REPUBLIQUE ALGERIRNNE
DEMCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENDEIGNEMENT
SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculte des Mathematiques et des Sciences de la Matiere

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Specialite : Mathematiques

Option : Algebre et Geometrie

Par : BELMESMAR Mohammed

Théme

THEORIE des TREILLIS et Algébre de Boole vue sur la logique

Devant le jury compose de :08 juillet 2019

BENMOUSSA Mod Tayeb	M.A. Université de KASDI Merbah- Ouargla	Président
GUERBOSSA Yassien	M.A. Université de KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
BOUSSAID Mohammed	M.A. Université de KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Universite Annee :2018 /2019

Dédication

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents ;

Mes frères et ma soeur ;

Mon encadreur Mohammed BOUSSAID ;

Tous mes amis surtout : Hamdan, Issam,Abedellatif, Mohammed, Ismail,, Houcin ;

Mes collègues des mathématiques ;

Tous les profes que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Belmesmar Mohammed.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **BOUSSAID Mohamed** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Nous voulons également remercier : **Mr : BAHAYOU Mohamed Amine** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire Nos remerciements vont également aux : **Dr : Guerboussa Yassine** et **Mr : Benmoussa Mod Tayeb** honorer de leur présence dans ce jury.

Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.
Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Conclusion **1**

1 Definition ensemble ordonné **7**

1.1 Ensembles ordonnés 7

1.1.1 Ensembles ordonnés 7

1.1.2 L'ensemble totalement ordonné et partiellement ordonné 8

1.2 Ordre reciproque ,Ordre induit ,Ordre produit 8

1.3 Morphismes d'ensembles ordonnés 9

1.3.1 Isomorphisme d'ordres 9

1.3.2 Ensemble ordonnes finis 9

1.3.3 Elémenet particuliers : 9

1.4 Rolation d'equivalence et classes d'eqivalence 11

1.4.1 relation d'quivalence 11

1.4.2 classes d'quivalence et ensemble quotient 11

2 TREILLIS **13**

2.1 Treillis,, Inf-demi et Sup-demi-treillis 13

2.1.1 a)Treillis 13

2.1.2 b)sup.demi -Treillis 13

2.1.3 c)inf.demi -Treillis 14
2.2 Sous-Treillis,sous-sup et sous.inf.demi-treillis 15
2.2.1 Sous-Treillis 15
2.2.2 Sous.Sup.demi-Treillis 15
2.2.3 Sous.inf.demi-Treillis 15
2.3 Algebre d'un Treillis 15
2.3.1 Morphisme de Treillis 16
2.4 $\wedge - morphismeet \vee - morphisme$ 16
2.4.1 isomorphisme de Treillis 16
2.4.2 Ensemble quasi- inductif 16
2.4.3 Théorème de zorne 16
2.5 Treillis destributifs,Treillis modullaires 17
2.5.1 Destribtifs 17
2.5.2 Remarque 17
2.6 Modulaires 18
2.6.1 Definitions et proprietes 18

3 TREILLIS DE BOOLE ET ANNEAU BOOLEEN ASSOCIES 21
3.1 TREILLIS DE BOOLE 21
3.1.1 Treillis complémentés 21
3.1.2 Complémentations relative 21
3.1.3 Treillis complémenté 22
3.2 Treillis de boole 24
3.3 ANNEAU BOOLEEN 26
3.4 TREILLIS ET ANNEAU ASSOCIES 27
3.5 MORPHISMES BOOLEENS 30
3.5.1 GENERALITES 30
3.5.2 Composition de morphisme 32

4 LE CALCUL DANS UN ANNEAU DE BOOLE 33
4.1 Sémantique d'un langage propositionnal 33

4.1.1 Les régles d'écriture 34
4.2 CONNECTEURS LOGIQUE 34
4.2.1 La négaion,$\neg$ 34
4.2.2 Les connecteurs logiques (et - et - ou) 34
4.3 L'ensembles des propositions 35
4.4 PROPOSITIONS VRAI 36
4.5 LES METHODES DE DEMONSTRATION 36

Intréoduction

George Boole mathématicien anglais(1815-1864) à construit une algébre qui porte son nom (Algébre de Boole) et qui a rendue la pensé humaine en calcul purement algébrique.

Le developpement de la théorie des anneaux et des treillis a donner naissance a plusieurs résultats de logiques et des pratique sur l'ensemble des propositions et des fonctions propositionnelle dans la suite plusieurs applications dans le domaine d' informatique et dans la concipition des circuits éléctriques.

Le but de ce travail est de donner les princpaux resultats et définitions des ensembles ordonnés et treillis pour les utilisés dans la logique propositionelle.

le chapaitre 1 est consacré à la définition des ensembles ordonné et les relations d'équivalence .

le chapaitre 2 contient des définitions des treillis et quelques propriétes (distrubitif,modilaire, complémonté, diagrammes)

le chapaitre 3 contient des définitions et des résultats concernant complémentationn et treillis de Boole et anneaux de Boole.

Le chapetre 4 est consacré à l'ensemble des propositions vue comme algèbre de boole (la logique) et des exemples de calcul dans les anneaux de Boole.

%

Table des figures

2.1 sup-d 14
2.2 inf-d 14
2.3 treillis-d 17
2.4 treillis modulaire 20
2.5 treillis distributive de 5 éléments 20

Notations et conventions

R	Reltion d'ordre .
$(E, \leq)$	ensemble ordonné.
$\subseteq$	Inclusion .
$\wedge$	Inf .
$\vee$	Sup .
$\Rightarrow$	Implication .
$\equiv$	relation d'équivalence.
$P(E)$,	l'ensemble des parteis de E.
$(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$	structure de treillis de Boole .
$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, -, +, .)$	structure d'Algébre de Boole.
$(E, +, ., 0, 1)$	structure d'aneau de Boole.
$\neg$	La négation.
$\Leftrightarrow$	L'équivalence.

Chapitre 1

Definition ensemble ordonné

1.1 Ensembles ordonnés

1.1.1 Relation d'ordre

Définition 1.1 *une Relation binaire R sur un ensemble E non vide est dite relation d'ordre sur E si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivents*

-Reflexivite : pour tout $x \in E$ on a : xRx

- Antisymetrique : pour tout x , $y \in E$ on a (xRy et yRx)impliqe $x = y$.

-Transitivite : pour tout x , y ,$z \in E$ on a :(xRy et yRz)impliqe x R z .

D'une façon général une Relation d'ordre sera noté : $x \preceq y$(x inferieur ou égale a y).

