



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière



DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : SAIDOU Hani

Thème

**Approximation d'un problème elliptique
en 1D par des éléments finis inversés dans
un domaine non borné**

Soutenu publiquement le : 3/07/2019

Devant le jury composé de :

Djamel Ahmed Chacha	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Kaliche Keltoum	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie mon travail à mes parents :

Ma mère, ma source infinie de force, d'inspiration et d'amour qui a été toujours à mes cotés.

Mon père qui a toujours cru en moi avec ou sans mes bons résultats.

*Mes frères et mes sœurs : Nacira * Fatna * Mohamed * Roumaissaa * Zino.*

Ma grand mère.

*Mes tantes et mes oncles surtout : Zohra * Khadija * Keltoum * Agida * Sabah * Taous
* Selma.*

*et ses enfants : Hatem * Sara * Djihane * Souhib * Mehmoud*

** Cerine * Saif * Fati * Asma * Douaa.*

A toute la famille : Saidou et Hellaoui, petits et grands chacun a son nom.

*Tous mes amis surtout : Ilham * Bouchra * Sara * Maroua * Houda * Messouda * Maissonne.*

A tous mes collègues de licence " Université de Tammanrsset " surtout :

*Sara * Asma * Hourai * Houda.*

*Tous mes amis de résidence universitaire surtout : Sabah * Noura * Randa * Siham * Hiba **

*Asma * Rima * Khaoula .*

Mes collègues des mathématiques.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

◇ Hani ◇



REMERCIEMENT

*Avant tout, nous remercions Allah
Nous tenons à remercier vivement notre encadreur
Mlle . Keltoum Kaliche
pour sa gentillesse ; son aide, ses conseils et sa disponibilité
dans ce travail. Nous souhaiterons également remercier nos
professeurs de la faculté département de mathématiques
pour tout le savoir qu'il nous ont donné.
Nos profonds remerciements pour les membres
de jury qui ont accepté d'évaluer
ce travail.*



TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	vi
Introduction	1
1 Le cadre fonctionnel : Les espaces de Sobolev avec poids	3
1.1 Les espaces de Sobolev a poids	3
1.1.1 Préliminaires et notation générales	3
1.1.2 Définition de l'espace $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$	4
1.1.3 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$	6
1.2 Inégalités de Hardy	7
1.2.1 Les espaces de traces	8
2 Discrétisation du problème par les éléments finis inversés	10
2.1 Formulation variationnelle de problème	10
2.1.1 Problème variationnelle	10
2.1.2 L'existence et l'unicité	11
2.2 Description de la méthode	14
2.2.1 Présentation de la méthode	14
2.2.2 L'espace discret	14
2.2.3 Estimation d'erreur	17
3 Quelques tests numériques	19
3.1 Fonctions de base. La matrice de rigidité	19

3.2 Tests de calcul 22

Conclusion

Annexe A

Annexe B

Bibliographie

TABLE DES FIGURES

2.1	Domains Ω_0 et Ω_∞	15
2.2	Une illustration d'un maillage classé de l'intervalle $]0, 4[$ pour $\mu = 1, 0.8, 0.3$	17
3.1	Le solution exact et le solution approchée dans l'intervalle $[1, 8]$ pour $M =$ $2N$ avec $N = 100$ et $R = 2, \gamma = 1.$	23

NOTATIONS ET CONVENTIONS

- ✓ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.
- ✓ $\partial\Omega$ frontière de Ω .
- ✓ $Supp u$ Support de u .
- ✓ $\langle, \rangle_{E', E}$ produit de dualité E', E .
- ✓ ∇u Gradient de u définit par $\nabla u \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
- ✓ Δu Laplacien de u .

INTRODUCTION

La plus part des problèmes rencontrés en ingénierie et en physique conduisent à des équations aux dérivées partielles (EDP) posées sur domaines non bornés, notamment en mécanique des fluides, en chimie quantique, en acoustique et en électromagnétisme. La difficulté principale dans la résolution de ces équations réside dans le comportement des solutions à l'infini. Parmi les méthodes numériques qui ont été conçues pour surmonter cette difficulté on cite la méthode des éléments infinis (voir [20, 9]), la méthode des frontières artificielles (voir [21, 11]), les équations intégrales et les éléments de frontière (voir [13, 8, 10]), les méthodes spectrales (voir [7, 18]) et la méthode des éléments finis inversés (voir [4, 5]).

L'objectif de ce travail est d'utiliser la méthode des éléments finis inversés pour résoudre un problème elliptique en dimension une posé sur un domaine non borné tels que l'espace tout entier, \mathbb{R}^n , un domaine extérieur (i.e. le complémentaire d'un compact de \mathbb{R}^n), ou le demi-espace \mathbb{R}_+^n . L'avantage de cette méthodes par rapport aux précédentes est qu'elle préserve l'infinité du domaine. Elle repose sur la partition du domaine en deux parties, une partie bornée où on utilise les éléments finis classique et une partie non bornée qu'on peut ramener à un domaine borné par une inversion adéquate. La méthode consiste de construire une approximation appropriée dans des espaces de Sobolev avec poids. Ces espaces permettent de décrire la décroissance ou la croissance des fonctions à l'infini. Ils ont été très largement utilisés pour l'étude des problèmes elliptiques dans des domaines non bornés (voir [1]). Dans ce mémoire on va résoudre l'équation suivante :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le première chapitre, nous donnons des notations, des définitions et des propriétés des espaces de Sobolev avec poids.

La deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations elliptiques du second ordre. On va tout d'abord donner une formulation variationnelle. Ensuite, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Dans le troisième chapitre, On va s'intéresser à l'approximation de la solution du problème par la méthode des éléments finis inversés. Une estimation d'erreur sera présentée. On terminera ce chapitre par des résultats numériques qui montre l'efficacité de la méthode.

Ce travail est tiré de l'article

**Numerical Approximation of Second-Order Elliptic Problems in Unbounded
Domains**

Par Tahar Z. Boulmezaoud · Samy Mziou · Tahar Boudjedaa

LE CADRE FONCTIONNEL : LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

1.1 LES ESPACES DE SOBOLEV A POIDS

1.1.1 Préliminaires et notation générales

Dans toute la suite, \mathbb{R}^n désigne l'espace euclidien de dimension n , avec $n \geq 1$. On note \mathbb{R}_+^n le demi-espace ouvert de \mathbb{R}^n défini par

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

et $\overline{\mathbb{R}}^n$ le demi espace fermé :

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{(x', x_n) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point générique de \mathbb{R}^n , on note $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$, $|x| = (x_1 + \dots + x_n)^{1/2}$ et

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}}.$$

Pour tout réel $p \geq 1$, on note p' son conjugué défini par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans \mathbb{R}^n et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace de distributions.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$ on note $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurable telles que

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty.$$

Lorsque $p = +\infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurable u telles que il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|u(x)| < C \text{ p.p.t sur } \Omega$$

ces espace sont muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_{\Omega} |u|^p dx)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{\Omega} |u| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

et par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev constitué des fonctions ayant leurs dérivées au sens de distributions jusqu'à l'ordre m dans L^p et $1 \leq p \leq \infty$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

On note \mathcal{P}_k l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k (avec la convention $\mathcal{P}_k = \{0\}$ pour $k < 0$).

