UNIVERSITE KASDI MERBAH-OUARGLA

FACULTE DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT MATHEMATIQUES

Mémoire

MASTER

Spécialité : Mathematique

Option: Algébre et géomètrie

Présenté et soutenu publiquement par

Debba Fatma

Thème

Application moment en topologie symplectique

Date de soutnenace:02/07/2019

Dirigé par*Dr : Bahayoou Mohamed Amine*

Jury :

Dr Boussaid Mohamed	**Président**
Dr.Benmoussa Med Tayeb	**Examinateur**
Dr.Geurboussa Yassine	**Examinateur**
Dr.Bahayou Med Amine	**Rapporteur**

Année universitaire : 2018/2019

Dédicace

Je dédie ce travail à :
La lumière de ma vie, Maman et Papa
mes frères : Abdelhakim et Yazid, mes sœurs : Imane, Hania et Nouzha
A toute ma famille, à mes tantes Nourelhouda, Somai et Kamilai et mon seul oncle Haroune Rachid et oncle Noredine
A mes cousines Majda, Nassima, Fardous, Tasnim, Hiba et Ibtihal et mes cousins Nidhal, Abdelmonaim, Mohamede Chrif, Fathi et Mohameed said
À mes amies fidèles Romaissa, Amani, Amel, Rbiha, Maissa, Nadjat, Sabrina, Djihad, Saida, Fatiha, Faiza, Manel et Imane.

Remerciement

Je tiens à remercier tous d'abord mon Dieu qui m'a donné la bonne santé, la volonté et la patience tout au long de mes études .
Je tiens à remercier avec gratitude mon encadreur Mohammed El Amine Bahayou, de m'avoir guidé et suivi tout ou long de ce travail, de m'avoir conseillé, encouragé et aussi prodigué de précieux enrichissement. Son aide et sa disponibilité m'ont permit d'avancer dans le travail et de finaliser cette étude.
Je remercie les examinateurs Mohamed Tayeb Benmoussa et Mohamed Boussaid, ainsi que le président de jury Yassine Guerboussa pour son aide.
Je remercie également tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mes études et qui m'ont donnée de précieux conseils.
Je tiens à remercier les membres de ma promotion
Et tous mes professeurs
Je remercie aussi toute personne qui, de près ou loin, a contribué à la finalisation de ce travail.

Résumé

Nous présentons un résultat de Duistermaat qui affirme que le flot du champ gradient associé au carré de la norme d'une application moment définit un rétract par déformation d'une partie appropriée de la variété sur le niveau zéro de l'application moment. La preuve de Duistermaat est une adaptation de l'argument de Lojasiewicz pour les fonctions analytiques à des fonctions qui sont localement analytiques.

Mots clefs : Application moment, fonction de Morse-Bott, réduction symplectique.

Abstract

We present a proof due to Duistermaat that the gradient flow of the norm squared of the moment map defines a deformation retract of the appropriate piece of the manifold onto the zero level set of the moment map. Duistermaat's proof is an adaptation of Lojasiewicz's argument for analytic functions to functions which are locally analytic.

Keywords : moment map, Morse-Bott functions, symplectic reduction.

Table des matières

1 Généralités sur les structures symplectiques **6**
1.1 Espaces vectoriels symplectiques 6
1.2 Variétés symplectiques 7
1.3 Application moment 10
1.3.1 Existence d'application moment 10
1.3.2 Unicité d'application moment 13
1.4 Réduction symplectique 14

2 Le carré de la norme de l'application moment **18**
2.1 Théorème de Duistermaat 18

3 Annexe **23**
3.1 Ensemble ωlimite 23
3.2 Application propre 24
3.3 Fonctions de Morse-Bott 24
3.4 Fonctions analytiques 26

4 Conclusion **27**

Introduction

Nous étudions dans ce mémoire un article de E. Lerman qui traite la question de la topologie d'une variété symplectique.

Étant donnée une variété symplectique, son groupe de symétrie (groupe des difféomorphismes conservant la forme sysmplectique) n'est pas un groupe de Lie [1]. Contrairement, au groupe de symétrie d'une variété riemannienne qui lui est un groupe de Lie. Pour comprendre la structure du groupe symplectique, on ai amenés à étudier ses sous-groupes. En particulier, on s'intéresse à un type particulier d'actions de groupes sur une variété symplectique donnée.

Lorsqu'un groupe de Lie compact G d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ agit sur une variété symplectique (M, ω) en respectant sa structure, ceci donne naissance d'une application moment

$$\mu : M \to \mathscr{G}^*$$

Pour une norme donnée $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{G}^*$, on peut considérer la fonction $f = \|\mu\|^2$ et voir si on peut utiliser la théorie de Morse pour étudier la topologie de M. Néanmoins, f n'est en général pas une fonction de Morse-Bott.

Sous des hypothèses assez générales, on montre un Théorème de Duistermaat qui s'énonce comme suit :
Pour toute composante critique C de M, l'ensemble des points ω-limite

$$S_C = \{x \in M,\ \omega(x) \subset C\}$$

est une sous-variété de M qui se rétracte par déformation sur C.

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre de généralités, sur les variétés symplectiques et leurs groupes de symétrie.

2. Deuxième chapitre, consacré aux théorème de Duistermaat.

3. Un annexe qui regroupe quelques notions et résultats utilisé dans la preuve du Théorème de Duistermaat.

On termine par une petite conclusion, où on indique l'importance de ce résultat en théorie des invariants géométrique. À la fin, on donne une bibliographie de la littérature qui traite ces question plus en détail.

1. C'est un groupe de Lie de dimension infinie.

Chapitre

1 Généralités sur les structures symplectiques

1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Soit V un espace vectoriel (réel, de dimension finie). Une forme *symplectique* sur V est la donnée d'une forme bilinéaire et antisymétrique $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ qui soit non dégénérée, i.e.

$$\ker \omega = \left\{x \in V,\ \omega(x,y) = 0, \forall\, y \in V\right\}$$

est trivial. On dit alors que le couple (V,ω) est un espace vectoriel symplectique.

Exemple. *Le plan $\mathbb{R}^2$ muni du déterminant $\omega(x,y) = \det(x,y)$. Plus généralement, $\mathbb{R}^{2n}$ et*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge e_{n+i}^*$$

où $e_1^*, \ldots, e_{2n}^*$ est la base duale de la base canonique.

Symplectomorphisme

Un isomorphisme linéaire $L : (V_1,\omega_1) \to (V_2,\omega_2)$ entre deux espaces vectoriels symplectiques est un *symplectomorphisme* si $L^*\omega_2 = \omega_1$. En d'autre terme, si pour tout $x, y \in V_1$

$$\omega_2\left(L(x), L(y)\right) = \omega_1(x,y).$$

Le groupe symplectique d'un espace vectoriel symplectique (V,ω) est le groupe de Lie :

$$\mathrm{Sp}(V,\omega) = \left\{L : (V,\omega) \to (V,\omega),\ \text{isomorphisme linéaire avec } L^*\omega = \omega\right\}.$$

Exemple. *Pour le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la forme symplectique $\omega = \det$, toute isométrie vectorielle directe L (i.e. $\det L = 1$) est un symplectomorphisme. En effet, $L^*\omega = (\det L)\ \omega = \omega$, ce qui se traduit pas l'inclusion $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^2, \det)$.*

Sous espaces particuliers

Soient (V,ω) un espace vectoriel symplectique et E un sous-espace vectoriel de V. L'orthogonal symplectique de E est le sous-espace vectoriel :

$$E^\omega = \left\{x \in V,\ \omega(x,y) = 0,\ \forall\, y \in E\right\}.$$

On a les propriétés suivantes :

- $\dim V = \dim E + \dim E^\omega$.
- $(E^\omega)^\omega = E$.
- $(E+F)^\omega = E^\omega \cap F^\omega$.