Définition 1.2 *un ensemble E ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre ($\leq$), on note cet ensemble (E,$\leq$)*

Exemple 1.1 *(N.$\leqslant$) . (P(E) .$\subseteq$) .(N* ./)*

1.1.2 L'ensemble totalement ordonné et partiellement ordonné

Définition 1.3 *Soit $(E .\leq)$ un ensemble ordonné et $x,y \in E$ on dit que x et y sont comparables si : $x \leq y$ ou $y \leq x$ sont si non sont dite incomparables. E est totalement ordonné (ou chaine)si tous les élément de E sont deux a deux compaarables par la relation d'ordre $\leq$.on dit qu'il est partialement ordonné s'il exeste des élément de E incomparable par $\leq$.*

1.2 Ordre reciproque ,Ordre induit ,Ordre produit

Définition 1.4 *soit E un ensemble ordonné $(E, \leq)$ on peut définir sur E un nouvelle relation noté $(x \geq y)$ comme étant équivalence à : $x \leq y$*
on notera également (si x et y sont comparables) $(x \gneq y)$: $x$non supérieur ou égale a y , c'est -a-dire .$x \leq y$ et $x \neq y$ ...

Définition 1.5 *soit ($E. \leq$) un ensemble ordonné et A une partie non vide de E*
la trace sur A de la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur$A$ qui sera noté $x \leq_A y$ elle est donc définie par :$x \in A$ et $y \in A$ et $x \leq y$ (si $x \leq y$ dans E) cette relation est appellé relation d'ordre induite $\leq$ sur A.

Définition 1.6 *Consideron une famille d'ensembles ordonnés*
$(Ei; \leq i))_i \in I$ sur l'ensemble produit $E = \sqcap E_i$ on peut définir la relation : $(x_i), (y_i) \in \sqcap E_i$ pour tout $i \in I$

$$(x_i) \leq_i (y_i) \Leftrightarrow \text{pour tout } i \in I, x_i \leq y_i$$

On vérifira sons peine que ceci est une relation d'ordre sur E qui est applée relation d'ordre produit.

1.3 Morphismes d'ensembles ordonnés

Définition 1.7 *Soient deux ensembles ordonnés $(E. \leq).(F. \leq_1)$*

.une application $f : E \longrightarrow F$

f sera dite un morphisme d'ordres ou oncore une application croissante, si quels que soient x et y dant $E : x \leq y$ implique $f(x) \leq_1 f(y)$.

On définira egalement :

Application decroissante : $x \leq y$ implique f(x)$\geq$ f(y)

Application strictement décoroissant : $x < y$ implique $f(x) > f(y)$.

1.3.1 Isomorphisme d'ordres

Définition 1.8 *une application f :E $\longrightarrow$F est dite un isomorphisme d'ordre si :*

1-f est bijective

2-x$\leq$yiquivautaf(x)$\leq$ $f(y)$. cela signfie donc que f et f^{-1} sont toutes les deux croissante , par suite injectives elles soient suivant croissantes.

1.3.2 Ensemble ordonnes finis

Définition 1.9 *Dans un ensemble ordonné ($E. \leq$) on dit qu'un élément y couvre un élément x si $x < y$ et Il n'existe aucun élément z tel que $x < z < y$.*

1.3.3 Elémenet particuliers :

Soit $(E. \leq)$ un ensemble

1. *Elément maximal : On appelle élément maximal M de E tout élément défini par : pour tout $x \in E, M \not< x$ et $M \in E$(ce que signifie : ou bien $x \leq M$, ou bien x et M sont incomparables)*
2. *Elément minimal :*

   On appelle élément minimal M' de E tout élément defini par : pour tout $x \in E; x \not< M'$ et $M' \in E$ (ce que signifie :ou bien $M' \leq x$, ou bien x et M' sont incoparables).

3. *Elément maximum : Un élément a est dit élément maximum d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonnéEsi :* $x \leq a, \forall x \in X$ *et* $a \in X$

4. *Element minimum : Un élément b est dit élément minimum d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonné E si* $b \leq x, \forall x \in X$ *et* $b \in X$*.*

5. *Majorant : On appelle majorant d'une partie A de E tout élément m de E tel que pour tout* $x \in A : x \leq m$*.*

6. *Minirant : On appelle miniront d'une partie A de E tout élément m de E tel que pour tout* $x \in A : m \leq x$

7. *Borne superieure : On appelle borne supérieure d'une partie Ade Etout élément sde E qui verifie les deux propriétes -* $\forall x \in A, x \leq s$ *(s est un majorant de A)*
   - pour tout m majorrant de A; $s \leq m$
   Notons qu'un tel élément,s'il existene est unique . Si une partieAde E admet une pourne superieureS , celle - ci sera noté :$S = sup_E A$

8. *Boene inférieure : On appelle borne iférieure d'une partieA deE tout élément I de Equi verifie les deux propriétés*
   $\forall x \in A, I \leq x$*(I est un minorant de A)*
   Pour tout ḿ minorant de A,$\acute{m} \leq I$ *La borne inférieure , lorsqu'elle existe sear notée* $I = inf_E A$ *est unique .*

1.4 Rolation d'equivalence et classes d'eqivalence

1.4.1 relation d'quivalence

Définition 1.10 *une relation binaire sur un ensemble E non vide dite relation d'equivalence sur E si et selement si 'elle vérifie les trois propriétés suivents*

-Reflexivite : pour tout $x \in E$, on a xRx.

-Symetrique : pour tout $x, y \in E : xRy \Rightarrow yRx$

Transitivite : pour tout $x, y, z \in E$ on a : $(xRy$ et $yRz) \Rightarrow x\ R\ z$

1.4.2 classes d'quivalence et ensemble quotient

Définition 1.11 *soit $x \in E$,la classe d'equivalence de $x \in E$est $=\{\ t \in E : tRx\}$*

Exemple 1.2 *la relation $R : x \equiv y(2)$ dant Z, les classes d'equivalence de R est $\overline{1}, \overline{0}$*

Remarque 1.1 *l'ensemble d'equotient E/R est l'ensemble des classes d'equivalence de la relation R par exemple :$E/R = \{\overline{0}, \overline{1}\}$*

Proposition 1.1 *L'ensembles des classes d'equivalences définit une partition de X reciproquement,tout partition de X définit une relation d'equivalence sur X.*

Théorème 1.3 *soit X un ensemble et R une relation d'equivalence sur X*

$$\text{on note } \pi : X \longrightarrow X/R,\ x \in X$$
$$x \longmapsto \bar{x}$$

Alors π est surjectif et la relation d'équvalence qui lui est associée sur R de plus , π vérifie la propriété unuverselle pour toute applecation

$f : X \to Y$ telle que si : $X \sim \bar{X} : f(x) = f(\bar{x})$

il existe une unique applecation g :$X/R \to Y$ telle que $f = go\pi$

$X \underset{\to}{\pi}$ X/R

$f \searrow Y \swarrow g$

$\sim$ *est un relation d'équivalence sur* $E/\sim$

-Reflexivite : pour tout $x \in X : f(x) = f(x) \Longrightarrow .X \sim X$

-Symetrique : pour tout $x, y \in E : x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x) \Longrightarrow y \sim x$

-Transitivite pour tout $x, y, z \in E, (x \sim y \text{ et } y \sim z) \Longrightarrow x \sim z.$

Exemple 1.4 *Dans l'ensmble* Z *la Rrelation defini par* $:xRy \Leftrightarrow \exists k \in Z : x - y = kn$ *est une relation d'equivalence.*

