائل الفيزيائية .

قائمة المراجع

[1] : Abdul-majid wazwaz , Linear and non-linear integral equtions methods and application , saint xavier university chicago.USA April 20 , 2011

[2] Birlin heidelberg , volterra-stieltjes integral equations and generalized , Ordinary differentil expressions springer-vealag , New york , Tokyo 1983 .

[3] Juren appell espedito de pascale alfonso vignoli , Non-linear spectral theory , walter de gruyter , berlin , New york 1993 .

[4] M.rahman , integral equations and their applications , Dalhousie university , Canada 1988 .

[5] Peter J.collins . Differential and integral equtions , Senior st edmund , Oxford 1990 .

[6] T.A.burton , volterra integral and differential equations , Southern illnios university carbondale , illnois , USA 1993 .

" طرق حل المعادلات التكامل-تفاضلية الغير خطية لفولتيرا"

ملخص

تكمن أهمية هذا العمل في دراسة بعض طرق حل المعادلات التكاملية و التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا من النمطين الأول و الثاني .
كما قمنا بدراسة طرق حل أنظمة المعادلات التكاملية و التكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا من النمط الثاني .

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية غير خطية لفولتيرا

المعادلات التكاملية-التفاضلية غير خطية لفولتيرا .

غير خطية من النمط الأول .

غير خطية من النمط الثاني .

"Methods Of Solving Nonlinear Volterra Integro-Dffierential Equations"

Abstract

The aim of this study is to show some methods of solving the integral equations and the nonlinear voltera integro-differentiol the first and second .
also , we study the methods of solving the systems of the integnal equations and nonlinear volterra integro-differntiol , the second

Key words:

* nonlinear volterra integral equations

* nonlinear volterra integro-differentiol equations .

* nonlinear first kind .

* nonlinear second kind .