On dit que E est

- *Isotrope*, si $E \subset E^\omega$.
- *Co-isotrope*, si $E^\omega \subset E$.
- *Lagrangien*, si $E = E^\omega$.
- *Symplectique*, si $E \cap E^\omega = \{0\}$.

Tout sous-espace vectoriel de dimension 1 est isotrope. En effet, Si $E =< v >$ alors pour tout $x, y \in E$ on a

$$\omega(x,y) = \omega(\alpha v, \beta v) = \alpha\beta\omega(v,v) = 0,$$

ce qui veut dire que $E \subset E^\omega$.

Proposition 1. *Tout espace vectoriel symplectique est de dimension paire.*

Pour cela, il suffit de montrer l'existence d'un sous-espace lagrangien. En effet, Soit L un sous-espace isotrope maximal (n'est pas contenu dans un sous-espace vectoriel isotrope de dimension strictement plus grande). Alors $L = L^\omega$ sinon, s'il existe $\in L^\omega \setminus L$ alors $L \oplus < x >$ est isotrope, puisque

$$L \oplus < x > \subset L^\omega \cap < x >^\omega = (L \oplus < x >)^\omega .$$

L est donc lagrangien et $\dim V = 2 \dim L$.

1.2 Variétés symplectiques

Définition 1.1. *Une variété symplectique est la donnée d'un couple (M, ω) où M est une variété différentielle et ω est une 2-forme différentielle sur M qui est*

- *fermée, i.e. $d\omega = 0$.*
- *non dégénérée, i.e. l'application*

$$\begin{array}{rccc} \sharp : & \mathscr{X}(M) & \to & \Omega^1(M) \\ & X & \mapsto & i_x\omega \end{array}$$

est un isomorphisme.

Dans ce qui suit (M, ω) désignera toujours une variété symplectique.

Remarques.

1. *Toute variété symplectique est de dimension paire, car l'espace tangent en n'importe quel point est un espace vectoriel symplectique.*
2. *Toute variété symplectique est orientable. En effet, si $\dim M = 2n$ alors $\mu = \wedge^n\omega$ (n-fois le produit extérieur de la forme symplectique) est une forme volume.*

Exemples.

1. $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$. Plus généralement, toute variété symplectique de dimension $2n$ est localement isomorphe à la variété ci-dessus (Théorème de Darboux).

2. Le fibré cotangent T^*M, d'une variété différentielle M, est munie d'une structure symplectique canonique.

3. Une surface S possède une structure symplectique si, et seulement si, elle est orientable. En effet, une 2-forme sur S est non dégénérée si, et seulement si, elle ne s'annule jamais.

4. La sphère S^2 est la seule sphère (de dimension non nulle) qui possède une structure symplectique. Plus généralement, une variété compacte M (de dimension $2n$) qui possède une structure symplectique doit avoir $H^{2k}(M) \neq 0, k = 1, ..., n$, ($\wedge^k \omega$ ne peut être exacte, grâce au Théorème de Stokes).

5. Les orbites de l'action co-Adjointe d'un groupe de Lie G sur $\mathscr{G}^*$, (le dual de son algèbre de Lie), sont des variétés "canoniquement" symplectiques. Plus généralement, toute variété de Poisson est partitionnée en sous-variétés symplectiques.

Définition 1.2. *Soit $f : (M, \omega) \to (N, \Omega)$ un difféomorphisme entre deux variétés symplectiques. On dit que f est un* symplectomorphisme *si*

$$f^*\Omega = \omega$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in M$ et pour tout $u, v \in T_xM$ on a :

$$\Omega_{f(x)}\left(D_xf(u), D_xf(v)\right) = \omega_x(u, v).$$

Champs symplectiques et champs hamiltoniens

On peut générer des symplectomorphismes, à partir d'une classe de champs de vecteurs dits *champs symplectiques*.

Un champ de vecteurs X sur M est dit symplectique si la 1-forme différentielle $i_X\omega$ est fermée.

Remarque. *Le flot d'un champ symplectique est un symplectomorphisme.*

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp tX)^*\omega &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\exp(t+s)X)^*\omega = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\exp tX)^*\left((\exp sX)^*\omega\right)\\ &= (\exp tX)^*\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\exp sX)^*\omega\right) = (\exp tX)^*\left(\mathscr{L}_X\omega\right)\end{aligned}$$

et donc

$$d(i_X\omega) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow (\exp tX)^*\omega = \omega.$$

□

Un champ de vecteurs X sur M est dit *hamiltonien* si la 1-forme différentielle $i_X\omega$ est exacte.

Comme ω est non dégénérée, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, il existe un seul champ de vecteurs X_f dit *champ hamiltonien* associé à f vérifiant :

$$i_{X_f}\omega = df.$$

Notons par $\mathscr{X}_{sym}(M)$ (respectivement, $\mathscr{X}_{ham}(M)$) l'espace vectoriel des champs de vecteurs symplectiques (respectivement, hamiltoniens).

Proposition 2. *$\mathscr{X}_{sym}(M)$ et $\mathscr{X}_{ham}(M)$ sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. Par ailleurs, le crochet de deux champs symplectiques et un champ hamiltonien.*

Démonstration. Pour tout champs de vecteurs symplectiques X et Y on a :

$$i_{[X,Y]}\omega = \mathscr{L}_X\left(i_Y\omega\right) - i_Y\left(\mathscr{L}_X\omega\right) = i_X d\left(i_Y\omega\right) + d i_X\left(i_Y\omega\right) = d\left(\omega(X,Y)\right),$$

i.e. $[X,Y]$ est le champ hamiltonien associé à la fonction $\omega(Y,X)$. □

Exemple. *Pour $\mathbb{R}^2$ et $\omega = dx\wedge dy$, les champs $X = \partial_x$ et $Y = -y\partial_x + x\partial_y$ sont hamiltoniens (associés aux fonctions y et $-\frac{x^2+y^2}{2}$ respectivement). Les flots associés sont, respectivement, la translation de vecteur $v = (1,0)$ et la rotation d'angle t centrée en $(0,0)$. Ce sont bien des symplectomorphismes.*

Action de groupes

Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ et soit (M,ω) une variété symplectique. Une action de G sur M est dite *symplectique* si pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_g : & M & \to & M \\ & x & \mapsto & g\cdot x \end{array}$$

est un symplectomorphisme.
Pour tout $\xi \in \mathscr{G}$ on associe le champ de vecteurs sur M, dit *champ fondamental* :

$$X_\xi(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp t\xi \cdot x$$

Remarque. *L'action du groupe est symplectique si, et seulement si, pour tout $\xi \in \mathscr{G}$, la 1-forme différentielle $i_{X_\xi}\omega$ est fermée. En d'autre terme, tout champ fondamental est symplectique.*

En effet,

Une action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M,ω) est dite *hamiltonienne* si les champs fondamentaux sont des champs hamiltoniens, c'est-à-dire pour tout $\xi \in \mathscr{G}$, la 1-forme $i_{X_\xi}\omega$ est exacte.