Chapitre 2

TREILLIS

2.1 Treillis,, Inf-demi et Sup-demi-treillis

2.1.1 a)Treillis

Définition 2.1 *Soit$(E, \leq)$ un ensemble ordonné On dit que E est un treillis ssi toute partie de E Formé de deux élément admet une borne supérieure et une borne inferieure.*

$x, y \in E$ note : $x \vee y = sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = inf\{x, y\}$

Exemple 2.1 *$E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ordonné par la division.*

2.1.2 b)sup.demi -Treillis

Définition 2.2 *on dit que E est un sup.demi-treillis ssi : toute partie de E formée de deux élément admet une borne supérieure(i.e $sup_E\{x, y\} = x \vee y$)*

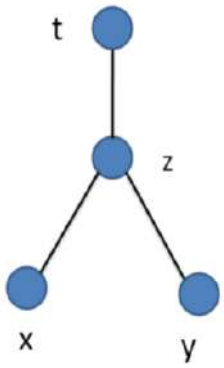

FIGURE 2.1 – sup-d

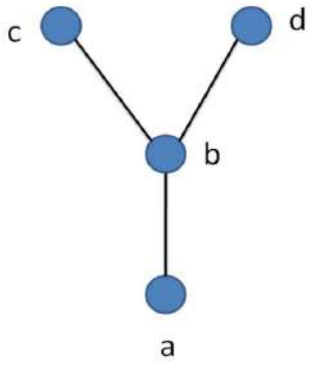

FIGURE 2.2 – inf-d

2.1.3 c)inf.demi -Treillis

Définition 2.3 *on dit que E est un inf.demi-treillis ssi : toute partie de E formée de deux element admet une borne inférieure(i.e* $inf_E\{x, y\} = x \wedge y$*)*

Exemple 2.2 *Treillis des parties d'ensemble* $(P(X), \subseteq)$ *est un treillis :* $A \wedge B = A \cap B$

$A \vee B = A \cup B, \forall A, B \in P(X)$

soit l'ensemble $X = \{a, b, c\}$, *P(X)=* $\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2.2 Sous-Treillis,sous-sup et sous.inf.demi-treillis

2.2.1 Sous-Treillis

Définition 2.4 *un partie non vide A d'une treillis $(E, \leq)$ est dite un sous -treillis si elle est à la fois un sous sup.demi-treillis et un sous-inf.demi-treittis ceci équivaux a dire*
$\forall x, y \in A : x \vee y \in A, x \wedge y \in A.$

2.2.2 Sous.Sup.demi-Treillis

Définition 2.5 *une partie non vide A d'un Sup.demi-treillis E est un Sous. Sup.demi-Treillis si on a l' une des deux condition equivalentes suivantes :*
a) $sup_A(x, y)$ existe et est égale a $x \vee y \forall x, y \in A$.
b) $x \vee y \in A, \forall x, y \in A$.

2.2.3 Sous.inf.demi-Treillis

Définition 2.6 *une partie non vide A d'un inf-demi-treillis E est dite un sous-inf-demi-treillis si on a l'une des deux condition equivalentes suivantes :*
a)$inf_A(x, y)$ existe et est égale $x \wedge y \forall x, y \in A$.
b) $x \wedge y \in A, \forall x, y \in A$.

2.3 Algebre d'un Treillis

soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné on à

(a) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ et $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$(Associativite)

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ et $\vee y = y \vee x$ (Commutativeté)

(c) $x \wedge x = x$ et $x \vee x = x$(Idempdence)

(d) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (Absorption)

2.3.1 Morphisme de Treillis

Définition 2.7 *soient deux treillis E et et une application f.*

$f : E \longrightarrow$, f est un morphisme de treillis si :

$x, y \in E, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ dans

2.4 $\wedge - morphismeet \vee - morphisme$

$\wedge$-morphisme : $x, y \in E, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

$\vee$-morphisme : $x, y \in E, f(x) \vee y) = f(x) \vee f(y)$

2.4.1 isomorphisme de Treillis

Définition 2.8 *On dit que f est un isomorphisme si f morphisme de treillis et bijection.*

2.4.2 Ensemble quasi- inductif

Définition 2.9 *Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit quasi-inductif si toute chaine(non vide) de E est majorée dans E (un ensemble est dit inductif lorsque toute chaine de E possede une borne supérieure dans E).*

2.4.3 Théorème de zorne

si E est un ensemble quasi-inductif,il existe ou moins un élément

a maximal de E tel que $a \nleq x$.

2.5 Treillis destributifs,Treillis modullaires

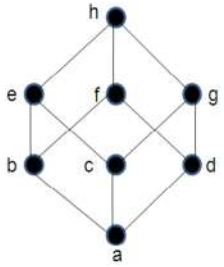

FIGURE 2.3 – treillis-d

2.5.1 Destribtifs

On dit que E est un treillis déstributif ssi :

$\forall x, y, z : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ *(déstributivité de $\wedge$ par raport $\vee$).*

$\forall x, y, z : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*(déstributivité de $\vee$ par raport $\wedge$)*

Exemple 2.3 *$(P(X), \subseteq, \cap, \cup)$ est un treillis déstributif.*

2.5.2 Remarque

dans tout treillis les deux conditions suivantes sont toujours vérifiées

(a) $\forall x, y, z :$ $\quad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(b) $\forall x, y, z :$ $\quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

En effet :

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y)$ *et* $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge z)$ *donc :*

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y)$ *et* $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee z)$ *donc :*

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Théorème 2.4 *Dans un treillis quelconque, les propriété suivantes sont équivalentes*

- $P_1 : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \forall x, y, z$
- $P_2 : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \forall x, y, z$

Demonstration :

Nous allons démontrer que $P_1 \Longrightarrow P_2$

On a pour tout x, y, z : $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = x \vee [z \wedge (x \vee y)]$

$= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] = [x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y). = x \vee (z \wedge y\ )$

La réciproque en résulte par dualité.

Proposition 2.1 *Pour qu'un treillis E soit déstributif il faut et il suffit qu'il vérifie* $,\forall x, y, z$ *la condition :* $(x \wedge z = y \wedge z$ *et* $x \vee z = y \vee z) \Rightarrow x = y$

preuve

si E est un treillis déstributif , suposons $x \wedge z{=}y{\wedge}z$ *et* $x \vee z = y \vee z$.

On peut ecrire :

$x \vee (y \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (z \vee y) = (x \wedge z) \vee y{=}(y{\wedge}\ z) \vee y{=}y$

d'ou $x{=}y$

2.6 Modulaires

2.6.1 Definitions et proprietes

Définition 2.10 *Un treillis E est dit treillis modulaire*

s'il vérifie , $\forall x,y,z$ *la condition :*

$x{\leq}\ z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Remarque 2.1 *tout treillis dstributif est modulaire, en effet :*

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

donc : $x \leq z : x \vee z = z$ *et* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Lemme 2.5 *Les éléments d'un treillis quelconque satsfisfont a l'énégalité :*

$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

Demonstraton

Il est claire que $x \leq x \vee y$ *et* $x \leq z$

Par suit.$x \leq (x \vee y) \wedge z$.