1.1.2 Définition de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Motivation

Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega & (1) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega & (2) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $f \in L^2(\Omega)$. Si u est la solution du problème \mathcal{P} et v une fonction (suffisamment régulière) et satisfait (2), alors en multipliant (1) par v et on intègre, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

la formulation variationnelle associée au problème (\mathcal{P}) est :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Où

La forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue car :

$$a(u, v) \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

La forme linéaire $\ell(v)$ est continue sur V .

Par ailleurs, la coercivité de la forme a résulte de l'inégalité de Poincaré^[1]

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V$$

Comme V est un espace de Hilbert, alors d'après le théorème de Lax-Milgram^[2] il existe une unique solution $u \in V$ de la formulation variationnelle (FV).

Pour Ω non borné, par exemple $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'inégalité de Poincaré n'est pas satisfaite. Pour cette raison, les espaces de Sobolev avec poids sont plus appropriés pour l'étude de cette équation car, dans ces espaces, on a une inégalité du type Poincaré que nous donnerons ultérieurement. Dans toute la suite, $\langle x \rangle$ désigne la fonction poids de base, définie par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

Définition 1.1.1 ([15] et [6]) Soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$. Pour tout domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^n , on définit l'espace de Sobolev à poids $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq m, \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u \in L^p(\Omega)\}.$$

Cet espace est un espace de Banach équipé de la norme

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

et de semi-norme

$$|u|_{W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^{\alpha} D^{\lambda} u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Nous donnons un exemple d'un tel espace. Si $m = 2$ et $\alpha = 1$, alors l'espace $W_1^{2,p}(\Omega)$ est

$$W_1^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \langle x \rangle^{-1} u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \langle x \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}$$

On note $\dot{W}_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ et on note $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ son dual. Ainsi puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, on a $\dot{W}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

1. voir Annexe B
2. voir Annexe B

1.1.3 Quelques propriétés fondamentales de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

Dans la suite, on s'intéresse aux espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ avec Ω un ouvert non borné de \mathbb{R}^n . La définition que nous avons donné dans le paragraphe précédent sera utilisé uniquement pour les valeurs de m, n, p et α tels que

$$\alpha + \frac{n}{p} \notin \{1, \dots, m\}.$$

On verra que sous cette condition, certains inégalités comme notamment celle de Poincaré peuvent être étendre au domaine non borné. Dans le cas contraire c'est-à-dire si $\alpha + \frac{n}{p} \in \{1, \dots, m\}$, comme par exemple lorsque $n = 2$ et $p = 2$, il faudrait utiliser un poids logarithmique. Nous avons immédiatement les propriétés fondamentales ([15],[16]) suivantes :

1. $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
2. On a les inclusions continues [3] suivantes

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$$

3. Dans le cas $p = 2$, on note $W_\alpha^m(\Omega)$ au lieu de $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$. $W_\alpha^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lors que munit du produit scalaire :

$$(u, v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{|\lambda| \leq m} \int_\Omega \langle x \rangle^{(\alpha-m+|\lambda|)} D^\lambda u \overline{D^\lambda v} dx.$$

4. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, c'est à dire φ restriction à Ω d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'application :

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \varphi u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega)$$

est linéaire continue.

5. $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à \mathbb{R}_+^n des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
6. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto \langle x \rangle^\beta u \in W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\Omega)$$

est un isomorphisme [4]. L'application $u \mapsto \langle x \rangle^{-\beta} u$ est l'isomorphisme inverse.

7. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$ avec $|\lambda| \leq m$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \mapsto D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega)$$

est linéaire et continue.

3. voir Annexe A

4. application linéaire et bijective

8. $\mathcal{P}_\ell \subset W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ quand

$$\ell < m - \alpha - \frac{n}{p}.$$

Par exemple on a $W_1^{5,3}(\mathbb{R}^3)$ contient les polynômes de degrés $q \leq [5 - (1 + 1)] = 3$.

Définition 1.1.2 [15] Pour $m \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty$ on note $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme :

$$|u|_{\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} |\mathcal{D}^\lambda u|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}.$$

Théorème 1.1.1 [15] Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ les espaces $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncident, algébriquement et topologiquement pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a évidemment :

$$|\varphi|_{\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq |\varphi|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

1.2 INÉGALITÉS DE HARDY

Les inégalités de Hardy jouent un rôle particulièrement important. La démonstration de certaines équivalences de normes dans les espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$, on renvoie à [12] et [17] pour tous les détails de la preuve. La conséquence suivante joue un rôle fondamental dans l'étude des problèmes. Il s'agit d'une extension des inégalités de Poincaré.

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Hardy [16])

Soient $1 < p < +\infty, \beta \neq 1$ et f une fonction mesurable positive sur $[0, +\infty[$ de sorte que :

$$\int_0^\infty |f(t)|^p t^{\beta+p} dt < +\infty.$$

Soit,

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{+\infty} f(t) dt & \text{si } 1 > \beta, \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} x^{-\beta} (F(x))^p dx \leq \left(\frac{p}{|\beta-1|} \right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-\beta} (f(x))^p dx. \quad (1.1)$$

Théorème 1.2.1 Soient $m \geq 1, 1 < p < +\infty$. On a alors :

- (i) $W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u | u \in \mathcal{D}'(\Omega), \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega), |\lambda| \leq m\}$. pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou bien $m < \alpha + \frac{1}{p}$.
- (ii) $\dot{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u | u \in \mathcal{D}'(\Omega), \langle x \rangle^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\Omega), |\lambda| \leq m\}$. pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq m$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1, 2, \dots, m$.

(iii) Sur $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$, la norme induit par $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est équivalent à la norme :

$$u \longmapsto \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\langle x \rangle^\alpha D^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1, 2, \dots, m$.

1.2.1 Les espaces de traces

Définition 1.2.1 [I5] Pour $1 < p < +\infty, s \in]0, 1[$ on pose

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^{-s} u \in L^p(\mathbb{R}^n); \forall i = 1, \dots, n, \int_0^{+\infty} t^{-1-sp} dt \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + te_i) - u(x)|^p dx < \infty \right\}^5$$

Pour $s \in \mathbb{R}_+$ on désigne par $[s]$ la partie entière de s ; on introduit l'espace $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.2.2 [I5] Pour $1 < p < +\infty, s \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in W_{[s]-s}^{[s],p}(\mathbb{R}^n) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, |\lambda| = [s], \mathcal{D}^\lambda u \in W_0^{s-[s],p}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

et

$$W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^\alpha u \in W_0^{s,p} \right\}.$$

Rappelons la définition de la trace d'ordre j pour une fonction φ de $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^n)$.

$$(\gamma_j \varphi)(x') = \left\{ (D_n^j \varphi)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_n^j}(x', 0) \right\}.$$

Dans la suite nous poserons

$$\rho_n(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Définition 1.2.3 [I5] Pour $1 < p < +\infty, m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, |\lambda| \leq m, (1 + \rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}_+^n) \right\}.$$

Proposition 1.2.1 [I5] $X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme :

$$\|u\|_{X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|(1 + \rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \right)^{1/p}.$$

5. e_1, e_2, \dots, e_n désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Théorème 1.2.2 Les espaces $W_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ et $X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ ont les meme traces sur l'hyperplan $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$.