Exemples

Remarque. *Soit (M,ω) une variété symplectique. Si $H^1(M) = 0$ (en particulier, si M est simplement connexe), alors toute action symplectique sur M est hamiltonienne.*

1.3 Application moment

Définition 1.3. *L'existence d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) est équivalente à l'existence d'une application moment*

$$\mu : M \to \mathscr{G}^*$$

qui vérifie :

$$i_{X_\xi}\omega = d(\langle \mu, \xi \rangle).$$

On demande en plus à cette application d'être G-équivariante, i.e. pour tout $g \in G$

$$\mu \circ \psi_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ \mu.$$

1.3.1 Existence d'application moment

Cohomologie des algèbres de Lie Soit $(\mathscr{G}, [,])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie n, et soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une représentation de $\mathscr{G}$ est un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathscr{G} \to \mathrm{GL}(V)$$

tel que pour tout $X, Y \in \mathscr{G}$

$$\rho([X, Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X).$$

On dit aussi que V est un $\mathscr{G}$-module.
Une k-forme sur $\mathscr{G}$ à valeurs dans V est une application : $\omega : \mathscr{G} \times \ldots \times \mathscr{G} \to V$, k-linéaire alternée. On notera l'ensemble de ces k-formes par $C^k(\mathscr{G}, V)$, avec la convention $C^0(\mathscr{G}, V) = V$ et $C^1(\mathscr{G}, V) = \mathscr{L}(\mathscr{G}, V)$.
On définit l'opérateur de cobord $\delta : C^k(\mathscr{G}, V) \to C^{k+1}(\mathscr{G}, V)$ par

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\rho(X_i) \cdot \omega\left(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}\right) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}\right)\end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, $(\delta\omega)(X) = \rho(X) \cdot \omega$, pour tout $X \in \mathscr{G}$, $\omega \in V$.
- Pour $k = 1$, $(\delta\omega)(X, Y) = \rho(X) \cdot \omega(Y) - \rho(Y) \cdot \omega(X) - \omega([X, Y])$.

Proposition 3. *δ est un opérateur de cobord, c'est-à-dire $\delta \circ \delta = 0$.*

Démonstration. Ceci se démontre comme pour l'opérateur de de Rham. □

Un k-cocycle est une k-forme fermée, c'est-à-dire $\omega \in C^k(\mathscr{G}, V)$ et $\delta\omega = 0$. On note leur ensemble par $B^k(\mathscr{G}, V)$.
Un k-cobord est une k-forme exacte, c'est-à-dire $\omega \in C^k(\mathscr{G}, V)$ et il existe $\eta \in C^{k-1}(\mathscr{G}, V)$ telle que $\omega = \delta\eta$. On note leur ensemble par $Z^k(\mathscr{G}, V)$.

Lemme 1.1. *$B^k(\mathscr{G}, V)$ et $Z^k(\mathscr{G}, V)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et $Z^k(\mathscr{G}, V)$ est un sous-espace de $B^k(\mathscr{G}, V)$.*

Démonstration. C'est immédiat. Le deuxième point résulte de la Proposition ci-dessus. □

On appel $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de $\mathscr{G}$, à coefficients dans V (ou par rapport à la représentation ρ), l'espace vectoriel quotient

$$H^k(\mathscr{G}, V) = B^k(\mathscr{G}, V)/Z^k(\mathscr{G}, V).$$

Si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, alors l'espace $\Omega_L^*(G)$ des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G est un sous-complexe du complexe de de Rham de G qui est naturellement isomorphe au complexe de Chevalley-Eilenberg $C^*(\mathscr{G}, \mathbb{R})$ pour l'action triviale de $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{R}$, qui implique que leurs cohomologies sont isomorphes :

$$H_L^*(G) \cong H^*(\mathscr{G}, \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

(L'isomorphisme de $\Omega_L^*(G)$ sur $C^*(\mathscr{G}, \mathbb{R})$ associe toute 1-forme invariante à gauche à sa valeur en l'élément neutre e de G, après identification de $\mathscr{G}^*$ avec T_eG). En particulier, lorsque G est compact le processus de la moyenne

$$\alpha \mapsto \int_G L_g^* \alpha \, dg$$

(α dénote une forme différentielle sur G, et L_g dénote la translation à gauche par $g \in G$) induit un isomorphisme de $H_{dR}^* G$ dans $H_L^*(G)$, et on a

$$H_{dR}(G) \cong H^*(\mathscr{G}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1 (Whitehead1)**.** *Si $\mathscr{G}$ est semi-simple et V est un $\mathscr{G}$-module de dimension finie, alors $H^1(\mathscr{G}, V) = 0$ et $H^2(\mathscr{G}, V) = 0$.*

Théorème 2 (Whitehead2)**.** *Si $\mathscr{G}$ est semi-simple et V est un $\mathscr{G}$-module de dimension finie, et $V^{\mathscr{G}} = 0$ où $V^{\mathscr{G}} = \{v \in V,\ \rho(x) \cdot v = 0,$ pour tout $x \in \mathscr{G}\}$ est l'ensemble des éléments de V qui sont invariants par l'action de $\mathscr{G}$, alors*

$$H^k(\mathscr{G}, V) = 0, \quad \textit{pour tout } k \geq 0.$$

Lemme 1.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique.*

1. *Pour tout $X, Y \in \mathscr{X}_{sym}(M)$, on a*

$$d(\omega(Y, X)) = [X, Y].$$

   En particulier, $[X, Y] \in \mathscr{X}_{ham}(M)$.

2. *Pour tout $f, g \in C^\infty(M)$, on a*

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g],$$

   i.e. un morphisme d'algèbres de Lie.

3. *Si $\phi : G \to \mathrm{Sp}(M,\omega)$ est un homomorphisme, i.e. l'action $G \circlearrowright M$ est symplectique, alors l'application $d\phi : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{X}_{\mathrm{sym}}(M)$, $\xi \longrightarrow X_\xi$ est un anti-morphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. 1. Rappelons d'abord l'identité de Cartan $\mathscr{L}_Z = i_Z \circ d + d \circ i_Z$ pour tout champ de vecteurs Z où i_Z dénote le produit intérieur et $\mathscr{L}_Z$ la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs Z.
On a pour tout $X, Y \in \mathscr{X}_{\mathrm{sym}}(M)$,

$$i_{[X,Y]}\omega = \mathscr{L}_X(i_Y\omega) - i_Y\mathscr{L}_X\omega = (i_X \circ d + d \circ i_X)i_Y\omega = d(\omega(Y,X))$$

2. C'est une conséquence de (1) ; parce que les champs de vecteurs hamiltoniens sont symplectiques et par la définition de crochet de poisson.