D'autre part, $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ *et* $y \wedge z \leq z$, *d'ou* $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$.

En combinant ces résultats avec la définition de $\vee$ *on obtient* $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

Proposition 2.2 *Pour qu'un treillisE soit modulaire il faut et il suffit, quels que soient x,y,z la condition :* $(x \wedge z = y \wedge z$ *et* $x \vee z = y \vee z) \Longrightarrow x$ *et* y *sont égaux ou incmparables.*

Si E *est un treillis modulaire, supposons :*$x \wedge z = y \wedge z$ *et* $x \vee z = y \vee z$

avec x, y *comparables et distincts par exemple* $x < y$.

Ona

$$x \vee (z \wedge y) = x \vee (x \wedge z) = x$$
$$(x \vee z) \wedge y = (y \vee z) \wedge y = y$$

ce que contredit la momdularité.

Réciproquement,soupposons que la condition énoncée dans le théorème soit vérifée et soient x,y, z ,avec $x \leq z$

On suit

Posons : $a = x \vee (y \wedge z)$ *et* $b = (x \vee y)$

On $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *et puisque* $x \leq z$ *on a* $x \vee z = z$, *donc* $a \leq b$.

$a \wedge y = (x \vee (y \wedge z)\ ) \wedge y \geq (x \vee (\ y \wedge z)\ ) \wedge (y \wedge z) = (y \wedge z)$

$b \wedge y = ((x \vee y) \wedge z) \wedge y \leq y \wedge z$

Donc $a \wedge y \geq b \wedge y$, *mais* $a \leq b$ *d'ou* $a \wedge y = b \wedge y$

$a \vee y = (x \vee (y \wedge z)) \vee y \geq x \vee y$.

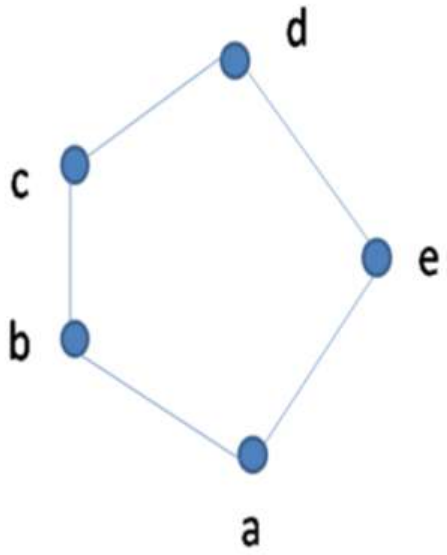

FIGURE 2.4 – treillis modulaire

FIGURE 2.5 – treillis distributive de 5 éléments
[5]

Chapitre 3

TREILLIS DE BOOLE ET ANNEAU BOOLEEN ASSOCIES

3.1 TREILLIS DE BOOLE

3.1.1 Treillis complémentés

Définition 3.1 *un treillis est complémenté s'il admet un* $\perp$ *plus petit élément noté* 0 *et un* $\top$ *plus grand élément noté* 1 *et tout élément admet au moins un complément*

3.1.2 Complémentations relative

considéront un treillis quelconque E *et soit* $[a, b], a \leq b)$ *un intervalle de* E

Définition 3.2 *SI* $x \in [a, b]$ *on appelle complément de* x *relativement à* $[a, b]$*tout élément* y*(s'il existe) vérifiant* $x \wedge y = a, x \vee y = b$

Remarque 3.1 *si* y *est un complément de* x *relativement à [*a, b*] on a aussi* $y \in [a, b]$ *car* $y \geq x \wedge y = a$ *et* $y \leq x \vee y = b$

En outre x est alors un complément de y relativement à $[a, b]$

b est le complémentde ,unique de a relativement à $[a, b]$

un élément x n'a pas nécessairement de complément relatif il peut également en avoir plusieurs

Exemple 3.1 *Soit un treillis E, ordonné par divisibilité dans l'intervalle $[1, 4]$, 2 n'a pas de complément relatif, dans l'intervalle $[1, 20], 5$ a deux compléments relatifs $2et\ 4$*

Tout fois on a le proposition suivants

Proposition 3.1 *soient un treillis E,un intervalle $[a, b]$ de$E$ et un élément x de $[a, b]$*

- si E modulaire : les complément relatif éventuels ,de x sont incomparable entre eux

-si E distributif :x a au plus un complément relatif.

preuve

si y_1,y_2 sont deux compléments relatifs de x on a : $x\wedge\ y_1=a$ et $x\vee\ y_1=b=x\vee y_2$, dans le cas modulaire impliqe $y_1=y_2$ ou $y_1 ety_2$ incomparables dans le cas distrubitif impliqe $y_1=y_2$.

Définition 3.3 *Un treillis est dit relativement complémenté si dans tout intervalle[a,b], tout élément x posséde au mois un complément relatif*

3.1.3 Treillis complémenté

Nous considérons ici un treillis E ayant un plus petit élément 0

et un plus grand élément 1.

Définition 3.4 *-si $x\in E$, on appele complément de x tout complément de x relativement à l'intervalle [0,1]*

-E est dit un treillis complément si tout élément de E posséde au mois un complément.

Remarque 3.2 *- un complément $\grave{x}$ de x s' il on existe est donc défini par :$x\wedge\grave{x}=0$ et $x\vee\grave{x}=1$*

En général,l'existence aussi bien que l'unicité du complément ne sont pas assurées.

Exemple 3.2 *Dans une chaine,un élément différent de 0 et 1 n'a jamais de complément*

Dans le treillis $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ordonneé par divisibilité

5 a pour complément 2 et 4.

. 2 et 4 ont un seul complément (5)

- 1 et20 sont complément l'un de l'autre

-D'une façon générale 0 ,1 sont toujours complément l'un de l'autre

tout treillis relativement complément et ayant un plus petet élément et un plus grand élément est complément

- un treillis complémenté n'est pas nécessairment relativement complémenté.

Les exemples suivants sont des treillis ordonnés pas divisibilité : $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$

i. *ce treillis est complément(sans unicité de compléments)mais n'est pas relativement complémenté.*

ii. *ce treillis est a la fois complément et relativement complémenté(sans unicité de complément)*

iii. *ce treillis est aă la fois complément et relativement complémenté(avec unicité de compléments)*

tout treillis(P(E),$\subseteq$*) est complémenté si :*$X \in P(E)$ *son cmplimenté(unique)n'est autre que la complémentaire de* X*.*$\bar{X}$ *le complémentaire de* X *dans* E

$X \cap \bar{X} = \Phi = 0, X \cup \bar{X} = E = 1$

Proposition 3.2 *Dans un treillis distributif ,tout élément a au plus un complément ceci résult imédiatement de la propostion précédent sur les compléments relatifs. si un treillis complémenté est modulaire*

(et a la fortiori s'il est distributif) alors il est relativement complément

preuve

Considérons un intervalle[a,b],$x \in [a, b]$ *et* $\grave{x}$ *un complément de* x*.*

posons $y = (a \vee \grave{x}) \wedge b$ *, on a aussi* $y = a \vee (\grave{x} \wedge b)$*, car* $a \leq b$ *et le treillis est suposé modulaire on peut alors écrire*