Théorème 1.2.3 [15] Il existe une application linéaire continue

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}) \text{ de } X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ dans } \prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$$

avec les propriétés suivantes

- 1) Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, $\gamma u = (u(x', 0), \dots, (\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} u)(x', 0))$
- 2) γ est un application surjectif⁶
- 3) Le noyau est égal à l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $X_0^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Théorème 1.2.4 [15] Il existe une application linéaire continue $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{i=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ avec les propriétés suivantes

- 1) Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ $\gamma u = (u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x', 0))$.
- 2) γ est un application surjectif.
- 3) $\gamma^{-1}(0) = \overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Définition 1.2.4 Soient $m \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$, on note $V_\theta^{m,p}(\hat{\Omega})$ l'espace composé de fonctions satisfaisant

$$\forall k \leq m, \quad |x|^{\theta+k-m} u^{(k)} \in L^p(\hat{\Omega})$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{V_\theta^{m,p}(\hat{\Omega})} = \left(\sum_{k \leq m} \int_{\hat{\Omega}} |x|^{(\theta+k-m)p} |u^{(k)}|^p dx \right)^{1/p}.$$

6. application surjective : $\forall y \in \text{im}(f)(\exists x | f(x) = y)$

DISCRÉTISATION DU PROBLÈME PAR LES ÉLÉMENTS FINIS INVERSÉS

2.1 FORMULATION VARIATIONNELLE DE PROBLÈME

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

par la méthode des E.F.I cette méthode repose sur la subdivision du domaine infini en deux sous-domaines, le premier borné où on peut utiliser les éléments finis standards et le second non borné qu'on peut ramener à un domaine borné par une inversion polygonale adéquate.

2.1.1 Problème variationnelle

On propose dans ce chapitre l'étude de l'équation elliptique dans l'espace Ω définir par :

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) (x) + b(x) \frac{du}{dx} (x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert non borné de \mathbb{R} , (domaine extérieur, demi-espace ou l'espace entier) ici, on prend Ω le demi espace $]1, +\infty[$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des coefficients variables et f est

une fonction donnée.

En plus, on considère la condition au limite de Dirichlet suivante :

$$u(1) = 0 \quad (2.2)$$

On cherche une solution de (2.1) dans l'espace $W_0^1(\Omega)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|u(x)|^2}{x^2 + 1} dx < +\infty, \int_1^{+\infty} |u'(x)|^2 dx < +\infty.$$

En multipliant l'équation par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, et en intégrant sur le demi-espace $]1, +\infty[$ on obtient

$$-\int_{\Omega} (a(x)u'(x))'v(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} (a(x)u'(x))v'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Nous introduisons pour l'instant (formellement) l'espace

$$\mathring{W}_0^1(\Omega) = \{u \in W_0^1(\Omega) | u(1) = 0\}$$

L'espace $\mathring{W}_0^1(\Omega)$ est appelé "cadre fonctionnel".

De la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathring{W}_0^1(\Omega)$, la formulation faible s'écrit sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathring{W}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{W}_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec,

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire, définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a(x) u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)u'(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx$$

et

la forme linéaire

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathring{W}_0^1(\Omega).$$

2.1.2 L'existence et l'unicité

Maintenant, on va montrer l'existence et l'unicité du problème (1), on a besoin de l'inégalité de Hardy suivante :

Lemme 2.1.1 *il existe une constante $\pi_0 > 0$, telle que :*

$$\forall u \in \dot{W}_0^1(\Omega), \int_1^{+\infty} |u'(x)|^2 dx \geq \pi_0 \int_1^{+\infty} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2 + 1} dx.$$

Nous supposons les hypothèses suivantes

(H₁) $a \in L^\infty(\Omega)$ et pour une constante $a_0 > 0$

$$a(x) \geq a_0 \text{ dans } \Omega.$$

(H₂) $b \in W_2^{1,\infty}(\Omega)$ et $c \in W_2^{0,\infty}(\Omega)$ c'est-à-dire qu'il existe trois constantes b_1, b_2 et c_1

$$|b(x)| \leq \frac{b_1}{\langle x \rangle}, \quad |b'(x)| \leq \frac{b_2}{\langle x \rangle^2}, \quad |c(x)| \leq \frac{c_1}{\langle x \rangle^2}, \text{ dans } \Omega$$

(H₃) $f \in W_0^{-1}(\Omega)$.

La dernière hypothèse **(H₃)** est notamment valable lorsque $f \in W_1^0(\Omega)$ dire

$$\int_1^{+\infty} (x^2 + 1) |f(x)|^2 dx < +\infty$$

(H₄) Il existe une constante $\pi'_0 < \pi_0$, tel que

$$c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq -\pi'_0 \frac{\pi_0}{\langle x \rangle^2}, \quad \text{dans } \Omega$$

Proposition 2.1.1 *Supposons que des hypothèses **(H₁)**, **(H₂)**, **(H₃)** et **(H₄)** sont valides. Ensuite, l'équation **(1)** avec la condition de Dirichlet **(2.2)** admet une solution unique $u \in W_0^1(\Omega)$.*

Preuve. La démonstration de cette proposition est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram. Il s'agit de trouver $u \in W_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in W_0^1(\Omega), a(u, v) = L(v).$$

L est la forme linéaire, définie par $L(v) = \langle f, v \rangle$.

La continuité.

Montrons d'abord la continuité de $L(\cdot)$:

On a

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} \langle x \rangle f(x) \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \langle x \rangle f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \frac{v(x)}{\langle x \rangle} dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tilde{c} \|v\|_{W_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Passant maintenant à la continuité de $a(., .)$. Une intégration par parties de $a(u, v)$, donne

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_{\Omega} b(x)u(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_{\Omega} (c(x) - b'(x))u(x)v(x)dx - \int_{\Omega} b(x)u(x)'v(x)dx. \end{aligned}$$

Alors , on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |a(x)u'(x)v'(x)|dx + \int_{\Omega} |(c(x) - b'(x))u(x)v(x)|dx + \int_{\Omega} |b(x)u(x)'v(x)|dx \\ |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |a(x)||u'(x)||v'(x)|dx + \int_{\Omega} \langle x \rangle |b(x)| \frac{|u(x)'||v(x)|}{\langle x \rangle} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \langle x \rangle (|c(x)| + |b'(x)|) \frac{|u(x)||v(x)|}{\langle x \rangle} dx. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (H_2) et de l'inégalité de Hardy, on déduit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq a_1 \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} + b_1 \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} + (c_1 + b_2) \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} \\ |a(u, v)| &\leq \max(a_1, c_1 + b_2, b_1) \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \|v\|_{W_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où la continuité.