3. Rappelons que si $F : M \to N$ est une application lisse, un champ de vecteurs X de M (respectivement Y de N) sont F-reliés et on écrit $X \sim_F Y$ si, pour tout $x \in M$, $Y(F(x)) = D_xF(X(x))$. On montrer que

$$\left\{\begin{matrix} X & \sim_F & Y \\ X' & \sim_F & Y' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [X,X'] \sim_F [Y,Y']$$

Si on a une action d'un groupe de Lie G sur M et sur N, on dit que F est G-équivariante si, pour tout $x \in M$, $F(g{\cdot}x) = g{\cdot}F(x)$. Dans ce cas, pour tout $\xi \in \mathscr{G}$, les champs fondamentaux X_ξ^M et X_ξ^N sont F-reliés, il suffit de dériver en 0 l'identité :

$$F(\exp t\xi \cdot x) = \exp t\xi \cdot F(x).$$

L'application $F : G \times M \to M$, définie par $F(g,x) = g \cdot x$ est équivariante[1] et surjective.
On a $X_\xi(g,x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\exp t\xi)g, x\big) = (\xi_R(g), 0)$, où ξ_R est le champ invariant à droite et égale à ξ en l'élément neutre e de G. On a, pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$

$$[X_\xi^{G\times M}, X_\eta^{G\times M}] = \big([\xi_R, \eta_R], 0\big) = \big(-[\xi,\eta]_R, 0\big) = -X_{[\xi,\eta]}^{G\times M}.$$

En effet, l'inversion $i : G \to G$ est un difféomorphisme dont la différentielle en l'élément neutre est $D_e i({}_x i) = -\xi$, transforme un champ invariant à gauche en un champ invariant à droite (et vice versa). Plus précisément, si ξ_L est le champ invariant à gauche, égale à ξ en l'élément neutre alors $\xi_R = -i_*\xi_L$. On a donc :

$$[\xi_R, \eta_R] = [-i_*\xi_L, -i_*\eta_L] = i_*[\xi_L, \eta_L] = i_*[\xi,\eta]_L = -[\xi,\eta]_R.$$

Comme F est surjective, on déduit que, pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$, $[X_\xi, X_\eta] = -X_{[\xi,\eta]}$. □

Théorème 3. *Si $H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = H^2(\mathscr{G},\mathbb{R}) = \{0\}$ alors toute action symplectique est hamiltonienne.*

1. Pour l'action de G sur $G \times M$, $g \cdot (h,x) = (gh,x)$

Démonstration. Comme $H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = \mathscr{G}/[\mathscr{G},\mathscr{G}]$, alors

$$H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{G} = [\mathscr{G},\mathscr{G}].$$

Soit $G \times M \longrightarrow M$ une action symplectique sur une variété symplectique connexe M. Comme le crochet de deux champs de vecteurs symplectiques est hamiltonien, alors l'application $d\phi : [\mathscr{G},\mathscr{G}] \longrightarrow \mathscr{X}_{sym}(M)$ est à valeur dans $\mathscr{X}_{ham}(M)$. Soit $\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ une base $\mathscr{G}$ et $J_1, \cdots, J_p \in C^\infty(M)$ tel que pour tout $i = 1, ..., p$, $X_{J_i} = X_{\xi_i}$. En d'autre terme, le champ hamiltonien de J_i est égale au champ fondamental de ξ_i, pour tout $i = 1, ..., p$. On pose $J(\xi_i) = J_i$ et on étend J en une application linéaire $J : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M)$, avec $X_{J(\xi)} = X_\xi$ pour tous $\xi \in \mathscr{G}$. L'application J n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbres de Lie. Cependant le fait que $H^2(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0$, permet une légère modification de J la rendant un morphisme d'algèbres de lie, à savoir pour tout $\xi\eta \in \mathscr{G}$, l'application $J([\xi,\eta]) - \{J(\xi), J(\eta)\}$ est a constante puisque, par

$$X_{J([\xi,\eta])} = X_{[\xi,\eta]} = -[X_\xi, X_\eta] = X_{\{J(\xi),J(\eta)\}}$$

donc, il existe une constante $c(\xi,\eta) \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$

$$J([\xi,\eta]) - \{J(\xi), J(\eta)\} = c(\xi,\eta).$$

Par conséquent, nous obtenons une application $c : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \longrightarrow \mathbb{R}$, bilinéaire et anti-symétrique. Comme les crochets $[\cdot\,,\,\cdot]$ et $\{\cdot\ \cdot\}$ satisfont l'identité de Jacobi et $c(\xi,\eta)$ est une fonction constante sur M pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$, on a $\delta c = 0$. Par $H^2(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0$, il existe $b \in \mathscr{G}^*$ tel que $\delta b = c$, c'est-à-dire $c(\xi,\eta) = -b([\xi,\eta])$ pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$.

Si $\mu^* := J + b$, on obtient une application linéaire $\mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M)$, qui vérifie encore $X_{\mu^*(\xi)} = X_\xi$ (puisque $b(\xi)$ est constante sur M) pour tout $\xi \in \mathscr{G}$, mais également

$$\begin{aligned}\mu^*([\xi,\eta]) &= J([\xi,\eta]) + b([\xi,\eta])\\ &= c(\xi,\eta) + \{J(\xi), J(\eta)\} + b([\xi,\eta])\\ &= \{\mu^*(\xi), \mu^*(\eta)\}\end{aligned}$$

pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$, donc μ^* est l'application co-moment pour l'action de G. □

1.3.2 Unicité d'application moment

Théorème 4. *Si $H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0$, alors si une application moment d'une action symplectique de G existe, elle est unique.*

Démonstration. Si $H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0$, et si μ_1 et μ_2 sont deux applications moment d'une action du groupe G, alors pour tout $\xi \in \mathscr{G}$, la fonction $< \mu_1 - \mu_2, \xi >$ est constante sur M puisque

$$X_{\mu_1(\xi)-\mu_2(\xi)} = X_\xi - X_\xi = 0.$$

Comme M est connexe, il existe $b(\xi) \in \mathbb{R}$, tel que $\mu_1(\xi) - \mu_2(\xi) = b(\xi)$.
On a $b \in \mathscr{G}^*$ et puisque $\mu_i([\xi,\eta]) = \{\mu_i(\xi), \mu_i(\eta)\} = \omega(X_\xi, X_\eta)$ pour tout $i = 1, 2$, on obtient

$$(\delta b)(\xi,\eta) = -b([\xi,\eta]) = 0, \text{ pour tout } \xi, \eta \in \mathscr{G}.$$

Finalement, par $H^1(\mathscr{G},\mathbb{R}) = 0$ on obtient $b = 0$, c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2$. □

Exemples

1. Soit $M = \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$ munie de la forme symplectique $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$. L'action du cercle

$$G = \mathrm{SO}(2) = \left\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ A.A^t = I,\ \det A = 1\right\}$$

sur M, par conjugaison, est hamiltonienne et

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & x_1x_4 - x_2x_3 - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^2\right), \end{array}$$

qui n'est pas unique, puisque G est abélien. Toute autre application moment diffère de μ d'une constante.

2. L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur le plan $\mathbb{R}^2$, par multiplication à gauche, est hamiltonienne et l'application moment est unique, donnée par :

$$\mu(x,y) = \left(xy, \frac{y^2}{2}, \frac{-x^2}{2}\right).$$

1.4 Réduction symplectique

Soit $G \circlearrowright (M,\omega)$ une action hamiltonienne et μ une application moment. Comme μ est équivariante, alors pour tout $c \in \mathscr{G}^*$ invariant par l'action co-Adjointe, le niveau $\mu^{-1}(c)$ est G-invariant. En effet, pour tout $x \in \mu^{-1}(c)$,

$$\mu(g \cdot x) = \mathrm{Ad}_g^* \mu(x) = \mathrm{Ad}_g^* c = c.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est G-invariant.

Si c est une valeur régulière de μ, alors $\mu^{-1}(c)$ est une sous-variété de M de dimension égale à $\dim M - \dim G$.