$y \wedge x = (a \vee \grave{x}) \wedge b \wedge x = (a \vee \grave{x}) \wedge x = a \vee (\grave{x} \wedge x) = a \vee 0 = a$

$y \vee x = a \vee x \vee (\grave{x} \wedge b) = x \vee (\grave{x} \wedge b) = (x \vee \grave{x}) \wedge b = 1 \wedge b = b$

3.2 Treillis de boole

Définition 3.5 *On appelle treillis de Boole tout treillis qui est a la fois distributif et complémenté*

un treillis de boole E posséde donc un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, tout intervalle , tout élément x posséde un complément et un seul $\grave{x} : x \wedge \grave{x} = 0$ *et* $x \vee \grave{x} = 1$

Nous savons également que pour tout intervalle $[a, b]$*,tout élément* x *de* $[a, b]$ *posséde un complément relatif et un seul dans*$[a, b]$*,qui est* $y = (a \vee \grave{x}) \wedge b$

le cmplément $\grave{x}$ *d'un élément x est aussi son* $\wedge$*-cmplément ,c'est-a dire est défini par :*

$x \wedge \grave{x} = 0 et si x \wedge y = 0$ *alors* $y \leq \grave{x}$

Exemple 3.3 *Tout treillis* $(P(E), \subseteq)$ *est un treillis de Boole(le treillis des parties de E)*

a) PROPREIETES SIMPLE

soit E un treillis de boole :

$\grave{0} = 1, \grave{1} = 0$ *et pour tout* $x : (\grave{x})\grave{} = x$

quels soient x et y : $(x \wedge y)\grave{} = \grave{x} \vee \grave{y}$ $et (x \vee y)\grave{} = \grave{x} \wedge \grave{y}$

ces deux égalités sont appelées lois De Margn ,elles sont faciles a vérifier :

$(x \wedge y) \wedge (\grave{x} \vee \grave{y}) = (x \wedge y \wedge \grave{x}) \vee (x \wedge y \wedge \grave{y}) = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$

$(x \wedge y) \vee (\grave{x} \vee \grave{y}) = (x \vee \grave{x} \vee \grave{y}) \wedge (y \vee \grave{x} \vee \grave{y}) = (\grave{y} \vee 1) \wedge (\grave{x} \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$

donc $(x \wedge y)\grave{} = \grave{x} \vee \grave{y}$

d'ou $(\grave{x} \wedge \grave{y})\grave{} = x \vee y$ $et (x \vee y)\grave{} = \grave{x} \wedge \grave{y}$

b)ADDITION

.Dans un treillis de boole on définis une nouvelle opération, l'addition, par :

$x + y = (x \wedge \grave{y}) \vee (\grave{x} \wedge y)$.....*(3.1)*

Dans un treilis $(P(E),\subseteq)$ *cette opération est celle qu'on appelle souvent la différence symétrique notée* $X \triangle Y = (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y)$

la formule(3.1) : $x+y=[(x\wedge\grave{y})\vee\grave{x})]\wedge[(x\wedge\grave{y})\vee y)]=(x\vee\grave{x})\wedge(\grave{x}\vee\grave{y})\wedge(x\vee y)\wedge(\grave{y}\vee y)$

soit

$$x+y=(x\vee y)\wedge(\grave{x}\vee\grave{y}).....(3.2)$$

on déduit aussi :

$$(x+y)\grave{}=(\grave{x}\vee y)\wedge(x\vee\grave{y}).....(\grave{1})$$

et de (3.2) :

$$(x+y)\grave{}=(x\wedge y)\vee(\grave{x}\wedge\grave{y}).....(\grave{2})$$

L' oppération d'addition vérifie les propriétés suivantes :

a)Ele est comutative.

b)Elle admet 0 élément neutre : $x+0=(x\wedge 1)\vee(\grave{x}\wedge 0)=x\wedge 1=x$

c)Tout élément est son propre opposé : $x+x=(x\wedge\grave{x})\vee(\grave{x}\wedge x)=0\vee 0=0$

Elle est associatve :

$(x+y)+z=[(x+y)\wedge\grave{z}]\vee[(x+y)\grave{}\wedge z]$

$(x+y)+z=[((x\wedge\grave{y})\vee(\grave{x}\wedge y))\wedge\grave{z}]\vee[((x\wedge y)\vee(\grave{x}\wedge\grave{y}))\wedge z)]$

$(x+y)+z=(x\wedge\grave{y}\wedge\grave{z})\vee(\grave{x}\wedge y\wedge\grave{z})\vee(x\wedge y\wedge z)\vee(\grave{x}\wedge\grave{y}\wedge z).$

On remarque que cette expression est invariante par échange x*et* z *donc*

$(x+y)+z=(z+y)+x=x+(y+z)$

$e)x+1=\grave{x}$ *car* $x+1=(x\wedge 0)\vee(\grave{x}\wedge 1)=\grave{x}\wedge 1=\grave{x}.$

ou encore $x+\grave{x}=1$

c)STRUCTURE D'ANNEAU

Théorème 3.4 *Tout treillis de BooLe est un anneau commutatif et unitaire pour les oprations :* $\begin{cases} x+y=(x\wedge\grave{y})\vee(\grave{x}\wedge y) \\ xy=x\wedge y \end{cases}$ *En outre , dans cet anneau la mulltiplication est indempotents :*

Pour tout x *on* $x^2=x$

.Demonstration :

Soit un treillis de Boole E

-D'aprés se qu'ona vu ,(E,+)est un groupe abélien.

-Définissons la mulltiplication par : xy= x∧y(on note, suivant'usage xy au lieu de x.y)

• *cette opération est commutative, associative et idempotente.*

•1 *est élément neutre :* $x \wedge 1 = x = x.1$

• *Elle est distributive par raport a l'addition :*

$(x+y)z = [(x \wedge \grave{y}) \vee (\grave{x} \wedge y)] \wedge z = (x \wedge \grave{y} \wedge z) \vee (\grave{x} \wedge y \wedge z)$

$xz + yz = [(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)\grave{}] \vee [(x \wedge z)\grave{} \wedge (y \wedge z)]$

$xz + yz = [x \wedge z \wedge (\grave{y} \vee \grave{z})] \vee [(\grave{x} \vee \grave{z}) \wedge y \wedge z]$

$xz + yz = (x \wedge z \wedge \grave{y}) \vee (x \wedge z \wedge \grave{z}) \vee (\grave{x} \wedge y \wedge z)$ *or:* $\grave{z} \wedge z = 0$

$xz + yz = (x \wedge z \wedge \grave{y}) \vee (\grave{x} \wedge y \wedge z$ *[1])*

3.3 ANNEAU BOOLEEN

Définition 3.6 *On appelle anneau booléen tout anneau unitaire dont la multplication est idempotente(*$x^2 = x$*).*

Exemple 3.5 •$(z/2z, +, .)$*est un anneau booléen.*

•*(P(E),*$\Delta.\cap$*)est un anneau booléen.*

Proposition 3.3 *tout anneau de Boole est commutatif.*

preuve :

si x et y sont deux élément d'un anneau de Boole

supposons $xy \neq yx$*. alors* $yxyx \neq yyxx$ *donc* $yx \neq yx$ *ce qui est faux.*

Théorème 3.6 *Tout anneau Booléen est un treillis de Boole en définissant les opérations*

$$\begin{cases} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy) \text{ etx} \leq y \Longleftrightarrow xy = x \text{ est une relation d'ordre.} \end{cases}$$

démenstratioon.