La coercivité :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} a(x)v'(x)^2 dx + \int_{\Omega} b(x)v(x)'v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)v(x)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)v'(x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b'(x)v(x)^2 dx + \int_{\Omega} c(x)v(x)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} a(x) |v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] |v(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} a(x) |v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \langle x \rangle^2 \left[c(x) - \frac{b'(x)}{2} \right] \frac{v(x)^2}{\langle x \rangle^2} dx \\ &\geq a_0 \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx - \pi'_0 a_0 \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^2}{\langle x \rangle^2} dx \\ &\geq a_0 \left(1 - \frac{\pi'_0}{\pi_0} \right) \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, alors le problème **(I)** admet une solution unique dans $W_0^1(\Omega)$.

De plus, son unique solution satisfait :

$$C \|u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)} \quad (2.4)$$

En effet, l'estimation (2.4) est s'obtient en prenant $v = u$ dans (2.3) et en utilisant la continuité de la forme L et la coercivité de la forme bilinéaire a :

$$C\|u\|_{W_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)}\|u\|_{W_0^1(\Omega)}$$

avec $C = a_0 \left(1 - \frac{\pi'_0}{\pi_0}\right)$. On obtient

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1}(\Omega)}$$

■

Remarque 2.1.1 On peut aussi considérer l'équation (1) dans tout l'espace \mathbb{R} . Les arguments sont les mêmes, à condition que l'inégalité suivante soit utilisée à la place de l'inégalité de Hardy (1.1) lorsque $c = 0$

$$\forall v \in W_0^1(\mathbb{R}), \quad \inf_{k \in \mathbb{R}} \|v - k\|_{W_0^1(\mathbb{R})} \leq \kappa \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

2.2 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

2.2.1 Présentation de la méthode

La méthode des éléments finis inversées est une méthode d'approximation numérique sans troncature utilisé pour résoudre des problèmes elliptiques en domaines non bornés tels que l'espace tout entier \mathbb{R}^n , le demi-espace \mathbb{R}_+^n et des domaines extérieurs. Cette méthode à été développé par Boulmezaoud (2005) (voir [4]). Elle repose sur l'utilisation des espaces Sobolev avec poids et des éléments finis inversés. Son idée principale est de diviser le domaine non borné en deux parties : une partie borné où on utilise la méthode des éléments finis usuelle et une partie non borné qui sera transféré à un domaine borné par un transformation inversé.

2.2.2 L'espace discret

On décompose le demi-espace $\Omega =]1, +\infty[$ en deux sous-domaines, Ω_0 est un domaine bornée ici on choisit $\Omega_0 =]1, R[$, avec $R > 1$ une paramètre fixe et $\Omega_\infty =]R, +\infty[$ est un domaine non bornée tel que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_\infty$.

Dans le domaine Ω_0 , nous utilisons des éléments finis standard. Nous considérons une subdivision habituelle $x_0 = 1 < x_1 < \dots < x_N = R$ de Ω_0 et $h = \max_{i \in I} |x_{i+1} - x_i|$ et $\Delta_i =]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in I$, où $I = \{0, \dots, N-1\}$.

Nous considérons l'application d'inversion

$$x \mapsto t(x) = \frac{R^2}{x} \tag{2.5}$$

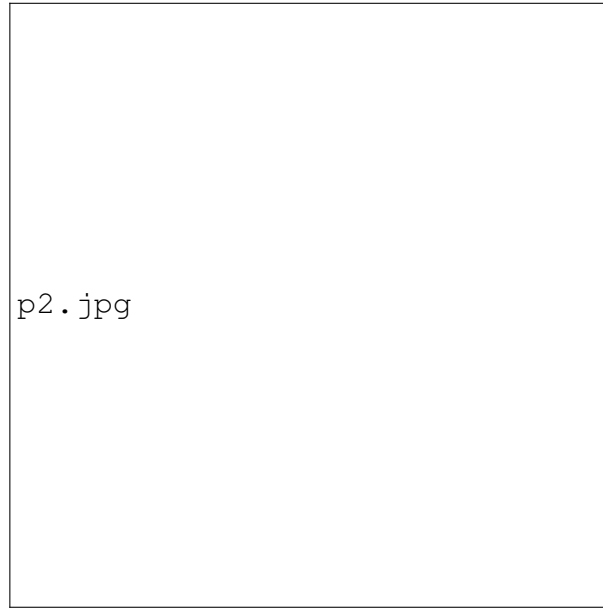


FIGURE 2.1 – Domains Ω_0 et Ω_∞

qui transforme le sous-domaine non bornée Ω_∞ dans le domaine bornée $\hat{\Omega} =]0, \mathbf{R}[$.
 Étant donné une fonction w définie sur Ω_∞ , Nous désignons par \hat{w} la fonction définie sur $\hat{\Omega}$
 Par :

$$\hat{w}(x) = \left(\frac{\mathbf{R}}{x}\right)^\gamma w(t(x)), \quad \forall x \in \hat{\Omega} \quad (2.6)$$

où ici et ensuite γ est un paramètre réel fixe.

Lemme 2.2.1 Soit $w \in W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. on a $\hat{w} \in V_\delta^{m,p}(\hat{\Omega})$ avec

$$\delta = \gamma + 2m - \alpha - 2/p.$$

La discrétisation sur Ω_∞ est obtenue à partir de la discrétisation sur $\hat{\Omega}$ en utilisant la transformation définie en (2.5).

Sur le domaine $\hat{\Omega}$, on construit une subdivision graduée comme suit.

Définition 2.2.1 Étant donné nombre réel $\mu (0 < \mu \leq 1)$, on dit qu'une famille de subdivisions $((\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq M})$, $\hat{x}_0 = \mathbf{0} < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M = \mathbf{R}$, de l'intervalle $\hat{\Omega}$ est classé en μ s'il existe trois constantes $\kappa_i > \mathbf{0}$, $1 \leq i \leq 3$ ne dépendant pas de la subdivision, telles que

$$\kappa_1 \hat{h}^{1/\mu} \leq \hat{x}_1 \leq \kappa_2 \hat{h}^{1/\mu}$$

$$\forall 1 \leq i \leq M - 1, \quad \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i \leq \kappa_3 \hat{h} \hat{x}_i^{1-\mu}$$

où $\hat{h} = \max_{1 \leq i \leq M-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)$.

Notez qu'une subdivision à 1 degré est une sous-division dans laquelle $\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i \lesssim \hat{h}$ pour tout $i \leq M - 1$.

Un moyen de construire une famille de mailles de classe μ est comme suit; considérons la séquence finie croissante $(\theta_i^*)_{1 \leq i \leq M}$ définie par $\theta_1^* = 1, \theta_{i+1}^* = \theta_i^* + (\theta_i^*)^{1-\mu}$, pour $1 \leq i < M$.

