UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matiére

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : probabilité et statistique

Par : Achouak gouni

Théme

Étude du contrôle optimal gouverné par une équation différentielle stochastique Rétrogradé et application

Soutenu publiquement le : 30/06/2019

Devant le jury composé de :

Mazabia Mouhamed El hadi	Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Said mouhamed said	Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
BAHEDDI AISSA	Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Remerciement

Je tiens à exiprimer mes remerciement au "ALLAH" qui je aide et je donné la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à mes remerciement "Ma Mère" et "Mon père " .

Monsieur le professeur "Aissa.Bahhadi" qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses directives du début jusqu'à la fin de ce travail

preuve au cours de ces années de thèse.

Je tiens à mes remerciement au docteur "Boussade abde malke" Qui m'a aidé dans la mémoire.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury.

Maitres de conférences à l'université

pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette mémoire de master à

A Ma tendre Mère : elle représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager.

A Mon très cher Père : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Pour ceux qui sont proches du cœur, pour mon supplément spirituel à ceux qui sont moralement avec moi :"Macheri.Amen"

A mon chers frères :Issam,Rafik, Mamedouh , Razki.

A mes sœurs :Imane ,Nadjah.

Les maris de mes frères :Maryame, Halima, Nacere ,Abde almalke

Fils et filles de mes frères : Hiba,Hanin,hossam,Siraje,Anouar,Islam,Ritaje,Riham.

A mes très chère amis :Wafa.t,Amina.a,Raja.b,Abire.a,Sabrina.m,Masaouda.s,Nadjet.k ,Amani.b,Asama.b,Sara.b,Aida.s,Hinda.b,Safa.b,Choubayla.t,Rahma.g,Zinbe.a, Loubna.A,Fatima.A,Soraya.K,lamaia.L

A la famille "Gouni" et "Chougre" de près et de loin.

A tous les membres de ma promotion.

Table des matières

Notations

➤ T : Le temps terminal

➤ E.D.S.R : Équation Différentielle Stochastique Rétrograde

➤ P :La probabilité

➤ $\{B_t\}_{t\geq 0}$: un mouvement Brownien

➤ (Ω, F, P) : un espace de probabilité complet

➤ $\{F_t\}_{t\geq 0}$: La filtration

➤$\sigma(X_t)$la filtration naturelle du mouvement Brownien B .

➤ $S^2(\mathcal{R}^k)$:l'espace vectoriel formé des processus Y_t

➤ $\mathcal{M}^2(\mathcal{R}^{k*d})$: l'espace des processus Z progressivement mesurable

➤ BDG :l'inégalité de bulkhholder-Davis-Gundy

➤C^2 est l'espace des fonction à dérivée partielle d'ordre 2 sont contune

➤ $\mathbb{R}^d$ est l'espace réel euclidien de dimension d

➤$\mathbb{R}^{n\times d}$est l'ensemble des matrices réelles $n \times d$

Introduction

On présente , dans ce mémoire , l'étude du contrôle stochastique optimal gouverné par l'équation différentielle stochastique Rétrogrades de la forme

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

$\forall t \in [0, T]$

où f est une fonction donné et $Y_T = \xi$ condition terminal $B = B_t$ est un mouvement Brownien défini sur (Ω,F,F_t, P) espace de probabilité filtré

-L'état d'art

D'aprés les travaux réaliser dans ce domaine on trouve :

➤ PHilippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001

➤ Zitouni Mahieddine , Discrétisations et résolutions numériques des équation différentielles stochastique rétrogrades

➤ Nicole Ekaroui,Backword stochastique différentielle equation and application

Ces documents abordent l'équation différentielle stochastique rétrograde et étudient l'existence et l'unicité des solutions où ils ont utilisé pour montré ce résultat le théorème de pardoux-peng , le cas lipschitzien , finalement , ils ont trouvé une solution unique sous forme de couple de processus adapté et mesurable par rapport la filtration F_t

➤NACIMA Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production cerealiere ,livre de université d'Orléans ,2012, français .

➤ Emmanuel Trélat ,contrôle optimal : théorie et application ,cours de université de marie curie (paris6)

➤ Boussaha Ahlam , contrôle optimal stochastique ,mémoire de master de Université de mo-

hamed khider biskra
Ces document étudient le contrôle optimal stochastique,Où ils ont défini le contrôle optimale comme un système dynamique basé sur la minimisation ou la maximisation un certain coût,En plus d'étudier les conditions nécessaires et suffisants de l'optimalité du contrôle ,avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin.

1-La problématique

- Comment étudier le contrôle optimale par l'E.D.S.R et comment l'applique dans la finance mathématique ?

2-Le sous problème

a-Est-ce qu'il existe une solution de E.D.S.R,est-elle unique ?
b-Quelle est la stratégie défini par le contrôle stochastique optimal ?

Les hypothèse

1- Il existe une solution unique de E.D.S.R.
2-la stratégie du contrôle défini par minimisation où maximisation de la fonction de coût.

Pour les références (des équations différentielles stochastiques rétrogrades) que nous avons utilisées, on trouve que cette théorie (E.D.S.R) a connu un grand développement ces dernières années grâce notamment à ses diverses applications en mathématiques.
les E.D.S.R sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale où les choses sont fondamentalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui restent adaptées par rapport à une filtration donnée.
Et Par les références du (contrôle optimale)que nous avons utilisées,nous avons trouvé ,La théorie du contrôle l'analyse les propriétés des systèmes de commandes, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères où L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations ou de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation , et Pour modéliser le contrôle optimal, on peut avoir recours à des équations différentielles stochastique , intégrales, aux dérivées partielles, aux l'équation différentielle stochastique rétrogrades .

Donc,dans ce mémoire ,nous étudions la relation entre l'E.D.S.R et le contrôle optimal ,c'est à dire nous étudions le contrôle optimal gouverné par les équations différentielles stochastiques rétrogrades . cette étude se divise en trois chapitres,le premier chapitre est consacré au généralité de calcule stochastique dont on représente quelque définition de base (le processus ,la filtration , le mouvement brownien..etc),l'équation différentielle stochastique et l'équation différentielle stochastique rétrograde (l'existence et l'unicité de la solution)et on traite le problème du contrôle optimal on présenté la définition du contrôle et le contrôle optimal, représentation le principe de Pontryagin. Dans le deuxième chapitre on introduira l'étude du contrôle optimal gouverné par l'E.D.S.R et l'application dans le domaine de la finance mathématique et donné le condition d'optimalité du contrôle relaxé et strict et la méthode de black-scholes

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique et le contrôle optimal stochastique

1.1 Calcule stochastique

1.1.1 Définition de base

Soit (Ω, F, P) est un espace de probabilité complet

1.1.1.1 *le Processus stochastique*

Définition 1.1.1 [1] [2] *Un processus stochastique est une famille*$X = \{X_t\}_{t\in\Upsilon}$ *de variable aléatoire définit sur un espace de probabilité* (Ω,F,P), (X_t) *indexé par un ensemble* Υ.
Example :
$\Upsilon = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$ *le processus est indexé par le temps t.* $\Upsilon = \mathbb{Z}$ *le processus est dit discret .*
Un processus dépend de deux paramétrés : t et $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} X_t : [0,T] \times \omega &\mapsto \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\mapsto X_t(\omega) = X(t,\omega) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si t est fixé :$X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire .*

[1]M.Ottobre . Applied stochastique processus ,imperial college london ,2013/2014,page[14-15]
[2]jean-christophe Breton,processus stochastique , univ de rennes 1-octobre 2018,Page[3]

Si ω est fixé : $X_t(\omega)$ est une trajectoire .

1.1.1.2 *Filtration*

Définition 1.1.2 [3][4] *La filtration $(F_t)_{t\in\Upsilon}$ est une suite croissante de sous tribus F ,et on appelle (Ω , F,F_t,P) un espace de probabilité filtré .*

La filtration naturelle est la filtration engendré par le processus X_s : $F_t = (\sigma(X_s)_{s\leq t})$..

1.1.1.3 *Processus mesurable* [5] [6]

Définition 1.1.3 *X est un processus mesurable si :*

pour tout $t \in \Upsilon$ l'application $(t, w) \mapsto X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+) \oplus F$ et $B(\mathbb{R}^n)$.

1.1.1.4 *Processus adapté* [7] [8]

Définition 1.1.4 *Un processus X_t est adapté par rapport la filtration F_t si X_t est F_t-mesurable .*

1.1.1.5 *Processus progressif*

Définition 1.1.5 [9] [10] *Un processus $X = \{X_t\}_{t\in\Upsilon}$ est dit progressif si pour tout $t \in \Upsilon$ l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathbb{B}([0, t]) \otimes F_t$.*

1.1.1.6 *Martingale* [11]

Définition 1.1.6 *X_t Le processus $(X_t)_{t\in\Upsilon}$ est une martingale si :*

➤ $E(\mid X_t \mid) < \infty$ *pour tout $t \in N$.*

➤ $\{X_t\}$ *est adapté a la filtration F_t .*

➤ $E(X_{t+1}/F_t) = X_t$ *pour tous $t \in N$.*

---

[3] M.Ottobre . Applied stochastique processus ,imperial college london ,2013/2014,page[57]

[4] jean-christophe Breton,processus stochastique , univ de rennes 1-octobre 2018,Page[35]

[6] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch1 :page[1]]

[8] F.Bienvenu-Duheille ,processus stochastique , univ ,clande Bernard lyon,2006/2007,Page[14]

[9] Abi Ayad Ilham,Introduction Aux Équation différentielle stochastique , mémoire de master , univ Abboubekr belkaid Telmecen ,Page[3]

[10] Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7 , 2000,Page[3]

[11] Abi Ayad Ilham,Introduction Aux Équation différentielle stochastique , mémoire de master , univ Abboubekr belkaid Telmecen ,Page[6]

Théoréme 1.1.7 *(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)*[12] *Pour tout $p > 0$ il existe des constantes positives c_p et C_p telles que pour toute martingale locale continue $B = (B_t)_{t\in T}$ et tout temps d'arrêt τ à valeurs dans T , on a :*

$$c_p E[\langle B\rangle_\tau^{p/2}] \leq E[\sup_{0\leq t\leq\tau} |B_t|]^p \leq C_p E[\langle B\rangle_\tau^{p/2}]. \tag{1.2}$$

En combinant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy avec la condition $E[\sup_{0\leq s\leq t}|B_s|] < +\infty, \ \forall t \in T$, on voit en particulier avec p= 1 que si la martingale locale continue B vérifie $E[\sqrt{\langle B\rangle_t}] < +\infty$ pour tout $t \in T$ alors B est une martingale.
On dit qu'une martingale $B = (B_t)_{t\in T}$ est de carré intégrable si $E[|B|^2] < +\infty$ pour tout $t \in T$.