L'espace quotient $\mu^{-1}(c)/G$ n'est pas toujours une variété, puisque l'action de G sur $\mu^{-1}(c)$ peut ne pas être libre[2]. Si l'action est libre et propre alors le quotient est une variété de dimension égale à $\dim M - 2\dim G$ et possède une forme symplectique canonique. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 5. *Théorème de Marsden-Weinstein-Meyer Soit (M,ω,G,μ) un G-espace hamiltonien où G est un groupe de Lie compacte. Soit $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ l'injection canonique. On suppose que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. On a alors :*

1. *L'espace d'orbites $M_{\mathrm{red}} = \mu^{-1}(0)/G$ est une variété différentielle de dimension égale à $\dim M - 2\dim G$.*

2. *La surjection canonique $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M_{red}$ est une G-fibration.*

3. *La variété quotient M_{red} possède une forme symplectique canonique ω_{red}, caractérisée par*

$$i^*\omega = \pi^*\omega_{\mathrm{red}}.$$

2. Le quotient est un *orbifold*.

Le couple (M_{red}, ω_{red}) est appelé la réduction de (M, ω) par rapport à G, μ, ou bien le quotient symplectique, ou bien le quotient de Marsden-Weinstein-Meyer.

Les deux premiers points du théorème font partie d'un résultat classique concernant les actions de groupes sur les variétés. Voir [8].
Pour montrer le troisième point du théorème on a besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires. On montrer ensuite que si l'action $G \circlearrowright \mu^{-1}(0)$ est libre alors est une sous-variété[3] et que, pour toute $x \in \mu^{-1}(0)$, l'orbite $O(x)$ est isotrope (pour lesquels un procédé général de réduction peut s'appliquer).

Notons par $O(x)$ l'orbite du point x de M, i.e. $O(x) = \left\{g \cdot x,\ g \in G\right\}$ et par G_x le sous-groupe d'isotropie $G_x = \left\{g \in G,\ g \cdot x = x\right\}$, qui est un sous-groupe de Lie de G (car fermé dans G), d'algèbre de Lie donnée par :

$$\mathscr{G}_x = \left\{\xi \in \mathscr{G},\ X_\xi(x) = 0\right\}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 1.3. *Avec les notations ci-dessus et μ désigne l'application moment alors*

$$\begin{aligned} \ker D_x\mu &= (T_xO(x))^\omega \\ \operatorname{Im} D_x\mu &= \mathscr{G}_x^\circ = \{\alpha \in \mathscr{G}^*,\ <\alpha, \xi>= 0,\ \forall\, \xi \in \mathscr{G}_x\}. \end{aligned}$$

De sorte que si l'action est libre alors 0 est une valeur régulière de μ.

Démonstration.

- Pour tout $x \in M$, $v \in T_xM$, $\xi \in \mathscr{G}$ et γ une courbe dans M qui passe par x et dont le vecteur tangent en x est v on a :

$$\left(i_{X_\xi}\omega\right)_x(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} <\mu\left(\gamma(t)\right), \xi>=< D_x\mu\,(v), \xi> .$$

Par suite,

$$\begin{aligned} v \in \ker D_x\mu &\Longleftrightarrow \omega_x\left(X_\xi(x), v\right) = 0,\ \forall\, \xi \in \mathscr{G} \\ &\Longleftrightarrow v \in \left\{X_\xi(x),\ \xi \in \mathscr{G}\right\}^\omega = (T_xO(x))^\omega . \end{aligned}$$

- Remarquons d'abord que $\operatorname{Im} D_x\mu$ est contenu dans l'annulateur de $\mathscr{G}_x$: pour tout $\xi \in \mathscr{G}_x = \left\{\xi \in \mathscr{G},\ X_\xi(x) = 0\right\}$, on a

$$< D_x\mu(v), \xi >= \omega_x\left(X_\xi(x), v\right) = 0,\ \forall\, v \in T_xM.$$

Ceci signifie que $\operatorname{Im} D_x\mu \subset \mathscr{G}_x^\circ$. Pour l'égalité, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension. En effet,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} D_x\mu &= \dim M - \dim \ker D_x\mu = \dim M - \dim\,(T_xO(x))^\omega \\ &= \dim T_xO(x) = \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{G}_x \quad (\text{car } O(x) \cong G/G_x) \\ &= \dim \mathscr{G}_x^\circ \qquad (\text{car } \dim \mathscr{G} = \dim \mathscr{G}_x + \dim \mathscr{G}_x^\circ). \end{aligned}$$

□

3. co-isotrope

Lemme 1.4. *Si l'action $G \circlearrowright \mu^{-1}(0)$ est libre alors, pour tout $x \in \mu^{-1}(0)$, l'orbite $O(x)$ est une sous-variété isotrope de M.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mu^{-1}(0)$ et tout $\xi, \eta \in \mathscr{G}$,

$$< D_x\mu\left(X_\xi(x)\right), \eta >= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} < \mu\left(\exp t\xi \cdot x\right), \eta >= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} < \mu(x), \mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\eta >= 0,$$

ce qui signifie que $X_\xi(x) \in \ker D_x\mu = (T_xO(x))^\omega$. Comme tout vecteur tangent à l'orbite $O(x)$ est la valeur en x d'un champ fondamental, alors $T_xO(x)$ est isotrope donc aussi $\ker D_x\mu = T_x\mu^{-1}(0)$. □

Lemme 1.5. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. supposons que I est un sous-espace isotrope, i.e. $\omega_I \equiv 0$. Alors ω induit une forme symplectique canonique Ω sur le quotient I^ω/I, caractérisée par*

$$i^*\omega = \pi^*\Omega \tag{1.2}$$

où $i : I^\omega \hookrightarrow V$ est l'injection canonique et $\pi : I^\omega \twoheadrightarrow I^\omega/I$ est la surjection canonique.

Démonstration. Soient $u, v \in I^\omega$, et $[u], [v]$ leurs classes d'équivalence dans I^ω/I. On définit Ω par :

$$\Omega\left([u], [v]\right) := \omega(u, v).$$

- Ω est bien définie. En effet, pour tout $i, j \in I$

  $$\omega(u + i, v + j) = \omega(u, v) + \omega(u, j) + \omega(i, v) + \omega(i, j) = \omega(u, v).$$

  Ce qui signifie que la valeur de $\Omega\left([u], [v]\right)$ ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence.

- Ω est non dégénérée. En effet, si $u \in I^\omega$ est tel que $\omega(u, v) = 0$ pour tout $v \in I^\omega$, alors $u \in (I^\omega)^\omega = I$. Ce qui veut dire que $[u] = 0$.

On a, pour tout $u, v \in I^\omega$,

$$\left(\pi^*\Omega\right)(u, v) = \Omega\left([u], [v]\right) = \omega(u, v) = \left(i^*\omega\right)(u, v).$$

□

Preuve de theorem de Weinstien-Marsden-Meyer

Démonstration. Comme l'action $G \circlearrowright \mu^{-1}(0)$ est libre alors $\mu^{-1}(0)$ est une sous-variété isotrope de M (d'après les lemmes précédents).
L'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est propre[4] et donc le quotient $M_{\mathrm{red}} = \mu^{-1}(0)/G$ est une variété différentielle de dimension égale à $\dim M - 2\dim G$.

Le sous-espace $T_xO(x)$ est isotrope dans l'espace vectoriel symplectique (T_xM, ω_x). Il existe, d'après le lemme (1.5) une structure symplectique canonique sur le quotient $(T_xO(x))^{\omega_x}/T_xO(x) = T_x\mu^{-1}(0)/T_xO(x)$. en tout point $[x] \in M_{\mathrm{red}}$, l'espace tangent

4. car G est compact

$T_{[x]}M_{\text{red}}$ s'identifie à $T_x\mu^{-1}(0)/T_xO(x)$. Par suite, M_{red} possède une 2-forme non dégénérée ω_{red}[5].