Alors, la subdivision de $\hat{\Omega} =]0, R[$

$$\hat{x}_i = \frac{\theta_i^*}{\theta_M^*} R, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq M$$

est classé en μ .

En effet, on peut observer que la différence $\theta_{i+1}^* - \theta_i^*$ augmente et

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \max_i (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i) = \frac{R}{\theta_M^*} \max_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) = \frac{R}{(\theta_M^*)^\mu} \\ \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i &= \frac{R^\mu}{(\theta_M^*)^\mu} \hat{x}_i^{1-\mu} = R^{\mu-1} \hat{h} \hat{x}_i^{1-\mu}, \\ \hat{x}_1 &= \frac{R}{\theta_M^*} = R^{1-1/\mu} \hat{h}^{1/\mu}. \end{aligned}$$

Sur la Fig. 1, nous affichons trois mailles graduées pour $\mu = 1$ (pas de gradation), $\mu = 0.7$ et $\mu = 0.5$.

Considérons maintenant une famille de graduées en μ $((\hat{x}_i)_{0 \leq i \leq M})$, $\hat{x}_0 = 0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M = R$, plus de $\hat{\Omega}$.

Laisser $J = \{0, 1, \dots, M - 1\}$ et $\hat{\Delta}_i =]\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}[$, pour $i \in J$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace discret qui approche l'espace $w(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} W_h(\Omega) &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_{\Delta_i} \in \mathbb{P}_k(\Delta_i), \forall i \in I \\ &\quad \hat{v}|_{\hat{\Delta}_i} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Delta}_i), \forall i \in J, \quad \text{et } \hat{v}(0) = 0\} \\ \mathring{W}_h(\Omega) &= \{v_h \in W_h(\Omega) | v_h(1) = 0\} \end{aligned}$$

Observez que les fonctions de $W_h(\Omega)$ dans Ω_∞ ne utilise pas des éléments finis usuelle, on utilise des éléments inversés.

Avant d'énoncer des résultats d'approximation, observons que l'espace $W_h(\Omega)$ dépend principalement du paramètre de discrétisation h , supposé tendre à zéro, et de trois paramètres de réglage R , γ et μ convenablement fixés.

De plus, nous avons

Lemme 2.2.2 *Supposons que $\gamma > \frac{-3}{2}$ ensuite*

$$\mathring{W}_h(\Omega) \subset \mathring{W}_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

Donc,

$$\gamma > \frac{-3}{2}. \tag{2.8}$$

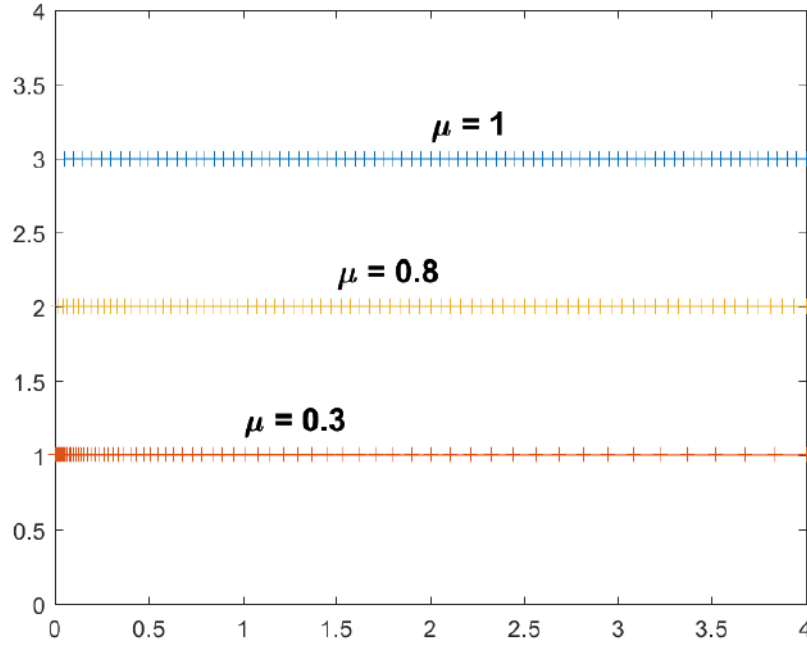


FIGURE 2.2 – Une illustration d’un maillage classé de l’intervalle $]0, 4[$ pour $\mu = 1, 0.8, 0.3$

Alors le problème approché de problème variationnelle est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \overset{\circ}{W}_h(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in \overset{\circ}{W}_h(\Omega) \end{cases} \quad (2.9)$$

telle que

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} a(x)u'_h(x)v'_h(x)dx - \int_{\Omega} b(x)u_h(x)'v_h(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u_h(x)v_h(x)dx$$

$$\langle f, v_h \rangle = \int_{\Omega} f(x)v_h(x)dx$$

admet une solution unique.

2.2.3 Estimation d’erreur

Théorème 2.2.1 Supposons que les hypothèses de la proposition (2.1.1) soient remplies. Supposons aussi que $u \in W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega)$ Pour certains vrais $\eta > 0$ et que

$$\eta - \frac{3}{2} < \gamma < \eta - \frac{1}{2}$$

Ensuite, l'estimation suivante est vérifiée

$$\|u - u_h\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + \hat{h}^{k \min(\mu^*, \mu)/\mu} \|u\|_{W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega_\infty)}$$

tel que $\mu^* = \frac{\eta}{k} > 0$.

Pour la démonstration en voir [5].

Corollaire 2.2.1 Supposons que l'hypothèse de la proposition (2.1.1) soit valable. Supposons aussi que $u \in W_{2k}^{k+1}(\Omega)$ et que $\gamma = -1$ (ou entre $-3/2$ et $-1/2$).

Alors, pour tout $\mu \in]0, 1]$

$$\|u - u_h\|_{W_0^1(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)} + \hat{h}^k \|u\|_{W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega_\infty)}$$

QUELQUES TESTS NUMÉRIQUES

Le but de ce chapitre est double. Tout d'abord, nous donnons quelques détails sur la structure et le calcul de la matrice de rigidité. Deuxièmement, nous présentons des résultats numériques qui confirment la convergence de la méthode et ses performances.