1.1.1.7 *Martingale locale* [13]

Définition 1.1.8 *Un processus $X = (X_t)_{t\in\Upsilon}$ est appelé une martingale locale ,si $(X_t)_{t\in\Upsilon}$ est un processus adapté à trajectoires continues tel qu'il existe une suite croissante $(V_n)_{n\geq 0}$de temps d'arrêt avec $\lim_{n\longrightarrow\infty} V_n = +\infty$ et pour tout n le processus arrêt X^{V_n} est une martingale uniformément intégrable.*

1.1.1.8 *Semi martingales* [14]

Définition 1.1.9 *Un processus $(X_t)_{t\in\Upsilon}$ est une semi martingale si X est adapté et admettant la décomposition de la forme : $X = X_0 + M + A$ où M est une martingale locale et nul en 0 et A un processus adapté est nul en 0 .*

1.1.1.9 *Temps d'arrêt*

Définition 1.1.10 [15] [16] *Le temps τ est dit un temps d'arrêt si τ est une variable aléatoire a valeur dans* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *et* $\{\tau \leq t\} \in F_t$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$
et

$$F_\tau = \{A \in F : \forall t \in \mathbb{N}, A \cap (\varsigma \leq t) \in F_t\}$$

[12]Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7 , 2000,Page[11]
[13]F.Bienvenu-Duheille ,processus stochastique , univ ,clande Bernard lyon,2006/2007,Page[20]
[14]Erhani.Çinlar . probability and stochastique , livre,univ Prineton ,2001,Page[190]
[15]F.Bienvenu-Duheille ,processus stochastique , univ ,clande Bernard lyon,2006/2007,Page[15]
[16]Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7 , 2000,Page[4]

1.1.1.10 *Mouvement Brownien*

Définition 1.1.11 [17]

Soit B_t un processus a valeur réelle , B_t est une mouvement brownien standard si

➤ *B_t est continue : la trajectoire de B_t est continue .*

➤ *pour $0 \leq s \leq t$ $\quad B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ et $(B_t - B_s)$de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.*

➤ *$B_0 = 0$.*

Théoréme 1.1.12 ((Représentation des martingales browniennes)) [18] *On suppose que* F *est la filtration naturelle (augmentée) d'un mouvement brownien standard d-dimensionnel $B = (B^1, ..., B^d)$ soit $B = (B_t)_{t\in T}$ une martingale locale càd-làg. Alors il existe $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^d) \in \mathrm{L}^2_{loc}(B)$ tel que*

$$B_t = B_0 + \int_0^t \alpha'_u dB_u = B_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \alpha^i_u dB^i_t, \quad t \in T \quad 0 \leq u \leq t \tag{1.3}$$

De plus si B *est bornée dans* L^2 *alors* $\alpha \in \mathrm{L}^2(B)$ *, i.e.* $E[\int_0^T |\alpha_t|^2 dt] < +\infty$

1.1.1.11 *Integrale stochastique* [19]

X_t est dit processus d'Itô si

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \tag{1.4}$$

avec :X_0 est F_0-mesurable

b_s : est le coefficient de drivé .

σ_s : est le coefficient de diffusion .

et $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ et $\int_0^t |\sigma_s|^2 dB_s < \infty$

Formule d'Itô [20]

Soit X_t le processus d'itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \tag{1.5}$$

[17] G.A.Pavliotis. Applied stochastique processus ,London,junuary 12/2019,page[26]

[18] Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7 , 2000,Page[20]

[19] BOUSSAHA AHLAM , contrôle optimal stochastique ,mémoire de master de Université de mohamed khider biskra,Page[10]

[20] A.Baheddi , cours de processus de diffusion,2 eme master , univ kasdi merbah ouargl,ch[1]

avec $dX_t = b_s dt + \sigma_t dB_s$

soit $f \in C^2$ le processus $Y = (y_t)_{t\geq 0}$ est défini par $Y_t = f(t, X_t)$.

vérifiant :

$$dY_t = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t^2}dX_t^2 + 2\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t \partial t}dX_t dt \quad (1.6)$$

nous avons dt dt=0 $\quad dtdB_t = 0$ De cela

$$dY_t = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t^2}dX_t^2 \quad (1.7)$$

avec (dX_t^2)=$dX_t dX_t$=$\sigma^2 dt \quad dB_t dB_t = dt$

et on a écrit

$$dY_t = (\frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}b_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t^2}\sigma_t^2)dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}\sigma_t dB_t \quad (1.8)$$

1.1.1.12 *Espace de Banach* [21]

Définition 1.1.13 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*
On dit que X est un espace de Banach si X est complet par rapport à la norme $\|.\|$, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy possède une limite dans cette espace .

Théoréme 1.1.14 *(Théorème du point fixe) Soit A une application de V dans V . On dit que A est une contractante s'il existe un réel $\alpha > 0$ strictement inférieur à 1 tel que*

$$\forall u, v \in V, \quad \|A(u) - A(v)\|_V \leq \alpha\|u - v\|_V$$

et

$$\forall u, v \in V, u \neq v, \quad \|A(u) - A(v)\|_V \leq \|u - v\|_V$$

1.1.2 Équation différentielle stochastique

Définition 1.1.15 [22] [23] *L'équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \quad \forall t \geq 0 \quad (1.9)$$

[21] Julia Matos,Analyse Fonctionnelle,Loboratoire mathématiques et modélisation d'evry,Année 2014/2015,Page[7-8]

[22] A.Baheddi , cours de processus de diffusion,2 eme master , univ kasdi merbah ouargl,ch[1]

[23] BOUSSAHA AHLAM , contrôle optimal stochastique ,mémoire de master de Université de mohamed khider biskra,Page[11]

avec $b, \sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \longmapsto \mathbb{R}$.

b : est le coefficient de dérive et σ *: est le coefficient de diffusion .*

et sous forme

$$\begin{cases} dX_t = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.10}$$

Pour Résoudre l'équation (1.9) on cherché l'inconnu X_t

Il y a deux type de solutions :(solution forte et solution faible)

Existence et l'unicité de la solution : [24] [25] Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions sur les coefficients b et σ.

Supposons que les fonction b et σ satisfont les deux conditions suivants :

➤ **condition de Lipschitz globale :** Il existe un constant K telle que

$$|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x - y| \tag{1.11}$$

pour tout les x,y $\in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$.

➤ **condition de croissance :** Il existe un constant L telle que

$$|b(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq L|1 + |x||$$

pour tout les $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$

1.1.3 Équation différentielles stochastique Rétrogrades

1.1.3.1 *Introduction*

Soit ξ un variable aléatoire mesurable par rapport F_T avec T le temps final et $(\Omega, F, (F_T)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré , $B = B_t$ une Mouvement Brownien

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien ,le théorème de représentation des martingale browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E[\xi/F_t] = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s$$

[24] A.Baheddi , cours de processus de diffusion,2 eme master , univ kasdi merbah ouargl,ch[1]

[25] BOUSSAHA AHLAM , contrôle optimal stochastique ,mémoire de master de Université de mohamed khider biskra,Page[12]

On peut écrire ceci autrement en effet

$$Y_t = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s \quad \forall t \in [0,T]$$

D'ou

$$\begin{aligned} Y_T &= E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s \\ \xi &= E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ \xi &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned} \tag{1.12}$$

donc alors

$$\begin{cases} Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s & avec \quad Y_T = \xi \\ -dY_t = -Z_t dB_t \end{cases}$$

c'est a dire

$$\begin{cases} -dY_t = -Z_t dB_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

Le rôle $(\mathrm{Z})_{t\geq 0}$ c'est de rendre le processus $(\mathrm{Y_t})_{t\geq 0}$ adapte , cette dernière équation possède une unique solution (Y,Z) adapté donnée par $Y_t = E[\xi/F_t]$ et on obtient Z par le théorème de représentation martingale applique à Y dans [0,T] .

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \qquad \text{avec} \quad Y_T = \xi$$

Notation 1.1.16 [26]

➤ $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *l'espace vectoriel formé des processus* Y *progressivement mesurable á valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*, tels que* $\|\mathrm{Y}\|^2_{\mathcal{S}^2} = E[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2] < \infty$
et $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ *le sous espace formé par les processus continus de* $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$.
➤ $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *l'espace des processus* Z *progressivement mesurable á valeur dans* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k*d})$ *tel que* $\|\mathrm{Z}\|^2_{M^2} = E[\int_0^T \|\mathrm{Z}_t\|^2] < \infty$
oú si $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|\mathrm{Z}\|^2 = trace(\mathrm{ZZ}^*)$ ·
$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *désigne l'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
$\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^2_c$ *et* M^2 *sont des espace de Banach pour le normes définies précédemment . nous désignerons* $\mathcal{B}^2$ *l'espace de Banach* $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k) \times M^2(R^{k\times d})$

[26] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch2 :page[2]]

nous nous donnons maintenant une application aléatoire f *définie sur* $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$ *a valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *tel que pour tout* $(\mathrm{y},\mathrm{z})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$,$\mathrm{f}(\mathrm{t},\mathrm{y},\mathrm{z})_{t\in[0,T]}$ *est un processus progressivement mesurable*

on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivant

$$\begin{cases}-dY = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t. & 0\leq t\leq T\\ Y_T=\xi\end{cases} \tag{1.13}$$

de façon équivalent sous forme intégrale
$Y_t=\xi+\int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr-\int_t^T Z_r dB_r \quad 0\leq t\leq T$
-f est le générateur de l'E.d.S.R et ξ est la condition terminale.