Par construction, d'après (1.2), on a $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$ où

$$\begin{tikzcd} \mu^{-1}(0) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & M \\ M_{\text{red}} & \end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que ω_{red} est fermée. Pou cela remarquons que :

$$\pi^*\left(d\omega_{\text{red}}\right) = d\left(\pi^*\omega_{\text{red}}\right) = d\left(i^*\omega\right) = i^*\left(d\omega\right) = 0.$$

Comme π^* est injective alors $d\omega_{\text{red}} = 0$. □

5. Bien définit, car ω est G-invariante.

Chapitre

2 Le carré de la norme de l'application moment

Soit (M, σ) une variété symplectique connexe sur laquelle on a une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact G, de sorte qu'il existe une application moment G-équivariante :

$$\mu : M \to \mathscr{G}^*$$

où $\mathscr{G}^*$ est l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie de G. On suppose en plus que μ est propre (i.e. l'image réciproque par μ de tout compact est un compact).
On fixe un produit scalaire invariant sur $\mathscr{G}^*$ (invariant pour l'action co-Adjointe de G sur $\mathscr{G}^*$). Comme G est compact, on peut construire une métrique riemannienne g sur M, G-invariante et compatible avec σ, i.e. pour tout champ de vecteurs X et Y sur M

$$g(X, Y) = \omega(X, JY),$$

où J est une structure presque-complexe sur M.
Soit la fonction sur M définie par $f = \|\mu\|^2$. On dénote par ϕ_t le flot de $-\nabla_f$, i.e. pour toute fonction h,

$$\frac{d}{dt} h\left(\phi_t(x)\right) = -\nabla_f\left(\phi_t(x)\right) = -\langle \nabla_f, \nabla_h \rangle \left(\phi_t(x)\right).$$

Le flot est défini pour tout $t \geq 0$. L'ensemble des points critiques de f est une union disjointe de parties fermées connexes par arcs sur lesquelles f est constante. Pour toute composante critique C, l'ensemble stable S_C défini par

$$S_C = \{x \in M,\ \omega(x) \subset C\}$$

est une sous-variété de M (voir [3]).

2.1 Théorème de Duistermaat

Théorème 6 (Duistermaat)**.** *Soient (M, σ), f, C, t et S_C comme ci-dessus. Alors*

1. *Pour tout $x \in M$ l'ensemble limite de la trajectoire $\phi_t(x)$ est réduit à un point, noté $\phi_\infty(x)$,*

2. *pour chaque composante connexe C des points critiques de la carte moment*

$$\phi : [0, \infty] \times S_C \longrightarrow S_C,\ (t, x) \longrightarrow \phi_t(x)$$

est une rétraction de déformation.

Démonstration. Nous prouvons le théorème (6) en plusieurs étapes. Nous discutons d'abord des applications de moment pour des groupes de Lie sont localement analytiques réels. Cette analyticité locale est une conséquence du théorème de la forme normale locale de Marle [6] et de Guillemin-Sternberg [2] d'une application moment et du fait que les groupes de Lie compacts sont analytiques réels.

Nous rappelons l'inégalité de gradient de Lojasiewicz.

Lemme 2.1. *(inégalité de gradient de Lojasiewicz) Si f est une fonction analytique réelle sur un ensemble ouvert $W \subset R^n$ alors pour chaque point critique x de f il y a un voisinage U_x de x et des constantes $c_x > 0$ et $0 < \alpha_x < 1$, tel que*

$$\|\nabla f(y)\| \geq c_x |f(y) - f(x)|^{\alpha_x} \tag{2.1}$$

pour tout $y \in U_x$. Ici $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard.

On trouve cette inégalité et sa preuve on détaille dans [5].

Comme toute métrique riemannienne sur un sous-ensemble relativement compact de R^n est équivalent à la métrique euclidienne, l'inégalité (2.1) est valable pour une métrique riemannienne arbitraire sur R^n avec le même exposant α_x et éventuellement une constante différente c_x.

La composante connexe C de l'ensemble des points critiques de f étant compacte, elle peut être recouverte par un nombre fini d'ouverts U_i sur lesquels l'inégalité (**??**) est valable (avec les constantes c_i et α_i dépendantes de U_i).
Soit $\alpha = \max \alpha_i$ et $b = f(C)$. Puis pour tout $y \in U_i$ avec $|f(y) - b| < 1$ nous avons

$$|f(y) - b|^{\alpha_i} \geq |f(y) - b|^{\alpha}.$$

Soit $c = \min c$ et soit $U = \cup u_i \cap \{z \in M \, |f(z) - 1| < 1\}$, tel que pour tout $y \in U$ on a $\|\nabla f(y)\| \geq c|f(y) - b|^{\alpha}$ ou de façon équivalente,

$$\|\nabla f(y)\|.|F(y) - b)|^{-\alpha} \geq c \tag{2.2}$$

Par définition de S_C,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} f(\phi_t(y)) = b.$$

pour tout $y \in S_C$. Puisque f est propre, il existe $D > 0$ pour que

$$|f(y) - b| < D \Longrightarrow y \in U.$$

Donc pour tout $y \in S_C$ il y' a $\tau = \tau(y)$ de sorte que

$$t \geq \tau(y) \Longrightarrow \phi_t(y) \in U.$$

fixé $y \in S_C$. Pour $t > \tau(y)$

$$\begin{aligned} -d/dt(f(\phi_t(y)) - b)^{1-\alpha} &= -(1-\alpha)(f(\phi_t)(y) - b)^{\alpha}(-\nabla f(f))(\phi_t(y)) \\ &= (1-\alpha)(f(\phi_t)(y) - b)^{-\alpha} |\nabla f((\phi_t)(y)\|^2 \\ &\geq (1-\alpha)\|\nabla f(\phi_t)(y)\|\|\nabla f(\phi_t)(y)\| \end{aligned}$$

par (2.2) on pose $\|\nabla f(y)\|.|f(y) - b)|^{-\alpha} = c$ on obtient

$$-\frac{d}{dt}(f(\phi_t(y)) - b)^{1-\alpha} \geq c\|\nabla f(\phi_t)(y)\|$$

par la dernière inégalité suit de (2.2). Donc pour tout $t_1 > t_0 > \tau(y)$

$$\begin{aligned}(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1})(y) - b) &= -\int_{t_0}^{t_1} (f(\phi_t)(y) - b)^{1-\alpha} dt \\ &\geq (1-\alpha)c \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(y)\| dt\end{aligned} \tag{2.3}$$

parceque on a par la dernière inégalité on a

$$(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1})(y) - b) \geq (1-\alpha)c \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(y)\| dt \tag{2.4}$$

par l'inégalité précédente. On pose $c' = \frac{1}{1-\alpha} c$ on obtient :

Lemme 2.2. *Il y a des constantes $c' > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tel que pour tous $t_0 < t_1$ suffisamment large et pour tous $x \in S_C$*

$$c' \left((f(\phi_{t_0}(x) - b))^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1}(x) - b))^{1-\alpha} \right) \geq \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(x)\| dt \tag{2.5}$$

Il est maintenant facile de montrer que l'ensemble de ω-limite de $\phi_t(y)$ quand t tend vers $+\infty$ est réduit à un point.