• *loi* $\wedge$ *est commutative, associative et idempotente.*• *loi* $\vee$ *est :commutative ;*

•*Associative :* $(x \vee y) \vee z = x+y+xy+z+(x+y+xy)z = x+y+z+xy+yz+zx+xyz$,

expression symétrique en x,y,z.• *Idempotente :* $x \vee x = x+x+x^2 = x+x+x = x$

• *Les lois d'absorption sont vérifiées :*

$x \wedge (x \vee y) = x(x+y+xy) = x^2+xy+x^2y = x+xy+xy = x$

$x \vee (x \wedge y) = x+xy+x^2\ y = x$

•*Distributivité de* $\wedge$ *par raport a* $\vee$

$x \wedge (y \vee z) = x(y+z+yz) = xy+xz+xyz.$

$(x \wedge y \vee (x \wedge z) = xy+xz+x^2yz = xy+xz+xyz.$

pour tout x

$, x \wedge 0 = x.0 = 0$ *donc* $0 \leq x, 0$*est le plus petit élément.*

$x \wedge 1 = x.1 = x$ *donc* $x \leq 1$ *est le plus grand élément .*•*Complmentation* :

Posons $x^{'} = x+1$

$x \wedge x^{'} = x(x+1) = x^2+x = x+x = 0$

$x \vee x^{'} = x+x+1 = 1$

3.4 TREILLIS ET ANNEAU ASSOCIES

soit E un treillis de Boole,nous lui avons associé l'anneau booléen que nous noterons pour l'instant A(E) en définissant les opérations :

• $x+y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ *et* • $xy = x \wedge y$

Soit B un annea booléen,nous lui avons associé le treillis de Boole que nous noterons pour l'instant T(B) en définissant les opérations :

• $x \wedge y = xy$ *et* • $x \vee y = x+y+xy.$

Proposition 3.4 | $T(A(E)) = E$

•*Dmonstration*

Notons $\dot{\wedge}$ *et* $\dot{\vee}$ *les opérations dans* $T(A(E))$: $x\dot{\wedge}y = xy = x \wedge y$,*il en résulte que la relation d'ordre est la mème danx EetT*$(A(E))$, *il s'agit donc de méme treillis*

Proposition 3.5 |*A(T(B))=B*

• Démonstration

Notons$\dot{+}$ *et*$\times$*les opérations dans* $A(T(B))$:

$x \times y$=$x \wedge y = xy$

$x\dot{+}y$=$(x\wedge y') \vee (x' \wedge y) = [x(y+1)] \vee [(x+1)y] = x(y+1) + (x+1)y + xy(x+1)(y+1)$

$x \dot{+} y = xy + x + xy + y + x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy = x + y$

conclusion

sur un ensemble E il est équivalent de défnir :

Une structuure de treillis de Boole(E,$\leq$*,*$\wedge$*,*$\vee$*,0,1,')*

Une structure d'anneau booléen(E,+,.,0,1) On parle souvent d'algébre de Boole pour désiner l'ensemble des ces deux structures : $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ', +, .)$

il sera utile de retenir le formolaire suivant qui permet les passages d'une structure à l'autre :

$$\begin{cases} xy = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy \ \ 1) Surlarelationd'order \\ x' = x + 1 \end{cases}$$

Considérons une algébre de Boole $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ', +, .)$

A. *la relation d'ordre :*$x \leq y$ *peut être exprimée de plusieurs façons équivalences :*

•*par xy=x(on utilisera de préférence la notation xy à* $x \wedge y$)

•*par*$x \vee y = y$

•*par* $\grave{x} \vee y = 1$, *car* $\grave{x} \vee y = x + 1 + y + (x+1)y = x + y + xy + y + 1 = x \vee \ y + y + 1$

•$x\grave{y} = 0, car x\grave{y} = (\grave{x} \vee y)\grave{}$

B. *Nous savons que la relation d'ordre compatible avec les opérations .et* $\vee$: $x \leq y$ *implique* $xz \leq yz$ *etx* $\vee\, z \leq y \vee z$ *pour tout z.Mais il n'en est pas de même pour l'addition , par exemple :0≤1 mais 0+1=1>1+1=0.*

C. $x \leqslant y$ *équivaut à*$\grave{y} \leqslant \grave{x}$, *car :*

$xy = x$ *équivaut à* $(xy)\grave{} = \grave{x}, soi s \grave{x} \vee \grave{y} = \grave{x}$

D. *Sur les opérations :-*

enumerate

E. *anneau booléen qui a au moins trois éléments n'est pas intégre.*

En effet , si x≠0 et x≠1(donc x+1≠ 0*), alors x(x+1)=0.*

F. *le seul anneau booléen intégre est l'anneau à deux éléments* $0, 1$ *,que nous noterons* U*.ce n'est autre d' ailleurs que le corps* $Z/2Z$.

3)Les quatre opérations $\therefore, +, \vee, \grave{}$ *ne sont pas indépendantes,deux de ces opérations (convenablement choisies)permettent de définir les autres :*

- *avec. et+* $\begin{cases} x \vee y = x + y + xy \\ \grave{x} = x + 1 \end{cases}$
- *avec . et '* $\begin{cases} x \vee y = (\grave{x}\grave{y}) \\ x' = x + 1 \end{cases}$
- *avec* $\vee$ *et '* $\begin{cases} xy = (x \vee y)\grave{} \\ x+y = (\ (x \vee y)\grave{} \vee (\grave{x} \vee \grave{y}))\grave{} \ (d'ou\ 1 = x \vee \grave{x}\ et\ 0 = \hat{1}) \end{cases}$
- *avec +* $et \vee$ $\begin{cases} x = x+1 \\ xy = (x+1) \ \vee (y+1)+1 \end{cases}$

les deux autres paires (.,$\vee$*) et (+,*$\grave{}$*) ne suffisent pas pour définir les autres opérations.*

On peut également construire une opération supplémentaire qui à elle seule permet d'exprimer toutes les autres. par exemple :

$$x|y = \grave{x}\grave{y}$$

On a alors :

$$\grave{x} = x|x$$

$$xy = (x\ |x\ )\ |(y\ |y)$$

$$x \vee y = (x|y)|(x|y)$$

$$x+y = (x\ |x)\ |(y|y)(x|y)$$

Exemple 3.7 *anneax Booleens*

- Tous les anneaux booléens P(E).

-L'anneau booléen U={0,1},qui est

3.5 MORPHISMES BOOLEENS

3.5.1 GENERALITES

aussi un cas particulier de l'exemple précédent pour E un singlenton.