Définition 1.1.17 [27] *Le solution de l'équation différentielle stochastique Rétrograde est un couple de processus* (Y_t,Z_t) *adapté et mesurable par rapport a la filtration* F_t.
Ou (Y_t,Z_t) *remplit les conditions suivants*

➤ *Y,Z mesurable a valeur respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k*d}$
➤ $\int_0^T\{(f(r,Y_r,Z_r))+\|Z_r\|^2\}dr<\infty$
➤ $Y_t=\xi+\int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr-\int_t^T Z_r dB_r \quad 0\leq t\leq T$

Remarque 1.1.18 *l'intégrale de l'équation* $Y_t=\xi+\int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr-\int_t^T Z_r dB_r$ *est bien définie et* Y_t *est une semi martingale, et comme* Y *est progressivement mesurable , il est adapté et donc en particulier* Y_0 *est déterministe .*

Proposition 1 [28] *Supposons qu'il existe* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *un processus positif,*
où$\{f_t\}_{0\leq t\leq T}\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *. et* λ *constante positive tels que* $\forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathcal{R}^{k*d}$
$|f(t,y,z)|\leq f_t+\lambda(|y|+\|z\|)$
soit $Z\in\mathcal{M}_2$ *et si* $(Y_t,Z_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l' E.D.S.R alors* $\mathrm{Y}\in\mathcal{S}^2$

Lemme 1.1.19 ((Gronwall)) [29]

Soit g une fonction positive continue sur $\mathbb{R}_+$*telle que*

$$g(t)\leq h(t)+C\int_0^t g(s)ds,\quad 0\leq t\leq T \tag{1.14}$$

[27] Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[10]
[28] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde,cours,mars2001,Page[ch2 :page[3]]
[29] Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7 , 2000,Page[27]

Oú C est une constante positive et h est une fonction intégrable sur [0,T],T>0 , alors

$$g(t) \leq h(t) + C\int_0^t h(s)e^{C(t-s)}ds, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.15}$$

donc

$$g(t) \leq h(t)e^{cT} \tag{1.16}$$

Preuve 1 *(Proposition)*[30] *On déduit de résultat de la proposition du lemme de Gronwall*

En effet , on a $\forall t \in [0,T]$

Si Y_t *est le solution de E.D.S.R*

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^t Z_r dB_r$$

Nous avons :

$$|f(r, Y, Z)| \leq f_r + \lambda(|Y| + \|Z\|)$$

donc

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^t (f_r + \lambda(|Y_r| + \|Z_r\|))ds + |\int_0^t Z_r dB_s| \tag{1.17}$$

donc

$$|Y_t| \leq |Y_0| + |\int_0^T (f_r + \lambda(\|Z_r\|)|)ds + |\int_0^t Z_r dB_s| + \lambda\int_0^t |Y_r|ds \tag{1.18}$$

pour $t \in [0,T]$

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)ds + |\sup_{0\leq t\leq T}(\int_0^t Z_r dB_s)| + \lambda\int_0^t |Y_r|ds$$

Posons

$$\xi = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)ds + |\sup_{0\leq t\leq T}(\int_0^t Z_r dB_s)|$$

Par hypothèse $Z \in \mathcal{M}_2$ *, le troisième terme est carré intégrable , il en est de même pour* $(f_t)_{t\in[0,T]}$ *et* Y_0 *est déterministe donc carré intégrable,*$|\sup(\int_0^t Z_r dB_s)|$ *est carré intégrable , il s'en suit que* ξ *est une variable aléatoire carré intégrable .*

Y est un processus continu qui vérifié

$$|Y_t| \leq \xi + \lambda\int_0^t |Y_r|d_r \tag{1.19}$$

Le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$|Y_t| \leq \xi e^{ct} \tag{1.20}$$

[30]Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[11]

donc

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t| \leq \xi e^{cT}$$

donc $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *telle que* $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^{k*d})$

Lemme 1.1.20 [31] $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^{k*d})$ *donc*

$$\{\int_0^t Z_s.Y_s dB_s \quad t \in [0,T]\}$$

est une martingale uniformément intégrable

Preuve 2 [32] *Le résultat déduit principalement de l'inégalité de bulkhholder-Devis-Gundy "(BDG)"*

$$E[\sup(\int_0^t Y_r.Z_r dB_r)] \leq CE[(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}] \leq CE[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$

comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Y_r.Z_r dB_r|] \leq C^{'}(E[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2]_t + E[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr])$$

Or cette dernier quantité est fini par hypothèse d'ou le résultat

1.1.3.2 *L'existence et l'unicité de la solution*

1-Le cas Lipschitz

-1-Le résultat de pardoux-peng[33]

La résultat de pardoux-peng est un premier résultat d'existence et d'unicité .

Nous allons montrer la résultat d'existence et l'unicité pour L'E.D.S.R dans le cas oú le générateur est non-linéaire

-f est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$ a valeur dans $\mathbb{R}^k$ tell que $\forall(Y,Z) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{r*k}$ f(t,Y,Z) :est un processus progressivement mesurable ,ξ :une variable aléatoire, F_t a valeurs dans $\mathbb{R}^k$

soit l'hypothèse suivant :

(**L**) il existe une constant ψ telle que

i/ Description de la condition de Lipschitz en(y,z) pour tout t, y$^{'}$, y, z, z$^{'}$

[31] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch2 :page[3]

[32] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch2 :page[5]

[33] Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[12]

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \psi(|y-y'| + \|z-z'\|)$$

ii/ Condition d'intégrabilité

$$E[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr] \leq \infty$$

Nous commençons par un cas très simple , celui ou f ne dépond pas de Y et Z on se donne ξ carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r \quad t \in [0,T]$$

Lemme 1.1.21 [34] *$\xi \in \mathsf{L}^2(F_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$ l'E.D.S.R possédé une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Preuve 3 *Soit (Y,Z) une solution vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$*
si on prend l'espérance conditionnelle de Y

$$Y_t = E[\xi + \int_t^T F_r dr / F_t]$$

On définit Y a l'aide de la formule précédente et il reste a trouver Z . *F est progressivement mesurable .*
$\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté á la filtration $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est carré intégrable
Pour tout $t \in [0,T]$.

$$Y_t = E[\xi + \int_t^T F_r dr / F_t] - \int_t^t F_r dr = \mathrm{M}_t - \int_0^t F_r dr$$

M *est martingale brownienne,par le théorème de représentation des martingales browniennes on construite un processus* Z*de* M^2 *telle que*

$$Y_t = \mathrm{M}_t - \int_0^t F_r dr = \mathrm{M}_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr$$

On vérifie facilement que (Y,Z) ainsi construit est une solution de l'E.D.S.R qui est étudiée puisque $Y_T = \xi$ on a

$$Y_t - \xi = \mathrm{M}_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - (\mathrm{M}_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr) = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r$$

[34]Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[13]

l'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathrm{M}_2$
Unicité *Si*$(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ *est une autre solution ,*

$$\tilde{Y}_t = Y_t = E(\xi + \int_t^T F_r dr/F_t)$$

d'ou l'unicité de Y *.*

Théoréme 1.1.22 (Pardoux Peng 1990) [35] *L'hypothèse (L) l'E.D.S.R possédé une unique solution (Y,Z) tell que* $Z \in \mathrm{M}_2$

Preuve 4 *Pour montrer ce théorème on utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach* B^2*avec un application* ω *de* B^2 *dans lui-méme de sorte que* $(Y, Z) \in \mathrm{B}^2$ *est solution de E.D.S.R si et seulement si c'est une point fixé de* ω *on a* $(Y, Z) = \omega(u, v)$ *pour tous (u,v) élément de* B^2 *comme étant la solution de E.D.S.R .*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, u_r, v_r)dr - \int_t^T dB_r \qquad 0 \leq t \leq T$$

On remarque cette E.D.S.R possédé une unique solution qui est dans B^2 *, par conséquence* $F_r = f(r, u_r, v_r)$ *ce processus appartient á* M_2 *puis que , f étant Lipschitzienne .*

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda|u_r| + \lambda\|v_r\|$$

Ces trois derniers processus sont carré intégrable alors (Y,Z) est une solution unique telle que $Z \in \mathrm{M}_2$*,*$(Y, Z) \in \mathrm{B}^2$ *l'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la proposition le processus Y appartient a* $\mathcal{S}_c^2$ *,(u,v)et(u',v') sont deux élément de* B^2 *et* $(Y, Z) = \omega(u, v)$*,*$(Y', Z') = \omega(u', v')$*, notons y=Y-Y'et z=Z-Z' . il est claire que* $y_T = 0$ *et*

$$dy_t = \{f(t, u_t, v_t) - f(t, u'_t, v'_t)\}dt + z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô á $e^{\alpha t}|y_t|^2$

$$dY_t = \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial Y_t}dY_t + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f(t, Y_t)}{\partial Y_t^2}dY_t^2 + \frac{\partial^2 f(t, Y_t)}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 f(t, Y_t)}{\partial t \partial Y_t}dtdY_t)$$

pour $dtdt = 0$ *et* $dtdY_t = 0$ *et* $dY_t dY_t = dt$ *donc*

$$dY_t = \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, Y_t)}{\partial Y_t^2}dt$$

pour $Y_t = e^{\alpha t}|y_t|^2$ *On a*

$$d(e^{\alpha t}|y_t|^2) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t}y_t.\{f(t, u_t, v_t) - f(t, u'_t, v'_t)\}dt + e^{\alpha t}y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt$$

[35]Nicole Ekaroui,Backword stochastique différentielle equation and application ,Page[4]

Par conséquent , on obtient

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_t\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r.\{f(r,u_r,v_r) - f(r,u'_r,v'_r)\})dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r$$

et comme f est Lipschitzienne . il vient ,notant U et V pour u-u' et v-v' respectivement