Soit d la distance sur M définie par la métrique riemanienne. On a

$$\begin{aligned}d(\phi_{t_0})(y), \phi_{t_1}(y) &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|\frac{d}{dt}\phi_t(y)\| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t(y))\| dt \\ &\leq c' \left((f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1}(y)) - b)^{1-\alpha} \right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

puisque on a par le lemme(2.2)

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(x)\| dt \leq c' \left((f(\phi_{t_0}(x) - b))^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1}(x) - b))^{1-\alpha} \right)$$

et par l'inégalité (2.3)

$$\begin{aligned}(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1})(y) - b) = -\int_{t_0}^{t_1} (f(\phi_t)(y) - b)^{1-\alpha} dt \Longrightarrow \\ -(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1})(y) = \int_{t_0}^{t_1} (f(\phi_t)(y) - b)^{1-\alpha} dt\end{aligned}$$

On divise par $\frac{1}{1-\alpha}$ et on obtient

$$(1-\alpha)c \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(y)\| dt \leq -(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1})(y) - b$$

et donc

$$d(\phi_{t_0})(y), \phi_{t_1}(y) \leq c' \left((f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1}(y)) - b)^{1-\alpha} \right).$$

Pour $t_0, t_1 \longrightarrow +\infty$ la dernière expression est convergente ver 0. Donc par le critère de Cauchy, la limite $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \phi_t(y)$ existe, et donc l'application

$$\phi_\infty : S_C \longrightarrow C \;\; \phi_\infty(y) := \lim_{t \longrightarrow +\infty} \phi_t(y)$$

est bien définie.
On doit montrer que $\phi_\infty : S_C \longrightarrow C$ est continue. Soit $x \in S_C$ et $\varepsilon > 0$ nous voulons trouver δ tel que

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(\phi_\infty(x), \phi_\infty(y)) < \varepsilon.$$

Pour tout $y \in S_C$ on prend la limite dans (2.6) lorsque $t_1 \longrightarrow +\infty$. Comme la limite existe on a $\lim_{t \to +\infty} f(\phi_t(y)) - b)^{1-\alpha}) = 0$ et

$$d\left(\phi_{t_0}(y), \phi_{t_\infty}(y)\right) \leq c'(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} \tag{2.7}$$

pour tous $y \in S_C$ et tous t, on choisit $t > 0$ tel que

$$c'(f(\phi_{t_0}(y)) - b)^{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.8}$$

donc

$$d\left(\phi_t(x), \phi_\infty(x)\right) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.9}$$

On fixe t comme ci-dessus, on choisit $\delta > 0$ tel que $y \in S_C$ et $d(x, y) < \delta$. Ceci implique les deux inégalités

$$d\left(\phi_t(y), \phi_\infty(y)\right) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.10}$$

et

$$c'|(f(\phi_t(x) - b))^{1-\alpha} - (f(\phi_t(y) - b))^{1-\alpha}| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.11}$$

ceci parce que les deux applications $z \longmapsto \phi_t(z)$ et $z \longmapsto (f(\phi_t(z) - b))^{1-\alpha}$ sont continues l'équation (2.8) et par l'équation (2.11) implique que

$$c'(f(\phi_t(x) - b))^{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.12}$$

En plus par (2.7) on a

$$d\left(\phi_\infty)(y), \phi_t(y)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.13}$$

En mettant (2.10) et (2.11) ensemble, on obtient pour tout $y \in S_C$ et $d(x, y) < \delta$

$$d\left(\phi_\infty)(x), \phi_\infty(y)\right) \leq d\left(\phi_\infty)(x), \phi_t(x)\right) + d\left(\phi_t)(x), \phi_\infty(y)\right) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

puisque on a

$$|\phi_\infty(x) - \phi_\infty(y)| \leq |\phi_\infty(x) - \phi_t(x)| + |\phi_t(x) - \phi_t(y)| + |\phi_t(y) - \phi_\infty(y)|.$$

Donc l'application $\phi_\infty : S_C \longrightarrow C$ est continu.
Il découle de l'argument ci-dessus que pour tout $y_0 \in S_C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existent $\delta > 0$ et $\tau > 0$ tel que

$$t > \tau,\ d\left(y, y_0\right) < \delta \Longrightarrow d(\phi_t)(x), \phi_\infty(x) < \varepsilon, \text{ pour tout } y \in S_C.$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [0, +\infty] \times S_C & \longrightarrow & S_C \\ & (t, y) & \longmapsto & \phi_t(y) \end{array}$$

est continue. Donc S_C se rétract par déformation on C. □

Chapitre

3 Annexe

3.1 Ensemble ωlimite

Nous donnons ici la définition dans la catégorie des variétés.

On se donne un système dynamique sur une variété différentielle M, i.e. une action du groupe abélien $(\mathbb{R}, +)$ sur M. L'action définit un flot :

$$\phi_t \in \mathrm{Diff}(M),\ (t \in \mathbb{R})\ ,\ \phi_0 = \mathrm{Id}_M \text{ et } \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s,\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

Soit x un point de M et γ l'orbite de x, i.e. l'ensemble des points $\gamma = \{\phi_t(x),\ t \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble ω-limite de x noté $\omega(x)$ est défini par :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\left\{\phi_s(x), s \geq t\right\}}.$$

On pourrait aussi définir l'ensemble $\omega(x)$ de la manière suivante :

$$\omega(x) = \left\{ y \in M,\ \exists t_n \longrightarrow +\infty \ \lim_{n \to +\infty} \phi_{t_n}(x) = y \right\}$$

En d'autres termes $\omega(x)$ est l'ensemble des points adhérents à γ au voisinage des temps infinis.[1] L'exemple le plus simple d'ensemble limite est celui du point d'équilibre attractif : on dit qu'un point d'équilibre est attractive si dans un voisinage toutes les trajectoires s'en rapprochent. Si on se donne un point x dans ce voisinage, l'ensemble limite de x est alors constitué par le point attractif. On peut définir le bassin d'attraction du point d'équilibre (ensemble des points dont l'ensemble limite est constitue de point équilibre) ; c'est un ensemble invariant.

Propriétés (Relatives à l'action du flot) Soit x un point de M.

1. $\omega(x) = \omega(\phi_t(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. $\omega(x)$ est invariant sous le flot :

$$\forall\, y \in \omega(x), \forall\, t \in \mathbb{R},\ \phi_t(y) \in \omega(x).$$

En particulier, si $y \in \omega(x)$ alors $\gamma(y) \subset \omega(x)$.

1. Cet ensemble est au centre du théorème de Poincaré-Bendixson.

Propriétés topologiques Si on suppose qu'il existe un compacte K dans Ma contenant $\gamma^+(x) = \{\phi_t(),\ t \geq 0\}$, alors

1. $\omega(x)$ est fermé non vide de M.
2. $\omega(x)$ est connexe.

3.2 Application propre

La définition suivante n'est pas la plus générale, mais c'est la définition usuelle dans la catégorie des variétés.

Une application est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte.

Propriétés

1. La composée de deux applications propres est une application propre.
2. Pour toute application continue f on a l'équivalence :

   f propre $\Leftrightarrow$ f est fermée et l'image réciproque par f de tout singleton est compacte.

En pratique, on a une caractérisation des applications continues propres, en terme de suites.

Suite qui s'échappe à l'infini Soit (x_n) une suite de points d'un espace topologique X. On dit que (x_n) *s'échappe à l'infini* si tout compact K de X ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite. C'est-à-dire,

$$\exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(K),\ x_n \notin K.$$

Lemme 3.1. *Une suite (x_n) s'échappe à l'infini si, et seulement si, on ne peut extraire de (x_n) aucune sous suite convergente.*

On déduit de ce lemme la caractérisation suivante :

Proposition 4. *Une application continue f est propre si, et seulement si, pour toute suite (x_n) qui s'échappe l'infini, la suite image $\big(f(x_n)\big)$ s'échappe à l'infini.*

En particulier, toute fonction polynomiale (d'une ou plusieurs variables) est propre.