3.1 FONCTIONS DE BASE. LA MATRICE DE RIGIDITÉ

Pour construire une base pour l'espace $\overset{\circ}{W}_h(\Omega)$, Nous introduisons également les points discrétisés suivants en $\overline{\Omega}_0$ et $\overline{\Omega}_\infty$ définis respectivement par

$$\mathbf{x}_{i,r} = \mathbf{x}_i + \frac{r}{k}(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i), \quad \forall i \in I, \quad \forall 0 \leq r \leq k \quad (3.1)$$

De même, on considère les points $(\hat{\mathbf{x}}_{i,r})_{0 \leq i \leq M-1, 0 \leq r \leq k}$ définis par

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,r} = \hat{\mathbf{x}}_i + \frac{r}{k}(\hat{\mathbf{x}}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}_i), \quad \forall 0 \leq r \leq k \quad (3.2)$$

Soit $w_{i,r}$, $i \in I$ et $0 \leq r \leq k-1$, les fonctions de base des éléments finis habituelles définies plus haut Ω et satisfaisant : pour tout $i \in I$ et $0 \leq r \leq k-1$

- $w_{i,r} \in \overset{\circ}{W}_h(\Omega)$,
- $w_{i,r}(\mathbf{x}_{j,s}) = \delta_{i,j} \delta_{r,s}$, $\forall j \in I$ et $0 \leq s \leq k-1$,
- $w_{i,r}(\mathbf{x}_n) = 0$.

Évidemment, $Supp w_{i,r} \subset \cup_{|i-j| \leq 1} \overline{\Delta}_j$ si $r = 0$ et $Supp w_{i,r} \subset \overline{\Delta}_i$ si $0 < r \leq k-1$. De même, définissez la deuxième famille de fonctions de base $(w_{ir}^*)_{i \in J, 0 \leq r \leq k-1}$ comme suit :

- $w_{i,r}^* \in \overset{\circ}{W}_h(\Omega)$,
- $\widehat{w}_{i,r}^*(\widehat{x}_{j,s}) = \delta_{i,j} \delta_{r,s}$, $\forall j \in I$ et $0 \leq s \leq k-1$,
- $\widehat{w}_{i,r}^*(\widehat{x}_M) = 0$.

Ici $Supp w_{i,r}^* \subset \cup_{|i-j| \leq 1} \overline{\Delta_j}$ si $r = 0$ et $Supp w_{i,r}^* \subset \overline{\Delta_i}$ si $0 < r \leq k-1$. Sauf confusion, les fonctions $w_{i,0,0 \leq i \leq N-1}$, et $w_{j,0,0 \leq j \leq M-1}$, sont respectivement notées w_i et w_j^* (l'indice 0 est chuté).

La dernière fonction de base, notée ici par w_N , est mixte ; son soutien s'étend aux régions FEM et IFEM.

C'est la fonction unique de $\overset{\circ}{W}_h(\Omega)$ Satisfaisant

- $w_N(\widehat{x}_N) = \widehat{w}_N(\widehat{x}_M) = 1$,
- $w_N(x_{j,s}) = 0$ pour $0 \leq j \leq N-1$ et $0 \leq s \leq k-1$.
- $\widehat{w}_N(\widehat{x}_{j,s}) = 0$, $0 \leq j \leq M-1$ et $0 \leq s \leq k-1$.

On peut facilement prouver que la famille composée des fonctions

$(w_{i,r})_{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq r \leq k-1, (i,r) \neq (0,0)}$, $(w_{i,r}^*)_{0 \leq i \leq M-1, 0 \leq r \leq k-1, (i,r) \neq (0,0)}$ et w_N est une base de $\overset{\circ}{W}_h(\Omega)$.

Il s'ensuit que

$$\dim \overset{\circ}{W}_h(\Omega) = (N + M)k - 1. \quad (3.3)$$

Un élément $v_h \in \overset{\circ}{W}_h(\Omega)$ se décompose sous la forme

$$v_h = \sum_{i=1}^{M-1} \widehat{v}_h(\widehat{x}_i) w_i^* + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\ell=1}^{k-1} \widehat{v}_h(\widehat{x}_{i,\ell}) w_{i,\ell}^*$$

On note par $w_i (i \in I)$ dans Ω_0 et $w_j^* (j \in J)$ dans Ω_∞ lorsque $k = 1$, $\gamma = 2$ et $R = 1$. Maintenant, on note $(\psi_m)_{1 \leq m \leq d}$, avec $d = (N + M)K - 1$, ces bases.

Nous avons vu que La formulation (2.9) revient à la résolution d'un système linéaire de la forme

$$AX = B, \quad (3.4)$$

avec $A_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j)$, $B_i = L(\psi_j)$, et son terme générique est donné par

$$\begin{aligned} A_{ij} = a(\psi_j, \psi_i) &= \int_{\Omega} a(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} b(x) \psi_i'(x) \psi_j dx \\ &+ \int_{\Omega} c(x) \psi_i \psi_j dx, \forall 1 \leq i, j \leq M-1. \end{aligned}$$

Le membre de droite a par composantes

$$B_i = l(\psi_i) = \int_{\Omega} f(x) \psi_i dx, \forall 1 \leq i \leq M-1. \quad (3.5)$$

La forme de la matrice A dans le cas $k = 1$, pour lequel elle est tridiagonale. Les coefficients $a(w_j^*, w_i^*)$, $1 \leq i, j \leq M - 1$, correspondant aux éléments finis inversés satisfont.

Les coefficient de la matrice A s'écrivent :

$$a(\psi_i, \psi_j) = \int_{\Omega} a(x)\psi_i'(x)\psi_j'(x)dx + \int_{\Omega} b(x)\psi_i'(x)\psi_j(x)dx + \int_{\Omega} c(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$$

On pose

$$I_1 = \int_{\Omega} a(x)\psi_i'(x)\psi_j'(x)dx.$$

$$I_2 = \int_{\Omega} b(x)\psi_i'(x)\psi_j(x)dx.$$

$$I_3 = \int_{\Omega} c(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$$

On a

$$\widehat{w}(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^{\gamma} w(t(x)) \implies w(t(x)) = \left(\frac{R}{x}\right)^{-\gamma} \widehat{w}(x), \quad \forall x \in \widehat{\Omega} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} a(x)(w_j^{*'} + w_{j,l}^{*'})(w_i^{*'} + w_{i,l}^{*'})dx \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} a(x)\left(\frac{x}{R}\right)^{2\gamma} \left(\frac{\gamma}{x}\widehat{w}_j^*(x) + \widehat{w}_j^{*'}(x)\right) \left(\frac{\gamma}{x}\widehat{w}_i^*(x) + \widehat{w}_i^{*'}(x)\right)dx \\ I_2 &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} b(x)(w_j^{*'} + w_{j,l}^{*'})(w_i^* + w_{i,l}^*)dx \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} b(x)\left(\frac{x}{R}\right)^{2\gamma} \left(\frac{\gamma}{x}\widehat{w}_j^*(x) + \widehat{w}_j^{*'}(x)\right) \widehat{w}_i^*(x)dx \\ I_3 &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} c(x)(w_j^* + w_{j,l}^*)(w_i^* + w_{i,l}^*)dx \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{h}} c(x)\left(\frac{x}{R}\right)^{2\gamma} \widehat{w}_j^*(x) \widehat{w}_i^*(x)dx \end{aligned}$$

On utilise un changement de variable , on obtient :

$$\begin{aligned} A(w_j^*, w_i^*) &= \sum_{i,j} \int_{\mathfrak{h}} a(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma} \left(\frac{\gamma}{R}\widehat{w}_j^*(s) + \frac{s}{R}\widehat{w}_j^{*'}(s)\right) \left(\frac{\gamma}{R}\widehat{w}_i^*(s) + \frac{s}{R}\widehat{w}_i^{*'}(s)\right) ds \\ &\quad + \int_{\mathfrak{h}} b(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{R}\widehat{w}_j^*(s) + \frac{s}{R}\widehat{w}_j^{*'}(s)\right) \widehat{w}_i^*(s) ds \\ &\quad + \int_{\mathfrak{h}} c(t(s)) \left(\frac{s}{R}\right)^{2\gamma-2} \widehat{w}_j^*(s) \widehat{w}_i^*(s) ds \end{aligned}$$

où la somme est prise sur tous les entiers l tels que $|l - i| \leq 1$ et $|l - j| \leq 1$ (c'est-à-dire $l \in \{i - 1, i, i + 1\} \cap \{j - 1, j, j + 1\}$).