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_t\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r||U_r| \\ &+ 2\lambda|y_r|.\|V_r\|)dr + \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r \end{aligned} \tag{1.21}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ *on a* $2ab \leq \dfrac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ *donc*

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_t\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}((-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon})|y_t|^2 - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dB_r \\ &+ \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|U_r|^2 + \|z_r\|^2)dr \end{aligned} \tag{1.22}$$

et prenant $\alpha = \dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ *on a noté* $N_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|U|^2 + \|V\|^2)dr$
$\forall t \in [0,T], \quad e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr \leq N_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dB_r$
La martingale local $\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r\}_{t\in[0,T]}$ *est en réalité une martingale nulle en 0 puisque* $Y, Y' \in \mathcal{S}^2$ *et* $Z, Z' \in \mathrm{M}_2$ *on obtient facilement t=0*

$$E[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr] \leq E[N_\varepsilon]$$

L'intégralité BDG fournit avec C universelle

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2] \leq E[N_\varepsilon] + CE[(\int_0^T e^{\alpha r}|y_r|^2\|z_r\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$

puis , comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$E[\sup e^{\alpha t}|y_t|^2] \leq E[N_\varepsilon] + \frac{1}{2}E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2] + \frac{C}{2}[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr]$$

finalement

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr] \leq (3 + C^2).E[N\varepsilon]$$

par suite

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr] \leq \varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T)E[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|V_r\|^2 dr]$$

On prend $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$ *de sorte que l'application* $\omega(t)$ *est une contraction strict de* $\mathcal{B}^2$ *dans lui méme* ε *tel que si on le munit de la norme*

$$\|(u,v)\|_\alpha = E[\sup e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|v_r\|^2 dr]^{\frac{1}{2}}$$

Cette norme est équivalente a la norme usuelle pour $\alpha = 0$

Finalement , l'application $\omega(t)$ *possédé unique point fixe , ce que assure l'existence et l'unicité d'un solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde dans* $\mathcal{B}^2$ *notons que dans le cas ou* ξ *et* f *sont déterministes alors* Z *est nul et* Y *est la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t,Y_t,0) \qquad Y_t = \xi$$

1.1.3.3 *Le rôle de Z* [36]

Le rôle de Z , plus précisément celui du terme $\int_0^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul

Proposition 2 *Soit* τ *est un temps d'arrêt majoré par* T *et (Y,Z) la solution*
On suppose l'hypothèse (L),ξ *est* F_t*-mesurable et* $f(t,y,z)=0$ $t\geq\tau$ *alors*
$Y_t = Y_{t\wedge T}$ *et* $Z_t = 0 \quad$ *si* $t\geq\tau$

Preuve 5 *Soit* $t\in[0,T]$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r \qquad 0\leq t\leq T$$

pour $t\leq\tau$ *alors* $t\wedge\tau$ *donc* $Y_{t\wedge\tau} = Y_t$

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau} &= Y_\tau \\ &= \xi + \int_\tau^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r \\ &= \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r \end{aligned} \tag{1.23}$$

On a alors

$$Y_r = E(\xi/F_\tau) = \xi$$

[36]Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[16]

et par suite

$$\int_\tau^T Z_r dB_r = 0$$

d'oú l'on tire que

$$E[(\int_\tau^T Z_r dB_r)^2] = E[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr] = 0$$

finalement que

$$Z_r 1_{r\geq\tau} = 0$$

Il s'en suit immédiatement que ,si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$ puisque par hypothèse :

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t + 0 - 0$$

1.1.3.4 *Une estimation à priori* [37]

pour étudier la dépendance de le solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde par rapport aux données qui sont ξ et le processus $\{f(t,0,0)_{t\in[0,T]}\}$ en donnant une premier estimation de E.D.S.R

Proposition 3 *On suppose (ξ, f) vérifie (**L**) soit (Y,Z)le solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde* (1.13) *telle que $Z \in \mathrm{M}_2$ alors il existe une constante C_u universelle telle que*

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t}\|Z\|^2 dt] \leq C_u E[e^{\beta t}|\xi|_2 + \int_0^T e^{\beta t}|f(t,0,0)|^2]$$

pour tout $\beta \geq (1+\lambda^2) + 2\lambda$

Preuve 6 [38] *On utilise le formule d'Itô pour $f(t,x) = e^{\beta t}|Y_t|^2$*

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(r, Y_r) dY_r + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r, Y_r) dY_r^2$$

pour t=T

$$f(t, Y_T) = f(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(r, Y_r) dY_r + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r, Y_r) dY_r^2$$

En faisant la différence de ces deux quantités, on trouve

$$f(t, Y_T) - f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial t}(r, Y_r) dr + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}(r, Y_r) dY_r + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r, Y_r) dY_r^2$$

[37] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch2 :page[7]]
[38] Philippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001,Page[ch2 :page[8]]

Ainsi

$$
\begin{aligned}
|\xi|^2 e^{\beta T} - Y_t^2 e^{\beta t} &= \int_t^T \beta e^{\beta r}|Y_r|^2 dr + \int_t^T 2e^{\beta r} Y_r.(-f(r,Y_r,Z_r))dr \\
&+ \int_t^T 2e^{\beta r} Y_r.Z_r dB_r + \int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr,
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

alors

$$
e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r}\|Z\| dr = e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2 + 2Y_r.f(r,Y_r,Z_r))dr - \int_t^T 2e^{\beta r} Y_r.Z_r dB_r
$$

pour tout (t,y,z) avec f est $\lambda -$ lipschitz on a

$$
\begin{aligned}
|(f(t,y,z))| - |(f(t,0,0))| &\leq |f(t,y,z) - f(t,0,0)| \\
&\leq \lambda(|y| + \|z\|)
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

ce qui donne

$$
2|y|.|f(t,y,z)| \leq 2|y|.|f(t,0,0)| + 2\lambda.|y|^2 + 2\lambda.|y|.\|z\|
$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$
2y.f(t,y,z) \leq 2|y|.|f(t,0,0)| + 2\lambda.|y|^2 + 2\lambda.|y|.\|z\| \tag{1.26}
$$

donc on utilisé $2ab \leq \varepsilon.a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 1$ puis

$$
\begin{aligned}
2y.f(t,y,z) &\leq 2|y||f(t,0,0)| + 2\lambda y^2 + 2\lambda|y|\|z\| \\
&\leq |y|^2|f(t,0,0)|^2 + 2\lambda y^2 + 2\lambda^2|y|^2 + \|z\|^2/2 \\
&\leq (1 + 2\lambda + 2\lambda^2).|y|^2 + |f(t,0,0)|^2 + \frac{\|z\|^2}{2}
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

on prenant $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$ on obtient pour tous $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr &= e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2 \\
&+ 2Y_r.f(r,Y_r,Z_r))dr - 2\int_t^T e^{\beta r} Y_r.Z_r dB_r \\
&\leq e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2) + \int_t^T e^{\beta r}\beta|Y|^2 \\
&+ \int_t^T |f(r,0,0)|^2 e^{\beta r} dr + \int_t^T \frac{\|Z\|^2}{2} e^{\beta r} dr - 2\int_t^T e^{\beta r} Y_r.Z_r dB_r \\
&\leq e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta|Y_r|^2) + \int_t^T |f(r,0,0)|^2 e^{\beta r} dr \\
&+ \int_t^T \frac{\|Z\|^2}{2} e^{\beta r} dr - 2\int_t^T e^{\beta r} Y_r.Z_r dB_r
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

ceci donne

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr = e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr - \int_t^T 2e^{\beta r}Y_r.Z_r dB_r \tag{1.29}$$

$\{\int_t^T 2e^{\beta r}Y_r.Z_r dW_r \quad t \in [0,T]\}$ *est martingale ,prenant l'espérance, on obtient facilement , pour t=0*

$$E[Y_0 + \frac{1}{2}\int_0^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr] \leq E[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr]$$
$$E[\int_0^T e^{\beta r}\|Z_r\|^2 dr] \leq 2E[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr]$$

Revenant á l'inégalité 1.29 ,les inégalités de BDG fournissent – avec C universelle

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2] \leq E[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr] + CE[(\int_0^T e^{2\beta r}|Y_r|^2.\|Z\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$

D'autre parte

$$CE[(\int_0^T e^{2\beta r}|Y_r|^2.\|Z\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}] \leq CE[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t/2}|Y_t|(\int_0^T e^{\beta r}\|Z\|^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\leq \tfrac{1}{2}E[\sup e^{\beta t}|Y_t|^2] + \tfrac{C^2}{2}E[\int_0^T e^{\beta r}\|Z\|^2 dr]$$

Il vient que donc

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2] \leq 2E[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr] + C^2E[\int_0^T e^{\beta r}\|Z\|^2 dr]$$

finalement

$$E[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta r}\|Z\|^2 dr] \leq 2(2+C^2).E[e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|f(r,0,0)|^2 dr]$$

donc $C_u = 2(2+C^2)$

1.2 LE CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE :

1.2.1 Le contrôle [39]

Définition 1.2.1 *Le contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique*

[39] Nacima Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français,Page[27]

1.2.2 Théorie de contrôle

[40] [41] La formulation d'un problème de contrôle optimal exige la détermination du crétére de performance .

On obtient aprés la modélisation d'un système comportant beaucoup de variable et de paramétrés . Les variable nommées variables d'état seront notées x_i i=1,......n,si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t)$,i=0,......,n oú t désigne le temps définit dans un intervalle [0,T].Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par une équation différentielle du premier ordre, elles sont sous la forme

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \tag{1.30}$$

f est un vecteur de n composants $f_i, i = 1, ..., n$, f peut être linéaire

1.2.3 Le contrôle optimal [42]

Définition 1.2.2 *Le problème de contrôle optimal consiste á minimiser une fonction de coût J sur l'ensemble du contrôle admissible.*

-Le contrôle admissible est tout processus $u_t(t \in [0, T])$mesurable et F_t-adapté á valeur dans un borélien A *de* $\mathbb{R}^d$.

