Application moment en topologie symplectiquet

Par :DEBBA Fatma
Encadreur :Bahayou Mohamed Amine
Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie

1. Introduction

Nous présentons un résultat de Duistermaat qui affirme que le flot gradient de la norme au carré de l'application moment définit un rétract par déformation d'une partie appropriée de la variété sur le niveau zéro de l'application moment. La preuve de Duistermaat est une adaptation de l'argument de Lojasiewicz pour les fonctions analytiques á des fonctions qui sont localement analytiques.

Mots clefs : Application moment, fonction de Morse-Bott, réduction symplectique.

2. Notions préliminaires

Application moment. Une 2-forme ω sur une variété M est *symplectique* si elle est fermée et non dégénérée. Étant donnée une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M,ω), i.e. pour tout $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$ la champ fondamental

$$X_\xi(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp t\xi \cdot x$$

est hamiltonien et dans ce cas il existe une application *application moment* $\mu : M \to \mathrm{Lie}(G)^*$ définie par

$$i_{X_\xi}\omega = d(<\mu,\xi>)$$

On demande en plus á μ d'être équivariante i.e. pour tout $g \in G$ et tout $x \in M$,

$$\mu(g\cdot x) = \mathrm{Ad}_g^* \circ \mu(x).$$

Exemple L'action du cercle $G = \mathrm{SO}(2)$ sur la variété symplectique tel que : $(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), \omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4)$ (par conjugaison) est hamiltonienne (et propre, car G est compact).
Une application moment (n'est pas unique, car G est abélien) est donnée par

$$\begin{array}{rcl}\mu : \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & x_1x_4 - x_2x_3 - \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^3+x_4^2}{2}.\end{array}$$

3. Résultats

Théorème 3.1 *ThéorèmeTheorèm de Duistermaat*
Soit (M,σ), f,C, t et S_C comme ci-dessus. ensuite

1. *pour chaque $x \in M$ l'ensemble limit- de la trajectoire $\phi_t(x)$ est un point unique, noté $\phi_t^\infty(x)$;*
2. *pour chaque composante connexe C des points critiques de l'application moment*

$$\phi : [0,\infty] \times S_c \longrightarrow S_C, \quad (t,x) \longrightarrow \phi_t(x)$$

est une rétraction de déformation.

Nous prouvons le théorème de de Duistermaat en plusieurs étapes. Nous discutons d'abord des applications de moment pour des groupes de Lie sont localement analytiques réels.Donc on a besoin de inégalité de gradient de Lojasiewicz.

Lemme 3.2 *inégalité de gradient de Lojasiewicz Si f est une fonction analytique réelle sur un ensemble ouvert $W \subset R^n$ alors pour chaque point critique x de f il y a un voisinage U_x de x et des constantes $c_x > 0$ et $0 < \alpha_x < 1$, tel que*

$$\|\nabla f(y)\| \geq c_x |f(y) - f(x)|^{\alpha_x}$$

pour tout $y \in U_x$. Ici $\|\cdot\|$ dÃ©signe la norme euclidienne standard.

et pour preuvé ce theorem on a démonter que l'application

$$\phi : S_C \times [0,+\infty] \to S_C, \ (x,t) \mapsto \phi_t(x)$$

est contuni
On a d'abord démonter que l'application

$$\phi : S_C \to C$$

est contuni a l'aide de critère de Chauchy et le lemme suivant

Lemme 3.3 *Il y a des constantes $c' > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tel que pour tous $t_0 < t_1$ suffisamment large et pour tous $x \in S_C$*

$$c'\left((f(\phi_{t_0}(x) - b))^{1-\alpha} - (f(\phi_{t_1}(x) - b))^{1-\alpha}\right) \geq \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla f(\phi_t)(x)\| dt$$

et par des etape on a obtient que l'application est contuni est finallement il découle de l'argument ci-dessus que pour tout $y_0 \in S_C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existent $\delta > 0$ et $\tau > 0$ tel que

$$t > \tau, \ d(y,y_0) < \delta \Longrightarrow d(\phi_t)(x), \phi_\infty(x) < \varepsilon, \text{ pour tout } y \in S_C.$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl}\phi : [0,+\infty] \times S_C & \longrightarrow & S_C \\ (t,y) & \longmapsto & \phi_t(y)\end{array}$$

est continue. Donc S_C se rétract par déformation on C.

Références

[1] M. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 523615, 1982.

[2] E. Lerman, *Gradient flow of the norm squared of a moment map.* L'Enseignement MathÃ©matique 51, $117-127$, 2005.

[3] D. McDuff & D. Salamo, *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford University Press, 2017.