En pratique, ces intégrales pourraient être calculées exactement lorsque les coefficients a , b et c sont des constantes.

Dans d'autres cas, on peut utiliser une règle de quadrature de Gauss – Lobatto^[1] sur les intervalles $\widehat{\Delta}_k$ lorsque $0 \notin \widehat{\Delta}_k$. Lorsque $0 \in \widehat{\Delta}_k$, les intégrales sont singulières, mais elles convergent puisque $\widehat{w}_i^*(0) = \widehat{w}_j^*(0) = 0$ et γ satisfait (2.8).

Dans ce dernier cas, les intégrales peuvent être calculées explicitement en développant les coefficients a , b et c près de l'origine.

3.2 TESTS DE CALCUL

L'objectif ici est d'afficher quelques résultats numériques obtenus avec un code de calcul ou les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 ont été utilisés à la fois dans les régions MEF et MEFI. Le domaine considéré est le demi-espace $\Omega =]1, +\infty[$.

Le nombre de points équidistants discrétisés est N dans $\Omega_0 =]1, R[$ et M dans $\widehat{\Omega}$.

Dans ce test $M = 2N$ et

$$h = \max_{i \in I} |x_{i+1} - x_i|, \hat{h} = \max_{1 \leq i \leq M-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i).$$

Exemple : Un problème de Dirichlet avec des coefficients variables.

Nous considérons le problème lorsque $\Omega =]1, +\infty[$, le coefficient a oscille à des distances proches et éloignées.

$$a(x) = 1 + 0.2 \cos(40(x - 1)), b(x) = 0, c(x) = 0.$$

Les données f sont choisies de telle sorte que la solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = \frac{\sin(20(x - 1))}{1 + (x - 1)^2}.$$

Nous pouvons observer la solution approchée converge vers la solution exacte quand h est suffisamment petit (pour $N = 100$ et $M = 2N$).

1. voir Annexe A

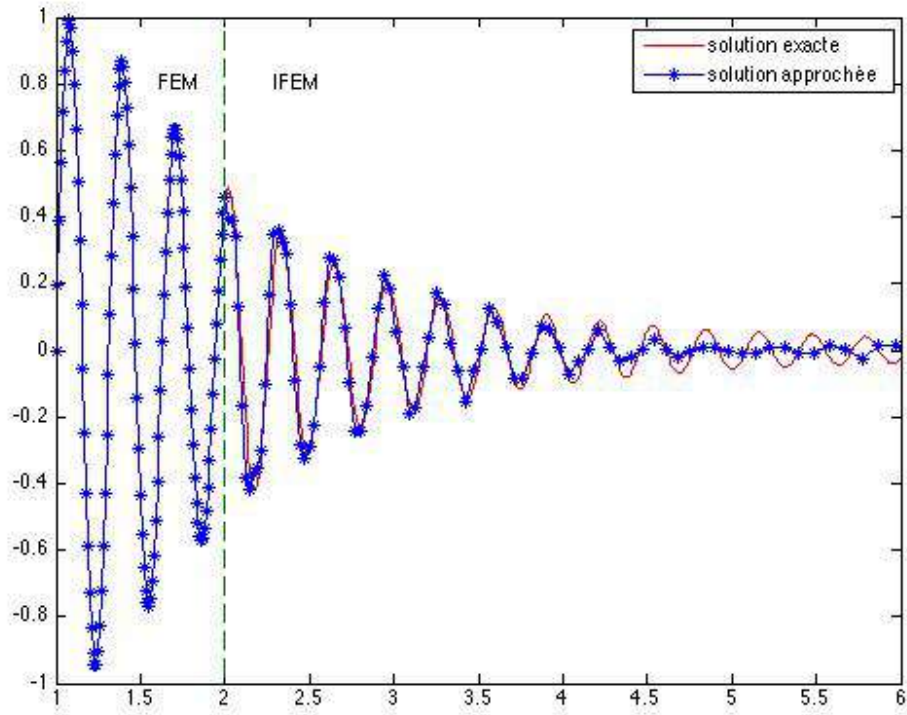


FIGURE 3.1 – Le solution exact et le solution approchée dans l'intervalle $[1, 6]$ pour $M = 2N$ avec $N = 100$ et $R = 2, \gamma = 1$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié l'approximation d'une équation elliptique du second ordre dans demi-espace $]1, +\infty[$ par la méthode des éléments finis inversés. Nous avons montré l'existence et l'unicité des solutions dans les espaces de Sobolev à poids qui ont très adapté à la résolution de tel problèmes. Nous avons aussi donné des résultats numériques qui montre l'efficacité de cette méthode. En perspective, on propose d'appliquer la méthode des éléments finis inversés pour résoudre des problèmes elliptiques en domaines extérieurs.

ANNEXE A

L'ouvrage de base utilisé dans ce chapitre est [19] :

Définition A.1. $\mathbb{P}_k, k \geq 1$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $\mathring{\mathbb{P}}_k$, le sous-espace de \mathbb{P}_k composé d'éléments satisfaisant $p(0) = 0$.

Théorème A.1.(l'inégalité Deny-Lions). pour $w \in H^{k+1}(]0, 1[)$

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|w - p\|_{H^{k+1}(]0,1])} \lesssim |w^{(k+1)}|_{L^2(]0,1])}$$

Théorème A.2. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $k - 1/2 < \theta < k + 1/2$, on a

$$\forall u \in V_\theta^{k+1}(]0, 1]), \inf_{p \in \mathring{\mathbb{P}}_k} \|u - p\|_{V_\theta^{k+1}(]0,1])} \lesssim |u|_{V_\theta^{k+1}(]0,1])}.$$

Définition A.2.(Fonctions k fois différentiables). Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , on définit l'ensemble des fonctions k fois différentiables dans Ω , à valeurs dans \mathbb{R} dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω par :

$$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}, k \geq 1$$

Définition A.3.(Support). On appelle support d'une fonction f l'adhérence (ou la fermeture i.e. le plus petit fermé) du lieu où la fonction n'est pas nulle :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$$

Définition A.4.(Noyau.) Le noyau du morphisme f est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

Définition A.5.(Inclusion continue). Soit A et B deux espaces de Banach.