• *ANNEAU DES DIVISEURS D'UN NOMBRE :*

pour tout entier $n \in N^*$,nous avons inroduit l'ensemble $D(n)$ est un sous-treillis de $(N^*, \backslash)$, c'est donc lui-même un treillis distributif, il posséde un plus petit élément (1) et un plut grand élément (n).Cherchons à quelle condition ce treillis est compllémenté.

Etant donné $x \in D(n)$,supposons qu'ill existe $\grave{x} \in D(n)$ tel que :

$x \wedge \grave{x} = 1$ c'est-à-dire pgdc(x,$\grave{x}$) = 1

$x \vee \grave{x} = n$, c'est-à-dire ppmc(x,$\grave{x}$) = n.

La première conditions se traduit par x et $\grave{x}$ sont premier entre eux dans ce cas la soconde condition se traduit par $x\grave{x} = n$(ici $x\grave{x}$ désigne le prodit ordinaire) la condition nécessaire et suffisante por que $D(n)$ soit complémenté est donc :

pour tout $x \in D(n) : x$ et $\dfrac{n}{x}$ sont premier entre eux

Supposons x et $\dfrac{n}{x}$ non premiers entre eux ,ils ont un diviseur premier cmmun p,soit :$x = pa$ et $\dfrac{n}{x} = pb$, d'ou $n = pbx = p^2ab$, donc n est divisible par le carré d'un nombre premier.

Réciproquement ,si n est divisible par le carré d'un nombre premierp, $n = kp^2$,alors $x = p$ et $\dfrac{n}{x} = kp$, ne sont pas premier entre eux.

Finalement, on a le résultat suivant :

Proposition 3.6 *le treillis $D(n)$,ordonné par divisibilité, est un treillis de Boole si et seulement si n n'est divisible par aucun carré de nombre premier .Cela signifie que n est de la forme $p_1p_2.....p_s$ les p_i sont des nombre premier distincts.*

Dans ce cas ,D(n) est une algébre de Boole avec les opérations :

$xy = pgdc(x, y\ etx \vee y = ppmc(x, y)\ et\ \grave{x} = \frac{n}{x}\ et\ x + y = pgdc(ppmc(x, y), ppmc(\frac{n}{x}, \frac{n}{y}))$

.

Exemple 3.8 *on a représenté ci-dessous les trois anneux Booleens*

:D(2), D(6), D(30) .Dans D30 on calcule, par exemple :5+2=12 et 6.10=2

Définition 3.7 *Soit A et B deux anneaux booléens,une applicatio f de A dans B est dite morphisme booléen(ou simplement morphisme s'il n'ya pas de confusion) si f etst un morphismeunitaire d'anneau, c'est-dire vérifie :*

$f(x+y) = f(x)+f(y), f(xy) = f(x)f(y), f(1) = 1$. *D'aprés les remarque faites au paragraphe précidante, il en résulte qu'un morphisme booléeh préserve toutes les opérations d'algebre booléenne :*

$f(x \vee y)=f(x) \vee f(y), f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), f(0) = 0.$

On peut égalment énoncer :

Proposition 3.7 *Si A et B sont deux algàbre booléennes et f une applicatio de A dans B, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

a)f est un morphisme booléen.

b)Quels que soient x, y *dans*$A : f(xy) = f(x)f(y)\ et\ f(\grave{x}) = f(x)\grave{}$

c)Quels que soient x, y *dans A :*$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)\ et\ f(\grave{x}) = f(x)\grave{}$

Remarque

Si $festunmorphismeboolende\ AdansB\ ondfinira$:

• *f est un monomorphisme booléen :si f est injective.*

• *f est un épimorphisme booléen :si f est surjective.*

• *f est un isoimorphisme booléen :si f est bijective*

• *f est un endomorphisme booléen :si A=B avec la même structure.*

• *f est un automorphisme booléen :si f est un endomorphisme bijectif*

ce vocabulaire sera justifié dans l'étude catégorique.

3.5.2 Composition de morphisme

Considérons trois anneaux booléens A ,B ,C et deux morphismes : f :A⟶B te g :B⟶C

Proposition 3.8 *•L'application gof estunmorphismedeAdans C.*

• *si f et g sont deux monomorphismes(recp.épomorphismes,resp.isomorphismes),il en est de même de gof.*

• *si f est un isomorphisme booléen de A dans B , alors l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme booléen de B dans A*

•*Dmonstration*

Soientx_1 et y_1 deux éléments deB :

$x_1 = f(x)$ ou'x ∈ Aest déterminé de façon unique,$x = f^{-1}(x_1)$

$y_1 = f(y)$ ou' y ∈ Aest déterminé de façon unique,$y = f^{-1}(y_1)$

$x_1 y_1 = f(x)f(y) = f(xy)$, d'ouxy $= f^{-1}(x_1y_1) = f^{-1}(x_1)f^{-1}(y_1)$

$\grave{x}_1 = f(x)\grave{} = f(\grave{x})$d'ou$\grave{x} = f^{-1}(\grave{x_1}) = f^{-1}(x_1)\grave{}$.

Proposition 3.9 *L'ensemble des automorphismes booléens d'un anneau booléen A est un groupe pour la loi de composition des applications.*

Ce groupe sera naté Aut(A).

La démonstration est élémentaire.

Notons qu'en générale ce groupe n' est pas commutatif.

Chapitre 4

LE CALCUL DANS UN ANNEAU DE BOOLE

Définition 4.1 *Une proposition est une suite finie de mots de lettre ou des symbole au quelle on peut attribuée une valeur de vérité(vrai ou faux)sons ambiguité*

Exemple 4.1 *1)Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carré des cotés de l'angle droit.*
2)10 divise 17

4.1 Sémantique d'un langage propositionnal

- Des connectrurs logiques($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$).Cette liste n'est pas exhaustive , elle peut changer d'un enseignant à un autre université à une autre
- Des symboles auxiliaires.

4.1.1 Les régles d'écriture

Les régles d'écriture précisent la maniére dont sont assombles les symboles de l'alphabet pour former des exprressions bien formées (ou formules) du langage propositionnal :

1)Toute variable propositionnelle est une formule ;

2) si α est une formule ,$\neg\alpha$(ou $\bar{\alpha}$)est une formule :

3) Si α et β sont des formules, $(\alpha \wedge \beta), \alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta)$et $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ sont des formules :

4)Uue expression n'est une formule que si elle est écrite conformément aux régles1,2 et3

4.2 CONNECTEURS LOGIQUE

4.2.1 La négaion,$\neg$

La négation d'une proposition P noté $\neg P$ ou $\bar{P}$ est définie de la maniére suivante :

Si la proposition P est vraie alors $\bar{P}$ est fausse.

Si la proposition P est fausse alors $\bar{P}$ est vraie.

