Approximation d’un problème elliptique en 1D par des éléments finis inversés dans un domaine non borné

Saidou Hani(Encadreur : k.Kaliche)
Université Kasdi Merbeh Ouargla 30000,Algérie
hani_saidou@yahoo.com

Introduction

Dans ce travail, nous proposons une méthode sans troncature pour la résolution numérique des EDP elliptiques de second ordre dans des domaines non bornés. Il s’agit de la méthode des éléments finis inversés qui était développe dans [1]. La méthode repose sur l’utilisation des éléments finis inversés et des espaces de Sobolev avec poids pour décrire le comportement des fonctions à l’infini.

1. Objectif

Résoudre l’équation elliptique de second ordre définie par :

$$-\frac{d}{dx}\left(a(\cdot)\frac{du}{dx}\right)(x)+b(x)\frac{du}{dx}(x)+c(x)u(x)=f(x) \quad dans \quad \Omega \tag{1.1}$$

Ω : un ouvert non borné de $\mathbb{R}$, (domaine extérieur, demi-espace ou l’espace tout entier) ici, on prend Ω le demi-espace $\Omega=]1,+\infty[$.
a, b, c : des coefficients variables.
f : une fonction donnée.
En plus, on considère **les conditions aux limites de Dirichlet** suivantes : $u|_\omega=0$.

2. Problème variationnelle

Le cadre fonctionnelle : Soient $m\in\mathbb{N},\theta\in\mathbb{R}$ et $p\in[1,+\infty]$,On définit

$$W_\theta^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in\mathcal{D}'(\Omega),\langle x\rangle^{\theta+k-m}u^{(k)}\in L^p(\Omega),\forall k\leq m\right\}.$$

avec $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$ la fonction de base .

$$\mathring{W}_\theta^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in W_\theta^{m,p}(\Omega)|u|_\omega=0\right\}$$

Le problème variationnel :

$$\begin{cases}\text{Trouver } u\in\mathring{W}_0^1(\Omega) \text{ tel que}\\ a(u,v)=\langle f,v\rangle \quad \forall v\in\mathring{W}_0^1(\Omega)\end{cases} \tag{2.1}$$

avec,
la forme bilinéaire

$$a(u,v)=\int_\Omega a(x)\,u'(x)v'(x)dx+\int_\Omega b(x)u'(x)v(x)dx+\int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx$$

et
la forme linaire

$$\langle f,v\rangle=\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

3. Présentation de la méthode

- Cette méthode repose sur l’utilisation des espaces Sobolev avec poids et des éléments finis inversés.
- Son idée principale est de diviser le domaine Ω à deux sous-domaines :
1) Ω_0 : domaine polygonal borné,
2) Ω_∞ : domaine non borné, qui représente le domaine extérieur de Ω_0 dans $\mathbb{R}$.
-Dans Ω_0, on utilise la méthode des éléments finis usuelle et dans Ω_∞ on utilise les éléments finis inversés ou Ω_∞ est transféré à un domaine borné $\Omega_\star$ par un transformation inversé

4. Existence et unicité

Les hypothèses suivantes sont faites
(H_1) $a\in L^\infty(\Omega)$ et pour une constante $a_0>0$

$$a(x)\geq a_0 \quad dans \quad \Omega.$$

(H_2) $b\in W_2^{1,\infty}(\Omega)$ et $c\in W_2^{0,\infty}(\Omega)$ c’est-à -dire qu’il existe trois constantes b_1,b_2 et c_1

$$|b(x)|\leq\frac{b_1}{\langle x\rangle},\quad |b'(x)|\leq\frac{b_2}{\langle x\rangle^2},\quad |c(x)|\leq\frac{c_1}{\langle x\rangle^2}, dans \quad \Omega$$

(H_3) $f\in W_0^{-1}(\Omega)$ La dernière hypothèse (H_3) est notamment valable lorsque $f\in W_1^0(\Omega)$ dire

$$\int_1^{+\infty}\left(x^2+1\right)|f(x)|^2dx<+\infty$$

(H_4) Il existe une constante $\pi_0'<\pi_0$, tel que

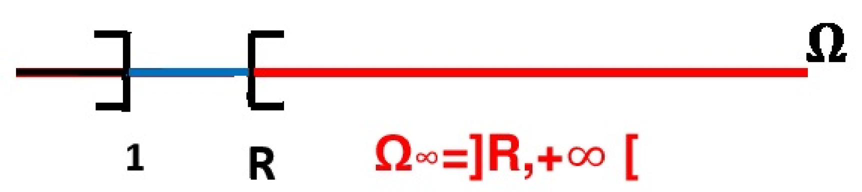
$$c(x)-\frac{b'(x)}{2}\geq-\pi_0'\frac{a_0}{\langle x\rangle^2}, \quad \text{dans} \quad \Omega$$

