Solution explicite du système de Lozi en 3-D

KRAMA ABIR
Encadré par : M.MAAMRI
Département des Mathématiques
Spécialité : Master modélisation et analyse numérique
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
abirk30ki@gmail.com

Résumé

Dans ce travail, nous présenterons une méthode pour calculer et trouver des solutions exactes des systèmes de Lozi en trois dimensions.
Nous utilisons la forme normal de Jordan pour les matrice.
***Mots clés :** Système discret, l'application de Lozi, valeurs propres.*

1. Introduction

Un système discret en trois dimension est s'écrit tout simplement sous la forme :

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

où f est une application régulière de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Dans la pratique, les applications chaotiques discrètes jouent un rôle plus important que leurs parties continues, il y a beaucoup d'applications ; y compris : application de : Hénon (1976) et application de Lozi en 2-D (1978).
L'objectif de notre travail est de trouver la solution explicite du système de Lozi en 3-D.

2. Préliminaires

2.1 Application de Lozi en dimension deux

Definition 2.1 *L'application de Lozi en dimension 2 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans lui même par*

$$f(x, y) = (1 - a|x| - by, x),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ (donc en fait, il s'agit d'applications de Lozi !). Le système itératif associé étant

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a\,|x_n| + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Attracteur

C'est un objet qui attire toutes les trajectoires vers lui.

2.3 Attracteur de Lozi en 2-D

L'attracteur chaotique de Lozi pour les valeurs $a = 1,7$ et $b = 0,5$ (Figure 1).

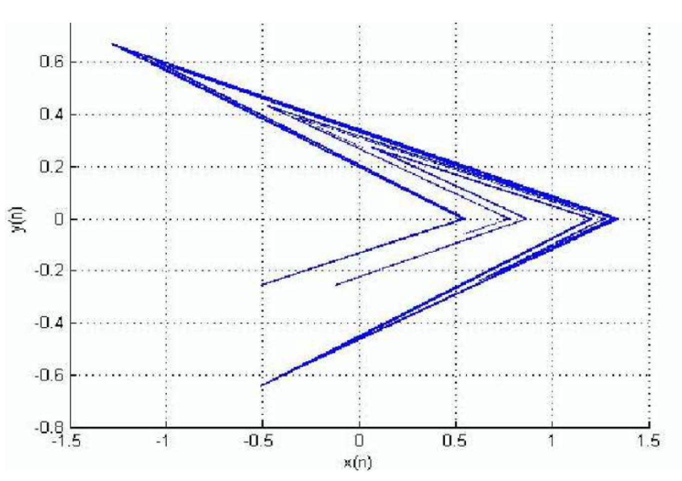

FIGURE 1: *L'attracteur chaotique de Lozi pour les valeurs $a = 1,7$ et $b = 0,5$*

2.4 Bassin d'attraction

On peut définir le bassin d'attraction comme suit.

Definition 2.2 *Le bassin d'attraction est l'ensemble des points initiaux dont les trajectoires convergent vers l'attracteur.*

2.5 Bifurcation

La bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'un application.

3. Méthodes et Résultats

Definition 3.1 *Soit le système de Lozi en trois dimension défini par :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + a\,|x_n| + bz_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases} \tag{3.1}$$

où a et b sont des paramètres réels (z représente la nouvelle dimension du système).

Pour trouver les solutions de ce système, nous utilisons la méthode de Jordan comme suit :
Le système (3.1) est équivalent a la forme matricielle suivante :

$$X_{n+1} = AX_n + C \quad \textit{pour} \quad x_n \geqslant 0$$
$$X_{n+1} = BX_n + C \quad \textit{pour} \quad x_n \leqslant 0$$

avec $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.1 Résultats

Le cas $x_n \geqslant 0$.
Nous commençons par trouver les valeurs propres λ_i de A et la matrice de passage $\mathbf{P}$ entre A et sa forme de Jordan, et nous calculons $\mathbf{P}^{-1}$, donc nous pouvons utiliser la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \iff \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

avec $\mathbf{J}$ est la matrice de Jordan.

On commence par : $X_1 = \mathbf{A}X_0 + C$, où $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ représente la condition initiale dans le bassin d'attraction.
Et d'après la simplification des formes, nous pouvons obtenir la formule finale comme suit :

$$X_{n+1} = \mathbf{P}[\mathbf{J}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}X_0 + (\mathbf{J}^n + \mathbf{J}^{n-1} + ... + I_2)\mathbf{P}^{-1}C] \quad \textit{poue} \quad x_n \geqslant 0$$

Dans la dernière étape, d'après mes calcules, on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+3}\zeta_1 + \lambda_2^{n+3}\zeta_2 + \lambda_3^{n+3}\zeta_3 + k_1 \\ \lambda_1^{n+2}\zeta_1 + \lambda_2^{n+2}\zeta_2 + \lambda_3^{n+2}\zeta_3 + k_2 \\ \lambda_1^{n+1}\zeta_1 + \lambda_2^{n+1}\zeta_2 + \lambda_3^{n+1}\zeta_3 + k_3 \end{pmatrix}$$

avec ζ_i sont des valeurs réelles associes à λ_i avec $i = 1, 2, 3$ et à la condition initial X_0, et k_i, Δ ; $i = 1, 2, 3$ sont des valeurs réelles associes à λ_i.

Le cas $x_n \leqslant 0$.
L'étude est en cours sur cette partie de l'application de Lozi en 3-D.

4. Conclusion

Les motivations de ce travail est de trouver les solutions exactes de cette application avec des conditions nécessaires ; cet exemple montre qu'il est possible de trouver des solutions explicites pour d'autres applications chaotiques analogues.

Références

[1] R, Lozi, (1978),« Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon» Journal de Physique, Vol 39.

[2] M. Mammeri, A NOVEL PIECEWISE LINEAR VERSION OF THE 3D HENON MAP, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), April 2015.

[3] E. Zeraoulia, J. C. Sprott , Robsut chaos and its applications, World Scientific Series on Nonlinear Science Series, no 79, A12 : 2011.