1.2.4 Le problème de contrôle optimal

[43] [44] La formulation d'un problème de contrôle optimal est le système

D= {(1.31),(1.32),(1.33),(1.34)et (1.35)}

$$J(T, u) = h(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow min_u \tag{1.31}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1.32}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathrm{S}_0 \tag{1.33}$$

[40] Nacima Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français,Page[26]

[41] Nathalie Khalil,Optimality conditions for optimal control problems and applications ,Université de Bretagne occidentale - Brest, 2017,Page[10]

[42] Saliha Boughrara,PRINCIPE DU MAXIMUM POUR les problèmes de contrôle Stochastique Approche par les Probabilités Equivalentes,Thèse de Magister, Universite Mohamed Khider Biskra,17/5/2005,Page[5]

[43] Nacima Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français,Page[27]

[44] Nathalie Khalil,Optimality conditions for optimal control problems and applications ,Université de Bretagne occidentale - Brest, 2017,Page[11]

$$x(T) = x_1 \in \mathrm{S}_1 \tag{1.34}$$

$$u \in U \quad t \in I = [0, T] \tag{1.35}$$

S_0et S_1 deux variétés de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}, x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (1.32) ,x(T)est sa position terminale , la position du système en pratique peut repsésentée la vitesse, la position, la température, ...etc ,u(.) est la commande du système (D) .U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur $\omega \subset \mathbb{R}^n$

$$J(T, u) = h(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t)u(t))dt$$

J(T,u) est le critère de qualité ou le but du problème (D)

Problème de lagrange :

Le problème de lagrange dont le critère á minimises est égale á

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt$$

C'est a dire $h \equiv 0$

Problème de Mayer :

Le problème de Mayer dont le critère est

$$J(T, u) = h(T, x(T))$$

L'unicité de solution du système (1.32)-(1.33) est assurée par le théoréme d'existence et l'unicité des solution des équation différentielles.
soit x(.) la solution de l'équation (1.32) du système (D)
x(.)varie en fonction du contrôle u .

1.2.5 Le principe de maximum de Pontryagin [45]

Ce principe est un résultat fondamental de la théorie du contrôle optimale . Dans l'énoncé classique , le contrôle du système dynamique est considéré comme permanent c'est-à-dire que la valeur du contrôle est autorisée á être modifiée en tout temps réel , les premières énoncées ont été démontrés en 1957-1958.

[45]Emmanuel Trélat ,contrôle optimal : théorie et application ,cours de université de marie carie (paris6),Page[106-107]

Théoréme 1.2.3 [46] *On considéré le système de contrôle dans* $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1.36}$$

Où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^1 *et où les contrôles sont des application mesurable et bornée sur un intervalle* $[0, t_e(u)[$ *de* $\mathbb{R}^+$ *et valeurs dans* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *soint* S_0 *et* S *deux sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *on note u l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de* S_0 *á un point finale* S_1 *en temps* $t(u) < t_e(u)$*. Par ailleurs on definit le coût d'un controle u sur [0,t] .*

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s))ds + h(t, x(t)) \tag{1.37}$$

Oú $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* C^1 *,et x(.) est la trajectoire solution (1.36) associée au contrôle u . On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant* S_0 *á* S_1 *et minimisant le coût le temps final peut être fixé oú non .*
Si le contrôle $u \in U$ *associé à la trajectoire x(.) est optimal sur [0,T] , alors il existe une application* $B(.) = [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel* $B^0 \leq 0$ *tels que le couple* $(B(.), B^0)$ *est non trivial, et tels que, pour presque tout* $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial B}(t, x(t), B(t), B^0, u(t)) \\ \dot{B}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), B(t), B^0, u(t)). \end{aligned} \tag{1.38}$$

oú $H(t, x, B, B^0, u) = \langle B, f(t, x, u)\rangle + B^0 f^0(t, x, u)$ *est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur [0,T]*

$$H(t, x(t), B(t), B^0, u(t)) = \max_{v \in \omega} H(t, x(t), B(t), B^0, v) \tag{1.39}$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible S_1 *n'est pas fixé, on a la condition au temps final*

$$\max_{v \in \omega} H(T, x(T), B(T), B^0, v) = -B^0 \frac{\partial h}{\partial t}(T, x(T)) \tag{1.40}$$

si de plus S_0 *et* S_1 *sont des variétés de* $\mathcal{R}_n$ *ayant des espace tangents en* $x(0) \in \mathrm{S}_0$ *et* $x(T) \in \mathrm{S}_1$ *alors le vecteur adjoint peut être construit de manière á vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités*

$$B(0) \perp T_{x(0)} \mathrm{S}_0 \tag{1.41}$$

$$B(T) - B^0 \frac{\partial h}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} \mathrm{S}_1 \tag{1.42}$$

[46] Nacima Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français,Page[34-36]

Remarque 1.2.4 *u est contrôle un continu au temps T, la condition (1.40) peut s'écrire*

$$H(T, x(T), B(T), B^0, u(T)) = -B^0 \frac{\partial h}{\partial t}(T, x(T)) \tag{1.43}$$

-si S_1 *s'écrit sous la forme*

$$\mathrm{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \quad / F_1(x) = ... = F_B = 0\}$$

F_i le fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$,alors le conditions (1.42) se met sous la forme

$$\exists \delta_1, ...\delta_B \in \mathbb{R} | B(T) = \sum_{i=1}^{B} \delta_i \nabla F_i(x(T) + B^0 \frac{\partial h}{\partial x})(T, x(T)) \tag{1.44}$$

-Dans les conditions du théorème(1.2.3) , on a de plus pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} H(t, x(t), B(t), B^0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), B(t), B^0, u(t)) \tag{1.45}$$

En particulier si le système augmenté est autonome , si f et f^0 ne dépendent pas de t, alors H ne dépend pas de t, et on a

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{v \in \omega} H(x(t), B(t), B^0, v) = c \tag{1.46}$$

l'égalité (1.46) est alors valable partout sur [0,T]
- $B^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, la $B^0 \geq 0$ conduirait au minimum , la condition (1.38) serait la condition du minimum .

Définition 1.2.5 *Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(.), B(.), B^0, u(.))$ solution des équation (1.38)et(1.39) si $B^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale s,si $B^0 = 0$ on dit que l'extrémale est anormale.*

Remarque 1.2.6 *Lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle , lorsque $\Omega = \mathbb{R}^m$ alors la trajectoire x(.),associée au contrôle u(.) est un trajectoire singulière de système (1.36) si et seulement si elle est projection d'une extrémale anormale (x(.),B(.),0,u(.))*

Définition 1.2.7 *Le condition (1.41) et (1.42) sont appelées condition de transversalité sur le vecteur adjoint, le condition (1.40) est appelée condition de transversalité sur Hamiltonien*

1.2.5.1 *conditions de transversalité* [47]

1-conditions de transversalité sur le vecteur adjoint :

1-Problème de lagrange :

ce cas le coût s'écrit

$$C(t,u) = \int_0^t f^0(s,x(s),u(s))ds \tag{1.47}$$

h=0,conditions de transversalité (1.41),(1.42) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$B(0) \perp T_{x(0)} S_0, B(T) \perp T_{x(T)} S_1 \tag{1.48}$$

*- par example $S_0 = \{x_0\}$, le condition (1.41) devient vide

*- $S_0 = \mathbb{R}^n$ si le point initial n'est pas fixé, on obtient B(0)=0

*-$M_1 = \mathbb{R}^1$ on obtient B(T)=0, le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul .

2-Problème de Mayer :

Dans ce cas le coût est :

$$C(t,u) = h(t,x(t)) \tag{1.49}$$

$f^0 = 0$ les conditions de transversalité (1.41),et (1.42) ne se simplifiant pas a priori, le condition (1.42) devient si autrement dit le point final x(T) est libre

$$B(T) = B^0 \frac{\partial h}{\partial x}(T,x(T)) \tag{1.50}$$

Si f ne dépend pas de temps , on a contenu d'écrire $B(T) = B^0 \nabla h(x(T))$ autrement dit le vecteur adjoint au temps final est égal a la constante B^0

2-conditions de transversalité sur le hamiltonien :

La condition (1.40) n'est pas valable qui si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé,la condition de transversalité (1.40)sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \omega} H(T,x(T),B(T),B^0,v) = 0 \tag{1.51}$$

si u est continu au temps T

$$H(T,x(T),B(T),B^0,u(t)) = 0 \tag{1.52}$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final .

[47] Emmanuel Trélat ,contrôle optimal : théorie et application ,cours de université de marie carie (paris6),Page[109-110]

1.2.6 Contrôlabilité

Définition 1.2.8 [48] [49]

$(\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0)$ est système dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in \mathrm{S}_0$ et $x_1 \in \mathrm{S}_1$ telle que la trajectoire associée à u relie x_0 á x_1 en un temps fini il existe un contrôle u(.).

[48] Nacima Moussoumi Dehbi, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français,Page[28]

[49] Emmanuel Trélat ,contrôle optimal : théorie et application ,cours de université de marie carie (paris6),Page[29]

Chapitre 2

Contrôle stochastique gouverné par E.D.S.R et application

2.1 Contrôle stochastique gouverné par E.D.S.R

Après l'étude de E.D.S.R et le contrôle stochastique . On décrit comment le E.D.S.R apparaissent comme un outil puissant pour étudier des problèmes de contrôle stochastique gouverné

2.1.1 Présentation de problème

Soit (Ω, F, F_t, P) est un espace de probabilité équipé d'une filtration satisfaisant les conditions habituelles,sur lequel un mouvement brownien de d-dimension$(B = (B_t)_{t\geq 0})$. Nous supposons que (F_t) est un p-augmentation de la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$.