THÉORÈME 1 *Supposons que des hypothèses (H_1),(H_2) ,(H_3) et (H_4) sont valides.Ensuite, l’équation (2.1) avec la condition de Dirichlet admet une solution unique $u\in W_0^1(\Omega)$.*

Preuve. La démonstration de cette proposition est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram. ■

5. Discrétisation du problème

On décompose le domaine extérieur $\mathbb{R}\backslash\omega$ en deux sous-domaines
Ω_0 : domaine bornée ici on choisit $\Omega_0=]1,R[$.
Ω_∞ : domaine non bornée qui reprisent le domaine Ω_0 dans $\mathbb{R}$.



Nous considérons l’application d’inversion

$$x\mapsto t(x)=\frac{R^2}{x}$$

qui mappe le sous-domaine non bornée Ω_∞ dans le domaine bornée $\hat{\Omega}=S_1\cup S_2$ tels que : $S_1=[-1,0]$ et $S_2=[0,1]$.Étant donné une fonction w définie sur Ω_∞, Nous désignons par $\hat{w}$ la fonction définie sur $\hat{\Omega}$ Par :

$$\widehat{w}(x)=\left(\frac{R}{x}\right)^\gamma w(t(x)),\quad \forall x\in\widehat{\Omega}$$

ou γ est un paramètre réel fixe.
l’espace d’approximation :on définit l’espace de discrétisation

$$W_h(\Omega)=\Big\{v\in\mathcal{C}^0(\overline{\Omega});v_{|\Delta_i}\in\mathbb{P}_k\left(\Delta_i\right),\ \forall i\in I \\ \widehat{v}_{\big|\widehat{\Delta}_i}\in\mathbb{P}_k\left(\widehat{\Delta}_i\right),\forall i\in J,\quad \text{et}\quad \widehat{v}(0)=0\}$$

$$W_h(\Omega)=\{v_h\in W_h(\Omega)|v_h(1)=0\}$$

LEMME 1 *Supposons que $\gamma>\frac{-3}{2}$ on a*

$$\mathring{W}_h(\Omega)\subset\mathring{W}_0^1(\Omega)$$

Alors le problème approchée de problème variationnelle est

$$\begin{cases}\text{Trouver } u_h\in\mathring{W}_h(\Omega) \text{ tel que}\\ a\left(u_h,v_h\right)=\langle f,v_h\rangle,\forall v_h\in\mathring{W}_h(\Omega)\end{cases} \tag{5.1}$$

admet un solution unique.

6. Estimation d’erreur

Théorème 6.1 *Supposons que les hypothèses de la théorème(1.1)soient remplies. Supposons aussi que $u\in W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega)$ Pour certains vrais $\eta>0$ et que*

$$\eta-\frac{3}{2}<\gamma<\eta-\frac{1}{2}$$

Ensuite, l’estimation suivante est vérifie

$$\|u-u_h\|_{W_0^1(\Omega)}\lesssim h^k\|u\|_{H^{k+1}(\Omega_0)}+\hat{h}^{k\min(\mu^\star,\mu)/\mu}\|u\|_{W_{k+\eta}^{k+1}(\Omega_\infty)} \tag{6.1}$$

tel que $\mu^\star=\frac{\eta}{k}>0,0<\mu\leq1,\hat{h}=\max_{1\leq i\leq M-1}\left(\hat{x}_{i+1}-\hat{x}_i\right)$.

Conclusion

La nouvelle innovation de cet travaille prouve l’efficacité de la méthode des éléments finis inversés pour résoudre les problèmes elliptiques du second ordre. La méthode conserve tous les avantages de la méthode des éléments finis et évite l’ajout de toute frontière artificielle, tout en préservant par la même occasion la non-consolidation du domaine de calcul.

Références

[1] T. Z. Boulmezaoud. Inverted finite elements : a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39(1) :109–145, 2005.

[2] T. Z. Boulmezaoud, S. Mziou, and T. Boudjedaa. Numerical approximation of second-order elliptic problems in unbounded domains,. Journal of Scientific Computing, 60(2) :295-312, 2014.