En résumé, on table de vérité suivante :

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

4.2.2 Les connecteurs logiques (et - et - ou)

La conjonction de deux propositions P et Q notée symboliquement par $P \wedge Q$ et se lit(P et Q)est vraie si est seulement si les deux propositions P et Q sont vraies simultanément D'où la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction,∨

La disjonction de deux propositions P et Q notée symboliquement par P∨Q et se lit(P ou Q) est fausse si est seulement si les deux propositions P et Q sont fausse simultanément D'où la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication ,⇒

Le connecteur"⇒" est appelé le Le connecteur d'implication la proposition P⇒Q est fausse dans le cas où P est vraie et Q est fausse , Elle est définie par le tableau suivant :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

L'équivalence ,⇔

Le connecteur" ⇔" est appelé le connecteur d'équivalence la proposition P ⇔ est vraie dans le cas où P et Q ont la même valeur de vérité, Elle est définie par le tableau suivant :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4.3 L'ensembles des propositions

•*Soit L ensembles des propositions :*$L = \{ P/P \text{ proposition}\}$

•*On définie sur*L *une relation* $\equiv$: $P \equiv Q$ *ssi* P*et* Q *ont toujour la même valeur de vérité cette relation* $\equiv$*est une relation d'équivalence et* $L/\equiv = \bar{L}$

•*On définie sur* $\bar{L}$ *relation d'ordre* $\leq$: P *et* $Q \in \bar{L}; P \leq Q$*si et seulement si*$P \Rightarrow Q$

•$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, -; +, .)$ *est une Algébre de Boole.*

•$(P, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, -)$*est une Treillis de Boole*

4.4 PROPOSITIONS VRAI

$$\begin{cases} P \wedge Q \Rightarrow P \\ P \wedge Q \Rightarrow Q \end{cases} d'ou \ \ P \wedge Q \leq P \ et \ P \wedge Q \leq Q$$

$$\begin{cases} P \Rightarrow P \vee Q \\ Q \Rightarrow P \vee Q \end{cases} d'ou \ \ P \leq P \vee Q \ et \ Q \leq P \vee Q$$

si$R$ *est un majorant de*$\{P, Q\}$ *Alors* $P \leq R$ *et* $Q \leq R$ *d'ou*$(P \Rightarrow R$ *et* $Q \Rightarrow R)$ *d'ou*

$$P \vee Q \Rightarrow R.donc \ , P \vee Q \leq R$$

$P \vee Q$ *est le plus petit majorant i.e,*$P \vee Q = Sup\{P, Q\}$

si R *est un minorant de* $\{P, Q\}, R \leq P$ *et* $R \leq Q$ *d'ou* $(R \Rightarrow P$ *et* $R \Rightarrow Q)$ *donc*

$$R \Rightarrow P \wedge Q \ Alors \ R \leq P \wedge Q$$

$P \wedge Q$ *est le plus grand des minorant i.e* $, P \wedge Q = Inf\{P, Q\}$

4.5 LES METHODES DE DEMONSTRATION

soit $(B, +, .)$ *anneau de Boole,*P *et*Q *deux propositions.*

$$1 + P = \bar{P}$$

$$d'ou \ 1 + P = (\bar{1} \wedge P) \vee (1 \wedge \bar{P}) = \bar{p}.$$

$$donc : 1 + P = \bar{P}$$

$$P \Rightarrow Q \equiv (1 + Q) \Rightarrow (1 + P)$$

$$d'ou \ (1 + Q) \Rightarrow (1 + P) \equiv (1 + P) \vee \bar{Q} \equiv \overline{P.(1 + Q)} \equiv \bar{P} \vee Q.$$

$$donc : P \Rightarrow Q \equiv (1 + Q) \Rightarrow (1 + P)$$

$$P \Rightarrow Q \equiv \bar{p} \vee Q$$

$$d'ou \ P \Rightarrow Q \equiv (1 + P) \vee Q = (0 \wedge P) \vee (1 \wedge \bar{p}) \vee Q = 0 \vee \bar{p} \vee Q = \bar{p} \vee Q$$

$$donc : P \Rightarrow Q \equiv \bar{p} \vee Q$$

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \bar{Q}$$

$$d'ou P \wedge \bar{Q} = P.(1+Q) = P + PQ = P \wedge 1 + P \wedge Q = P \wedge (1+Q) = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{Q} \equiv \overline{\bar{P} \vee Q} \equiv \overline{P \Rightarrow Q}$$

$$donc : \overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \bar{Q}.(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \bar{Q}) \equiv \bar{P}$$

$$d'ou\ (P \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}) \equiv \bar{P} \vee (Q \wedge \bar{Q}) \equiv \bar{P} \wedge 0 \equiv \bar{P}$$

$$donc : (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \bar{Q}) \equiv \bar{P}$$

خلاصة

في هذا العمل قمنا بتجميع بعض المفاهيم الأساسية لجبر التراتيب والشبكات ، لتعريف ما يجعل شبكة بول ومن ذلك حلقة وجبر بول . كون مجموعة القضايا المنطقية لها بنية شبكة بوال أي حلقة بول ،أصبح منطق القضايا هو حساب جبري بحت في الحلقات الشيء الذي سمح لنا بإجراء حسابات كلاسكية ويسمح بتوضيح صحة أو خطأ القضايا التي نصادفها وتلك المتداولة . الهدف من عملنا هذا محاولة التحفيز على استعمال نتائج وتقنيات الحلقات والزمر التي لدينا ، لتلسيط الضوء على بعض مشاكل المنطق الرياضي وإمكانية إعطاء بعض الإجابات.

Résumé

Dans ce travail, nous avons rassemblé certains résultats et notations essentielles de l'algèbre ordinal et des treillis, pour aboutir à la définition de treillis de Boole et par la suite aux anneaux de Boole et algèbre de Boole .

L'ensemble des propositions logique à une structure de treillis de Boole donc anneau de Boole. Ce qui donnera la possibilité de vérifié d'une proposition logique par un simple calcul purement algébrique..\\

Le but de ce travail est de motiver à l'utilisation des résultats et des résultats et les techniques de la théorie des groupes et des anneaux pour éclairer certains problèmes de logique et la possibilité de donner quelques réponses.

Summary

In this work we gathered some concepts of Algebraic order and lattices to illustrate Bool's network .from that the ring and Bool's Algebra, because the group of logical lattices has the form of Bool's lattices i.e Bool's s

As the logic cases have become properly algebric calculation in the rings of the thing that allowed us to do classical calculation and permitted to illustrate if the current cases we face are right or wrong.

The aim of our work is to motivate the use of the results and technics of rings and groups we have so as to explain some of the mathematical logic issues and makes it possible to give some answers for them.

Bibliographie

[1] *D.PONASSE, J-C CARRAGA*Algébre et Topologie Booléennes, *MASSON Paris1979.*

[2] *J. F.PABION* , Lgique Mathématique : -hermann.Paris,*1976*

[3] *A.ARNOLD ,IRENEGUESSARIAN* Mathématique pour l'informatique,

MASSON-2001 PARIS.

[4] *N.BOURBAKI,*Eléments De Mathématique.*HERMANN,Paris 1970*

[5] *A.BELHADJ,* Génération de trellis et propiété, *Mémoire de magistére, université Tizi-ouzo, ALGERIE.2011.*