Définition 2.1.1 *Un contrôle admissible est un (F_t) processus adapté avec des valeurs en U tel que*

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |v_t|^2] < \infty$$

Nous notons U par l'ensemble de tous les contrôles admissibles . Pour tout $v \in U$,nous considérons L' E.D.S.R suivant

$$\begin{cases} dY_t^v = f(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)dt + Z_t^v dB_t, \\ Y_T^v = \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d} \times U \longmapsto \mathbb{R}^n$$

et ξ est un variable aléatoire (F_t) mesurable de n-dimensions telle que

$$E|\xi|^2 < \infty$$

Le coût attendu est défini de U en $\mathbb{R}$ par

$$J(v) = E[g(Y_0^v) + \int_0^T h(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)dt] \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Un contrôle $u \in U$ est appelé optimal si :

$$J(u) = \inf_{v\in U} J(v). \tag{2.4}$$

2.1.2 Principe du maximum stochastique [1]

Nous présentons dans ce paragraphe une approche alternative appelée principe du maximum de Pontryagin et basée sur des conditions d'optimalité du contrôle.

On se place dans le cadre d'un problème de contrôle stochastique à horizon fini : soit la diffusion contrôlée dans $\mathbb{R}^n$

$$dX_s = b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)dB_s \tag{2.5}$$

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des processus.

où B est un mouvement Brownien standard d-dimensionnel, $\alpha \in \mathcal{A}$ est le processus de contrôle progressif à valeurs dans$\mathcal{A}$. La fonctionnelle de coût 'a minimiser est :

$$J(\alpha) = E[\int_0^T f(t, X_t, \alpha_t)dt + g(X_T)]. \tag{2.6}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en (t,x)pour tout a dans $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe C^1 et ,f, g sont à croissance quadratique en x.

On définit l'Hamiltonien généralisé $\mathcal{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(t, x, a, y, z) = b(x, a).y + tr(\sigma'(x, a)z) + f(t, x, a), \tag{2.7}$$

[1]Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,Page[44-45]

et on suppose que $\mathcal{H}$ est dérivable en x de dérivée notée $D_x\mathcal{H}$.On considère alors pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, l'E.D.S.R est appelée aussi équation adjointe

$$-dY_t = D_x\mathcal{H}(t, X_t, \alpha_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad Y_T = D_x g(X_T). \tag{2.8}$$

Théoréme 2.1.2 [2]

soit $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ et $\hat{X}$ la diffusion contôlée associée. Supposons qu'il existe une solution $(\hat{Y}, \hat{Z})$ à l'E.D.S.R correspondante (2.8) telle que :

$$\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = \min_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, a, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.9}$$

et

$$(x, a) \longrightarrow \mathcal{H}(t, x, a, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) \;\; est\ une\ fonction\ convexe, \tag{2.10}$$

pour tout $t \in [0, T]$, $\hat{\alpha}$ est un contrôle optimal si

$$J(\hat{\alpha}) = \inf\nolimits_{\alpha \in \mathcal{A}} J(\alpha)$$

Preuve 7 *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ on a*

$$J(\hat{\alpha}) - J(\alpha) = E[\int_0^T f(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - f(t, X_t, \alpha_t)dt + g(\hat{X}_T) - g(X_T)] \tag{2.11}$$

D'après la convexité de g et le produit d'Itô , on a

$$\begin{aligned}
E[g(\hat{X}_T) - g(X_T)] &\leq E[(\hat{X}_T - X_T).D_x g(\hat{X}_T)] = E[(\hat{X}_T - X_T).\hat{Y}_T] \qquad (2.12)\\
&= E\{\int_0^T (\hat{X}_t - X_t)d\hat{Y}_t + \int_0^T \hat{Y}_t(d\hat{X}_t - dX_t)\\
&+ \int_0^T tr[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - \sigma(X_t, \alpha_t))'\hat{Z}_t]dt\}\\
&= E\{\int_0^T (\hat{X}_t - X_t).(-D_x\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t))dt\\
&+ \int_0^T \hat{Y}_t(b(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - b(X_t, \alpha_t))dt\\
&+ \int_0^T tr[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - \sigma(X_T, \alpha_t))'\hat{Z}_t]\}
\end{aligned}$$

D'autre part , d'après la définition de $\mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
E[\int_0^T f(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - f(t, X_t, \alpha_t)dt] &= E\{\int_0^T \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, \alpha_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)dt\\
&- \int_0^T (b(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - b(X_t, \alpha_t)).\hat{Y}_t - \int_0^T tr[(\sigma(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t) - \sigma(X_t, \alpha_t))'\hat{Z}_t]dt\} \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

[2] Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance , université paris 7,2000,page[105-107]

En ajoutant (2.12) et (2.13) dans (2.11)

$$\begin{aligned} J(\hat{\alpha}) - J(\alpha) &\leq E[\int_0^T \mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) - \mathcal{H}(t, X_t, \alpha_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)dt \\ &- \int_0^T (\hat{X}_t - X_t).D_x\mathcal{H}(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t)dt]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sous les conditions (2.9) et (2.10), le terme entre crochet dans la relation ci-dessus est négatif ce qui conclut la preuve. On termine ce paragraphe en donnant le lien entre le principe du maximum et la programmation dynamique. On définit la fonction valeur du problème de contrôle stochastique considéré ci-dessus :

$$v(t, x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} E[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})] \tag{2.15}$$

oú $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ *est la solution (2.5) partant de x en t. On rappelle que l'E.D.P d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit :*

$$\frac{-\partial v}{\partial t} + \sup_{a \in A}[-G(t, x, a, D_x v, D_x^2)] = 0 \tag{2.16}$$

oú pour $(t, x, a, p, M) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \times \mathbb{R} \times \mathcal{S}_n$

$$G(t, x, a, p, M) = b(x, a).p + \frac{1}{2}tr(\sigma\sigma'(x, a)M) + f(t, x, a) \tag{2.17}$$

Théoréme 2.1.3 *supposons que* $v \in C_{1,3}([0, T[\times\mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T]\times\mathbb{R}^n)$ *et qu'il existe un contrôle optimal* $\hat{\alpha} \in A$ *à (2.15)de diffusion contrôlée associée* $\hat{X}$ *.Alors*

$$G(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, D_x v(t, \hat{X}_t), D_x^2 v(t, \hat{X}_t)) = \min_{a \in \mathcal{A}} G(t, \hat{X}_t, a, D_x v(t, \hat{X}_t), D_x^2 v(t, \hat{X}_t)) \tag{2.18}$$

et le couple

$$(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = (D_x v(t, \hat{X}_t), D_x^2 v(t, \hat{X}_t)\sigma(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t)) \tag{2.19}$$

est solution de l'E.D.S.R adjointe (2.8)

Preuve 8 *puisque* $\hat{\alpha}$ *est un contrôle optimal , on a :*

$$\begin{aligned} v(t, \hat{X}_t) &= E[\int_t^T f(s, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t)ds + g(\hat{X}_T)|F_t] \\ &= -\int_0^t f(s, \hat{X}_s, \hat{\alpha}_s)ds + M_t, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{2.20}$$

oú M est la martingale $M_t = E[\int_0^T f(s, \hat{X}_s, \hat{\alpha}_s)ds + g(\hat{X}_T)|F_t]$*. En appliquant la formule d'Itô à* $v(t, \hat{X}_t)$ *et en identifiants les termes en dt dans la relation (2.20) on obtient :*

$$\frac{-\partial v}{\partial t}(t, \hat{X}_t) - G(t, \hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, D_x v(t, \hat{X}_t), D_x^2 v(t, \hat{X}_t)) = 0 \tag{2.21}$$

comme v est régulière , v satisfait l'EDP d'HJB (2.16) , ce qui implique (2.18) .

D'après (2.16) et (2.21) , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\hat{X}_t)+G(t,\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t,D_xv(t,\hat{X}_t),D_x^2v(t,\hat{X}_t)) \\ &\leq \frac{-\partial v}{\partial t}(t,x)+G(t,x,\hat{\alpha}_t,D_xv(t,x),D_x^2v(t,x)) \end{aligned} \tag{2.22}$$

ce qui implique puisque v est $C^{1,3}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-\partial v}{\partial t}(t,x)+G(t,x,\hat{\alpha}_t,D_xv(t,x),D_x^2v(t,x))|_{x=\hat{X}_t}=0$$

En se rappelant l'expression (2.17) de G et celle (2.7) de $\mathcal{H}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}(t,\hat{X}_t) &+ D_x^2v(t,\hat{X}_t)b(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t)+\frac{1}{2}tr(\sigma\sigma'(\hat{X}_t\hat{\alpha}_t)D_x^3v(t,\hat{X}_t)) \\ &+ D_x\mathcal{H}(t,\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t,D_xv(t,\hat{X}_t),D_x^2v(t,\hat{X}_t)\sigma(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t))=0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

En appliquant alors la formule d'Itô à $D_xv(t,\hat{X}_t)$et en utilisant (2.23) , on a

$$\begin{aligned} -dD_xv(t,\hat{X}_t) &= -[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}(t,\hat{X}_t)+D_x^2v(t,\hat{X}_t)b(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t) \qquad (2.24)\\ &+ \frac{1}{2}tr(\sigma\sigma'(\hat{X}_t\hat{\alpha}_t)D_x^3v(t,\hat{X}_t))]dt \\ &- D_x^2v(t,\hat{X}_t)\sigma(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t)dB_t \\ &= D_x\mathcal{H}(t,\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t,D_xv(t,\hat{X}_t),D_x^2v(t,\hat{X}_t)\sigma(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t)dt \\ &- D_x^2v(t,\hat{X}_t)\sigma(\hat{X}_t,\hat{\alpha}_t)dB_t \qquad (2.25) \end{aligned}$$

comme de plus $v(T,.)=g(.)$, on a

$$D_xv(T,\hat{X}_T)=D_xg(\hat{X}_T).$$

ceci prouve le résultat (2.19)

2.1.3 Le problème du contrôle strict[3]

Pour tout $n\in N$ soit $\mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble de processus aléatoire n-dimensionnel mesurable conjointement $\{\varphi_t,t\in[0,T]\}$qui satisfont :

(i) :$E[\int_0^T|\varphi_t|^2dt]<\infty$

[3]Adel.Chala,On Optimal control problem for Backward stochastique Doubly systeme , univ mouhamed khider Biskra ,vol2014,Page[3]