On dit que A s'injecte de façon continue dans B , et on note par : $A \hookrightarrow B$ si :

- (i) $A \subset B$.
 - (ii) $\exists c > 0 : \|u\|_A \leq c\|u\|_B$
-

ANNEXE B

L'ouvrage de base utilisé dans ce chapitre est [19] :

FORMULE DE GREEN

Théorème B.1. (Formule de Green). Soit ω une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} \omega(x) \nu_i ds$$

où ν_i la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

Corollaire B.1 Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial \Omega} u v \nu_i, \quad \forall i \in 1, \dots, N$$

Théorème B.2.(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. En d'autres termes :

$$\exists! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle$$

THÉORÈME DE LAX-MILGRAM

Le théorème de Lax-Milgram est un théorème très important, la démonstration est basée sur le théorème de représentation de Riesz (voir [19]). Considérons un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.7)$$

Théorème B.3.(Lax-Milgram). Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que :

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V,$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive (on dit également V -elliptique),

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

(iii) la forme linéaire F est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \forall v \in V, |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V,$$

Alors, le problème (3.7) admet une et une seule solution. De plus, son unique solution satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}.$$

L'INÉGALITÉ DE POINCARÉ

Théorème B.4.(L'inégalité de Poincaré). Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert de largeur finie (i.e. borné dans une direction). Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p , telle que, pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

FORMULES DE QUADRATURE

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, l'objectif est d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x)w(x)dx$ ou w est une fonction poids donnée, strictement positive sur $]a, b[$. On supposera toujours f et w intégrable sur $[a, b]$.

Le principe sera de découper l'intégrale en une somme d'intégrales sur des petits segments :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)w(x)dx$$

et d'appliquer sur chacun des petits segments une formule de quadrature élémentaire. La somme constituant une formule de quadrature composée.

Dans la suite \mathcal{P}_k désignera l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

Formules de Gauss-Lobatto

Les formules de Gauss-Lobatto sont des formules fermées à $k + 1$ points dans lesquelles on impose $x_0 = a$, $x_k = b$.

Théorème B.6. Il existe un unique choix des $k - 1$ points x_i , $1 \leq i \leq k - 1$, de $]a, b[$ et des $k + 1$ poids W_i , $0 \leq i \leq k$, tels que la formule de quadrature, avec $x_0 = a$, $x_k = b$:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_0^k W_i f(x_i)$$

soit exacte sur \mathcal{P}_{2k-1} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace' s equation in \mathbf{R}^n . J. Math. Pures Appl. (9), 73(6) :579-606, 1994. ISSN 0021-7824.
- [2] N. Arar and T. Z. Boulmezaoud. Eigenfunctions of a weighted laplace operator in the whole space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 400(1) :161–173, 2013.
- [3] N.Arar.Résolution de problèmes elliptique en domaines non bornés.Département de Mathématique ,Université Costantine 1.2013.
- [4] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.
- [5] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 60(2) :295-312, 2014.
- [6] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space : an approach using weighted spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26(8) :633–669, 2003.
- [7] Canuto, C. and Harilharan, S.I. and Lustman, L. Spectral methods for exterior elliptic problems. Numer. Math.46 : 505-520, 1985.
- [8] Brebbia, C.A. and Telles, J.C.F. and WRObel, L.C. Boundary Element Thechniques. Springer, Berlin.32 : 973-990, 1984.
- [9] Burnett, D.S. A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion. J. Acoust. Soc. Am. 96(5,part 1) :2798-2816, 1994.
- [10] Colton, D.L. and Kress, R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. Pure and Applied Mathematics. Willey, New York. 32 :973-990, 1983.
- [11] Ihlenbug, F. Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. of Applied Mathematical Sciences. Springer, New York. 132 : 973–990, 1998.

- [12] Hardy ,G.G. ,Littlewood ,D.E. ,Polya,G. :Inequalities ,Cambridge (1952).
 - [13] Beer, G. and Smith, I.M. and Duenser, C. The boundary element method with programming : for engineers and scientists. Springer, Berlin.72 : 973-990, 2008.
 - [14] J. Giroire. Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.
 - [15] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46 :227–272, 1971.
 - [16] Bolley,J.Camus.Quelque résultat sur les espaces de Sobolev avec poids.Pub.Sém.Mat.Inf.Univ.Rennes,1968-1969.
 - [17] Kadlec et Kufner , Characterisation of fonctions with zero traces by integrals with weight functions (I and II) ;Casopis pro pestovani matematiky ,92 (1967).
 - [18] Halpern, L. A spectral method for the Stokes problem in three-dimensional unbounded domains. Math. Comp. 70 : 973-990,2001.
 - [19] V.Manet,methode des éléments finis,licence Creative Commons 3.0 France, 2013.
 - [20] Bettess, P. and Zienkiewicz, O.C. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. Int. J. Numer. Methods Eng. 11(8) : 1271-1290, 1971.
 - [21] Tsynkov, S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review. Appl. Numer. Math. 27(4) :465-532, 1971.
-

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة حلول المعادلات الإهليلجية في المجالات الغير محدودة باستخدام طريقة العناصر المنتهية العكسية. و على عكس الطرق العددية المعروفة القائمة على اقتطاع المجال، تحتفظ الطريقة المقترحة بالمجال غير محدود وتعتمد على وصف مقارب لسلوك الدوال في إطار وظيفي مناسب. في البداية نقوم بشرح الطريقة وخصائصها الرياضية، ثم نقوم بعرض بعض الأمثلة العددية. النتائج العددية التي تم الحصول عليها تثبت مدى فعالية الطريقة.

الكلمات المفتاحية: العناصر المنتهية العكسية، المجالات غير المحدودة، التقريب المعادلات الإهليلجية، فضاءات سوبوليف للأوزان.

Abstract

The aim of this work is to study the numerical resolution of elliptic problems in unbound domains using inverse finite elements. Unlike conventional approaches based on domain truncation, the suggested method retains the boundless domain and is based on a description of the asymptotic behavior of solutions in an appropriate functional framework. The method and its mathematical properties are presented first, and some computer examples are made. The numerical results obtained demonstrate the effectiveness of the method.

KEYWORDS: Inverted Finite Elements, Unbound Domains, Approximation of elliptic equations, Weighted Spaces.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier la résolution numérique des problèmes elliptiques dans des domaines non bornés en utilisant des éléments finis inversés. Contrairement aux approches conventionnelles basées sur la troncature du domaine, la méthode suggérée conserve l'infinité du domaine et elle est basée sur une description du comportement asymptotique dans un cadre fonctionnel approprié. La méthode et ses propriétés mathématiques sont présentées en premier, et quelques testes numériques sont réalisés. Les résultats numériques obtenus démontrent l'efficacité de la méthode.

MOTS CLES : Éléments finis inversés, Domaines non bornées, Approximation des équations elliptiques, Espaces de Sobolev avec poids.