3.3 Fonctions de Morse-Bott

Soit M une variété différentielle et soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On dit que f est une fonction de *Morse-Bott* si :

1. L'ensemble de ses points critiques $\mathrm{Crit}(f)$ se décompose en réunion finie de sous-variétés de M.

2. Pour tout $x \in \mathrm{Crit}(f)$, $T_x\mathrm{Crit}(f) = \ker H_f(x)$ où $H_f(x)$ est la hessienne de f au point x, définie par
$$H_f(x)(u,v) = \mathscr{L}_X\left(\mathscr{L}_Y f\right)(x),$$

pour tout champs de vecteurs X et Y avec $X(x) = u$ et $Y(x) = v$.

Dans ce cas, pour tout point critique x de f,

$$T_xM = T_x\mathrm{Crit}(f) \oplus E_x^+ \oplus E_x^-,$$

où E_x^+ (respectivement, E_x^-) est le sous-espace propre associé aux valeurs propres strictement positives (respectivement négatives) de la hessienne $H_f(x)$.

Exemples

1. Toute fonction de Morse est de Morse-Bott (la variété critique est discrète).

2. La fonction $f(x,y,z) = z^2$ sur la sphère S^2. Son ensemble critique est

$$\mathrm{Crit}(f) = \{(0,0,-1)\} \cup \left\{(x,y,0)\right\}, x^2+y^2 = 1 \cup \{(0,0,1)\}.$$

Champ gradient Soit g une métrique riemannienne sur M. Le champ gradient X_f est défini par :
$$g(X,Y) = \mathscr{L}_Y f,$$
de sorte que les points critiques de f correspondent aux point singuliers de Xf i.e. les points fixes du flot $\exp(tX_f)$.
On considère désormais le champ gradient négatif $-X_f$ et on notera son flot (défini sur tout $\mathbb{R}$, puisque M est compacte) par ϕ_t.

Variétés stables et instables Pour toute composante critique C de $\mathrm{Crit}(f)$, on considère la variété stable (respectivement instable) :

$$W^s(C) = \left\{x \in M, \lim_{t\longrightarrow+\infty} \phi_t(x) \in C\right\}$$

$$W^u(C) = \left\{x \in M, \lim_{t\longrightarrow-\infty} \phi_t(x) \in C\right\}$$

Proposition 5. *La variété stable $W^s(C)$ d'une composante connexe de $\mathrm{Crit}(f)$ est une sous-variété et son espace tangent en tout $x \in C$ est donné par : $T_xW^s = T_xC \oplus E_x^+$. Avec un résultat similaire pour le variété instable $W^u(C)$.*

Ceci résulte d'un théorème plus général, non trivial, qui est le Théorème des variétés stables et instables (en systèmes dynamiques hyperboliques). Dans le cas des fonctions de Morse-Bott, on peut retrouver le résultat ci-dessus grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2. *(lemme de More-Bott). Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse-Bott, soit C une composante connexe de dimension m de la variété critique $\mathrm{Crit}(f)$ et soit $p \in C$. Il existe une carte centrée en p, (U,ϕ) telle que :*

1. $\phi(U \cap C) = \phi(U) \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, y = 0\right\}$
2. $f \circ \phi^{-1}(x,y) = f(C) - y_1^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_{n-m}^2$

où k est l'indice de la hessienne $H_f(p)$ et $f(C)$ est la valeur commune de f sur C.
Ceci implique que l'indice est localement constant, donc constant sur toute composante connexe C.

Proposition 6. *Pour toute fonction de Morse-Bott sur une variété compacte sans bord*

$$M = \bigcup_{C \subset Crit(f)} W^s(C) = \bigcup_{C \subset Crit(f)} W^u(C)$$

Démonstration :Montrons que tout point de M est dans une variété stable d'une composante critique. En remplaçant f par $-f$ on obtient que tout point est aussi dans une variété instable d'une composante critique de f.
Comme M est compacte, le champ gradient de f est complet, ce qui veut sire que son flot est défini sur tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in M$ un point critique non critique. Le long de $\phi_t(\alpha)$ la fonction f est strictement décroissante. En effet,

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(\alpha)) = \mathscr{L}_{X_f} f(\phi_t(\alpha)) = -\|X_f\|^2(\phi_t(\alpha)) < 0$$

On a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(\phi_t(\alpha)) > \inf f$, la borne inférieure de f qui est finie par compacité de M Il s'ensuit :

$$\int_0^{+\infty} \|X_f\|^2 \left(\phi_t(\alpha)\right) dt \leq f(\alpha) - \inf f < +\infty$$

La convergence de l'intégrale implique alors qu'il existe une suite (t_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|X_f\|(\phi_{t_n}) = 0$. Par compacité de M, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\phi_{t_n}(\alpha)$ converge vers $c \in M$. Le champ gradient s'annule donc en c et le point α appartient à la variété stable de la composante critique c.

3.4 Fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f est dite analytique (dans Ω) $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, Si pour chaque point $(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, elle est développable dans un voisinage $U = \{(|x_v - x_v| \leq r_v \subset \Omega,$ avec $r_v > 0\}$ en série entière en $(x_1, \cdots x_n)$:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum a_{v_1, v_n}(x_1 - x_1)^{v_1}, \cdots (x_n - x_n)^{v_n}$$

absolument convergente dans ce voisinage.

Chapitre

4

Conclusion

L'application moment intervient dans des problèmes variés de géométrie, notamment :

- Théorème de convexité de Atiyah et Guillemin-Sternberg, qui caractérise les variétés toriques à l'aide d'invariants combinatoires.
- Réduction symplectique : permet de simplifier l'étude des systèmes intégrables et offre un moyen simple de construire de nouvelles variétés symplectiques dont la topologie est généralement plus complexe.

Nous avons examiné ici un aspect topologique, où sous certains conditions assez générales, le niveau 0 de l'application moment est un rétracte par déformation d'une sous-variété approprié. C'est un théorème important pour étudier la topologie de la variété symplectique quotient qui est plus complexe que la variété symplectique de départ.

Il serais intéressant de commencer un travail de thèse pour explorer le lien entre l'application moment en géométrie symplectique et la théorie des invariants géométriques (travaux de Mumford et Kirwan) et ses liens aussi avec les travaux récents en géométrie tropicale.

Bibliographie

[1] M. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 523–615, 1982.

[2] V. Guillemin, S. Sternberg, *A normal form for the moment map*. Differential geometric methods in mathematical physics (Jerusalem, 1982), 161–175, Math. Phys. Stud., 6, Reidel, Dordrecht, 1984.

[3] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton U. Press, Princeton, New Jersey, 1984.

[4] E. Lerman, *Gradient flow of the norm squared of a moment map*. L'Enseignement Mathématique 51, 117 – 127, 2005.

[5] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, IHES preprint, 1965.

[6] C.-M. Marle, *Le voisinage d'une orbite d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie*. Seminaire sud-rhodanien de géometrie, II (Lyon, 1983), 19 – 35, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[7] D. McDuff & D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.

[8] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer (2013).

[9] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences ,(1996).

[10] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 1, Publish or Perish (1999).