(ii) : φ_t est $(F_t^{B,W})$ mesurable pour $t \in [0,T]$

Nous notons de même par $\mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus aléatoires continus à n-dimensions qui satisfont

(i) : $E[\sup_{0\leq t\leq T}|\varphi_t|^2] < \infty$

(ii) : φ_t est $(F_t^{B,W})$ mesurable pour tout $t \in [0,T]$

soit T est un nombre strictement positif et U est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$

Définition 2.1.4 *(Y_t, Z_t) est un solution de (2.1) si et seulement si $(Y_t, Z_t) \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{n\times d}) \times \mathcal{S}^{n\times m}$ et ça satisfait (2.1)*

Définition 2.1.5 *Un contrôle stricts admissible est un processus F_t-adapté avec des valeurs en U telles que $E[\sup_{t\in[0,T]}|v_t|^2] < \infty$*
Nous notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles admissibles
pour tout $v \in \mathcal{U}$ nous considérons le E.D.S.D.R suivant

$$\begin{cases} dY_t^v = f(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)dt + g(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)dW_t + Z_t^v dB_t \\ Y_T^v = \xi \end{cases} \tag{2.26}$$

où$f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m, g : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times k}$ et ξ est un variable aléatoire F_0-mesurable à n-dimension telle que $E|\xi|^2 < \infty$ .Le coût attendu est défini de $\mathcal{U}$en $\mathbb{R}$ par

$$J(v) = E[\Psi(Y_0^v) + \int_0^T l(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)dt] \tag{2.27}$$

où $\Psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, l : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

2.1.3.1 *Conditions nécessaires d'optimalité du contrôle strict*[4]

Théorème 2.1.6 *Soit (u, Y^u, Z^u) est une solution optimale du problème de contrôle initial {(2.1),(2.2),(2.4)} . Ensuite, il existe un processus unique adapté*

$$P^u \in \mathfrak{L}([0,T];\mathbb{R}^n),$$

qui sont la solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} -dP_t^u = H_y(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)dt + H_z(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)dB_t, \\ P_0^u = g_y(y_0^u) \end{cases} \tag{2.28}$$

[4]Seid Bahlali , The strict and relaxed stochastique maximum principle for optimal control probleme of Backword systeme,vol 20 dec 2008,Page[15]

tel que

$$H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t) = \max_{v \in U} H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, v); \tag{2.29}$$

où Hamiltonien H est défini à partir de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times U$ dans $\mathbb{R}$ par

$$H(t, Y, Z, P, v) = pf(t, Y, Z, v) - h(t, Y, Z, v). \tag{2.30}$$

Preuve 9 *on pose*

$$\tilde{P_t} = \begin{pmatrix} P_t^u \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

et $\tilde{Z}$ est une matrice de dimension $(n+1)\times$ donnée par

$$\tilde{Z_t} = \begin{pmatrix} Z_t^v \\ K_t^v \end{pmatrix}$$

et la fonction $\tilde{f}$ est définit de $[0,T] \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{M}_{(m+1)\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ par

$$\tilde{f}(t, \tilde{Y_t}, \tilde{Z_t}, v_t) = \begin{pmatrix} b(t, Y_t, Z_t, v_t) \\ h(t, Y_t, Z_t, v_t) \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

et la Hamiltonien $\tilde{H}$ est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times U$ par

$$\tilde{H}(t, \tilde{Y_t}, \tilde{Z_t}, \tilde{P_t}, u_t) = \tilde{f}(t, \tilde{Y_t}, \tilde{Z_t}, u_t)\tilde{P_t} \tag{2.33}$$

De la définition de $\tilde{H}, \tilde{P}, \tilde{f}$ et $\tilde{Z}$,on obtient

$$\tilde{H}(t, \tilde{Y_t}, \tilde{Z_t}, \tilde{P_t}, u_t) = H(t, \tilde{Y_t}, \tilde{Z_t}, \tilde{P_t}, u_t), \tag{2.34}$$

et de l'équation adjointe $\begin{cases} -d\tilde{P_t^u} = \tilde{H}_y(t, \tilde{Y_t^u}, \tilde{Z_t^u}, \tilde{P_t^u}, u_t)dt + H_z(t, Y_t^u, \tilde{Z_t^u}, \tilde{P_t^u}, u_t)dB_t, \\ \tilde{P_0^u} = \tilde{g}_y(\tilde{y_0^u}) \end{cases}$ *on peut facilement en déduire (2.28) . finalement (2.29) est dérivé immédiatement de (2.34)*

2.1.3.2 *Conditions Suffisants d'optimalité du contrôle strict* [5]

Théoréme 2.1.7 *Si nous supposons que, U est convexe et pour chaque $v \in \mathcal{U}$ et pour tout $t \in [0,T]$ la fonction g est convexe et $(Y_t, Z_t, v_t) \longrightarrow H(t, Y_t, Z_t, P_t, v_t)$ est concave. Alors u est un contrôle optimal du problème {(2.1),(2.4),(2.2)} s'il satisfait(2.29)*

Preuve 10 *Soit u un contrôle admissible arbitraire et (Y_t^u, Z_t^u) le solution de (2.1) associé à u. Pour tout contrôle admissible v, avec trajectoire associée(Y_t^u, Z_t^u) on obtient*

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= E[g(Y_t^v) - g(Y_t^u)] \\ &+ E\int_0^T [h(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t) - h(t, Y_t^u, Z_t^u, u_t)]dt \end{aligned} \tag{2.35}$$

[5] Seid Bahlali , The strict and relaxed stochastique maximum principle for optimal control probleme of Backword systeme,vol 20 dec 2008,Page[16]

Puisque g est convexe, alors

$$g(Y_0^v) - g(Y_0^u) \geq g_Y(Y_0^u)(Y_0^v - Y_0^u). \tag{2.36}$$

alors

$$J(v) - J(u) = E[g_Y(Y_0^v)(Y_0^v - Y_0^u)] + E\int_0^T [h(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t) - h(t, Y_t^u, Z_t^u, u_t)]dt \tag{2.37}$$

Nous remarquons de (2.28) que

$$P_0^u = g_Y(Y_0^u) \tag{2.38}$$

alors , on obtient

$$J(v) - J(u) = E[P_0^u(Y_0^v - Y_0^u)] + E\int_0^T [h(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t) - h(t, Y_t^u, Z_t^u, u_t)]dt \tag{2.39}$$

En appliquant la formule de Itô à $P_t^u(Y_t^v - Y_t^u)$ on obtient

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq E\int_0^T [H_Y(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Y_t^v - Y_t^u) + H_Z(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Z_t^v - Z_t^u)]dt \\ &+ E\int_0^T [H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t) - H(t, Y_t^v, Z_t^v, P_t^u, v_t)]dt \end{aligned} \tag{2.40}$$

Puisque H est concave dans (Y, Z, u), alors

$$\begin{aligned} H &(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, v_t) - H(t, Y_t^v, Z_t^v, P_t^u, u_t) \\ &\leq H_Y(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Y_t^v - Y_t^u) \\ &+ H_Z(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Z_t^v - Z_t^u) \\ &+ H_v(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Z_t^v - Z_t^u)(v_t - u_t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ou équivalent

$$\begin{aligned} H_v &(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(u_t - v_t) \\ &\leq H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t) - H(t, Y_t^v, Z_t^v, P_t^u, v_t) \\ &+ H_Y(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Y_t^v - Y_t^u) + H_Z(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Z_t^v - Z_t^u) \end{aligned} \tag{2.42}$$

alors , on a

$$J(v) - J(u) \geq H_v(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(Z_t^v - Z_t^u)(u_t - v_t) \tag{2.43}$$

Nous savons que$H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, .)$ est concave, alors $-H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, .)$ est convexe de U en $\mathbb{R}$. De plus, U est convexe et $-H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, .)$ est continu, puis à partir du principe *d'optimisation convexe*

On obtient

$$-H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t) = \inf_{v_t \in U} -H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, v_t) \Longleftrightarrow -H_v(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(v_t - u_t) \geq 0 \tag{2.44}$$

ou

$$H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t) = \max_{v_t \in U} H(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, v_t) \Longleftrightarrow H_v(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(u_t - v_t) \geq 0 \tag{2.45}$$

Ensuite, de la condition d'optimalité nécessaire(2.29), on en déduit que

$$H_v(t, Y_t^u, Z_t^u, P_t^u, u_t)(u_t - v_t) \geq 0 \tag{2.46}$$

Et à partir de (2.43), nous avons

$$J(v) - J(u) \geq 0 \tag{2.47}$$

2.1.4 Le problème du contrôle relaxé [6]

L'idée du problème de contrôle strict relaxé définie ci-dessus est d'intégrer l'ensemble U des contrôles stricts dans une classe plus large qui donne une structure topologique plus appropriée. Dans le modèle relaxé ,

Définition 2.1.8 *un contrôle relaxé $(q_t)_t$ est un processus évalué par P(U) progressivement mesurable par rapport à (F_t) , et tel que pour chaque t, $1_{]0,t[}q_t$ est $F_t$mesurable*
Nous notons $\mathbb{R}$ l'ensemble de toutes les contrôle relaxé admissibles.

Tout contrôle relaxé q peut être désintégré comme $q(dt, da) = q(t, da)dt = q_t(da)dt$, où $q_t(da)$ est processus progressivement mesurable avec une valeur dans l'ensemble des mesures de probabilité P(U)

Pour tout $q \in \mathbb{R}$ nous considérons le E.D.S.R relaxé suivant

$$dY_t^q = -\int_U f(t, Y_t^q, Z_t^q, a)q_t(da)dt + \int_U g(t, Y_t^q, Z_t^q, a)q_t(da)dW_t + Z_t^q dB_t, \quad Y_T^q = \xi \tag{2.48}$$

Le coût attendu pour être minimisé, le modèle relaxé , est défini de $\mathfrak{R}$ à $\mathbb{R}$ par

$$J(q) = E[\Psi(Y_0^q) + \int_0^T \int_U l(t, Y_t^v, Z_t^v, a)q_t(da)dt] \tag{2.49}$$

[6] Adel.Chala,On Optimal control problem for Backward stochastique Doubly systeme , univ mouhamed khider Biskra ,vol2014,Page[3]

2.1.4.1 *Condition nécessaire d'optimalité du contrôle relaxé* [7]

Le hamiltonien H défini par $[0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times P(U) \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} H(t,Y,Z,\mu,Q,R) & \\ &= \int_U l(t,Y,Z,a)\mu_t(da) + Q.\int_U f(t,Y,Z,a)\mu_t(da) \\ &+ R.\int_U g(t,Y_t,Z_t,a)\mu_t(da) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Théoréme 2.1.9 *soit μ est un contrôle relaxé minimisez le fonction J sur R et (Y_t^μ, Z_t^μ) le solution de (2.1) associé àμ .Alors , il existe un processus unique adapté $(Q^\mu) \in L_F^2([0,T];\mathbb{R}^m)$ du système E.D.S.R suivant*

$$\begin{aligned} dQ_t = & - [\int_U l_Y(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t(da) + \int_U f_y(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t(da)Q_t^\mu \\ & - \int_U g_Y(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t(da) + \int_U f_Z(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t(da)Q_t^\mu \\ & - \int_U g_Z(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t(da)R_t^\mu]dB_t - R_t^\mu dW_t, \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$Q_0^\mu = \Psi_Y(Y^\mu(0)), \tag{2.52}$$

tel que pour chaque $q_t \in P(U)$,

$$H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,q_t,Q_t^\mu,R_t^\mu) \geq H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,\mu_t,Q_t^\mu,R_t^\mu), \forall \mu_t \in P(U) \tag{2.53}$$

Preuve 11 *Puisque $Q_0^\mu = \Psi_Y(Y_0^\mu)$, alors*

$$\begin{aligned} 0 \leq & E[Q_t^\mu \tilde{Y}_0] + E\int_0^T [\int_U l^\mu(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)q_t(da) - \int_U l^\mu(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_s(da)]dt \\ + & E\int_0^T [\int_U l_Y^\mu(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_s(da).\tilde{Y}_t]dt + E\int_0^T [\int_U l_Z^\mu(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,a)\mu_t.\tilde{Z}_t]dt \end{aligned} \tag{2.54}$$

En appliquant la formule de Itô à

$$\begin{aligned} E[Q_0^\mu Y_0^\mu] = & E[Q_T^\mu \tilde{Y}_T] - E[\int_0^T \int_U l_Y^\mu(t,a)\mu_t(da).\tilde{Y}_t]dt \\ - & E[\int_0^T \int_U l_Z^\mu(t,a)\mu_t(da).\tilde{Z}_t]dt + E\int_0^T Q_t^\mu[\int_U f^\mu(t,a)q_t(da) - \int_U f^\mu(t,a)\mu_t(da)]dt \\ + & E\int_0^T R_t^\mu[\int_U g^\mu(t,a)q_t(da) - \int_U g^\mu(t,a)\mu_t(da)]dt \end{aligned} \tag{2.55}$$

[7] Adel.Chala,On Optimal control problem for Backward stochastique Doubly systeme , univ mouhamed khider Biskra ,vol2014,Page[7-8]

alors , pour chaque $q \in \mathbb{R}$

$$E\int_0^T [H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,q_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)-H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,\mu_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)]dt \geq 0 \tag{2.56}$$

soit $\mu \in \mathbb{R}$ *et* F *est un élément arbitraire de la* $\sigma - algebre$ *et* $\phi = q_t 1_F + \mu_t 1_{\Omega - F}$ *Il est évident que* ϕ *est un contrôle relaxé admissible. Appliquer l'inégalité ci-dessus avec* ϕ *,on a*

$$E\int_0^T [1_F H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,q_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)-H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,\mu_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)] \geq 0, \forall F \in F_t. \tag{2.57}$$

Ce qui implique que

$$0 \leq E[\frac{H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,q_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)-H(t,Y_t^\mu,Z_t^\mu,\mu_t,Q_t^\mu,R_t^\mu)}{F_t}] \tag{2.58}$$

La quantité dans l'espérance conditionnelle est $F_t - mesurable$

2.1.4.2 *Condition suffisant d'optimalité du contrôle relaxé* [8]

Théoréme 2.1.10 *Supposons que les fonctions* Ψ *et* $(Y,Z) \longrightarrow H(t,Y,Z,q,Q,R)$ *sont convexes , et pour tout* $q \in \mathbb{R}$ *,*$Y_T^q = 0$ *est une variable aléatoire m-dimensionnelle* F_t*-mesurable telle que* $E|\xi|^2 < \infty$ *alors* μ *est une solution optimale du contrôle relaxé*

Preuve 12 *soit* μ_2 *un élément arbitraire de* $\mathbb{R}$ *. pour tous* $\mu_1 \in \mathbb{R}$ *nous donne*

$$\begin{aligned} J(\mu_1) &- J(\mu_2) = E[h(Y_0^{\mu_1}) - h(Y_0^{\mu_2})] \\ &+ E\int_0^T [\int_U l(t,Y_t^{\mu_1},Z_t^{\mu_1},a)\mu_{lt}(da) - \int_U l(t,Y_t^{\mu_2},Z_t^{\mu_2},a)\mu_{2t}(da)]dt. \end{aligned} \tag{2.59}$$

puisque Ψ *est convexe , alors*

$$\Psi(Y_0^{\mu_1}) - \Psi(Y_0^{\mu_2}) \geq \Psi_Y(Y_0^{\mu_2})(Y_0^{\mu_1} - Y_0^{\mu_2}). \tag{2.60}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J(\mu_1) &- J(\mu_2) \geq E[\Psi_Y(Y_0^{\mu_2})(Y_0^{\mu_1} - Y_0^{\mu_2})] \\ &+ E\int_0^T [\int_U l^q(t,a)\mu_{1t}(da) - \int_U l^\mu(t,a)\mu_{2t}(da)]dt \end{aligned} \tag{2.61}$$

ainsi

$$\begin{aligned} J(\mu_1) &- J(\mu_2) \geq E[Q_0^{\mu_2}(Y_0^{\mu_1} - Y_0^{\mu_2})] \\ &+ E\int_0^T [\int_U l^q(t,a)\mu_{1t}(da) - \int_U l^\mu(t,a)\mu_{2t}(da)]dt \end{aligned} \tag{2.62}$$

[8]Adel.Chala,On Optimal control problem for Backward stochastique Doubly systeme , univ mouhamed khider Biskra ,vol2014,Page[8-9]

En appliquant la formule de Itô à $Q_t^{\mu}(Y_t^{\mu_1} - Y_t^{\mu})$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
E[Q_0^{\mu_2}(Y_0^{\mu_1} - Y_0^{\mu_2})] &= Q_T^{\mu_2}(Y_T^{\mu_1} - Y_T^{\mu_2}) - E\int_0^T H_Y(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Y_t^{\mu_1} - Y_t^{\mu_2})dt \\
&- E\int_0^T H_Z(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Z_t^{\mu_1} - Z_t^{\mu_2})dt \\
&+ E\int_0^T Q_t^{\mu_2}[\int_U f^q(t,a)\mu_{1t}(da) - \int_U f^{\mu}(t,a)\mu_{2t}(da)]dt \\
&+ E\int_0^T R_t^{\mu_2}[\int_U g^q(t,a)\mu_{1t}(da) - \int_U g^{\mu}(t,a)\mu_{2t}(da)]dt \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
J(\mu_1) - J(\mu_2) &\geq \int_0^T H(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{1t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) - H(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \\
&- -E\int_0^T H_Y(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Y_t^{\mu_1} - Y_t^{\mu_2})dt \\
&- E\int_0^T H_Z(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Z_t^{\mu_1} - Z_t^{\mu_2})dt \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

Puisque H est convexe en (Y,Z) et linéaire en μ *alors en utilisant le gradient généralisé de H de Clarke évalué à* (Y_t, Z_t, μ) *et les conditions d'optimalité nécessaires, qui sont :*

$$\begin{aligned}
H \quad (\quad & t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{1t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) - H(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \\
\geq \; & H_Y(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Y_t^{\mu_1} - Y_t^{\mu_2}) \\
+ \; & H_Z(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Z_t^{\mu_1} - Z_t^{\mu_2}) \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
0 &\leq H(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{1t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) - H(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \\
&- H_Y(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Y_t^{\mu_1} - Y_t^{\mu_2}) \\
&- H_Z(t, Y_t^{\mu_2}, Z_t^{\mu_2}, \mu_{2t}, Q_t^{\mu_2}, R_t^{\mu_2}) \times (Z_t^{\mu_1} - Z_t^{\mu_2}) \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

alors , avec (2.64) ,on a

$$J(\mu_1) - J(\mu_2) \geq 0 \qquad (2.67)$$

2.2 Application sur le contrôle optimale gouverné par E.D.S.R

2.2.1 Modèle de Black-scholes [9]

En utilisant l'article ([10]) nous prenons l'exemple suivant

Example 1 *(Critére moyenne-variance d'allocation portefeuille)*[11]
On considère un modèle de Black-scholes.
Il y a un actif sans risque de processus

$$\begin{cases} dK_t^0 = r_t K_t^0 dt \quad & t \in [0,T] \\ K_0^i = K_0 > 0 \end{cases} . \tag{2.68}$$

Un actif risqué de processus

$$\begin{cases} dK_t^i = K_t^i [b_t^i dt + \sigma_t dB_t] \\ K_0^i = K_i > 0 \end{cases} . \tag{2.69}$$

Avec b>r,$\sigma > 0$*, Un agent investit un montant* β_t *dans l'actif risqué et son processus de richesse évolue alors selon :*

$$\begin{cases} dX_t = \beta_t \dfrac{dK_t}{K_t} + (X_t - \beta_t)\frac{dK_t^0}{K_t^0} \\ \qquad = [rX_t + \beta_t(b-r)]dt + \sigma\beta_t dB_t \\ X_0 = x > 0 \end{cases} \tag{2.70}$$

On note par $\mathbb{A}$ *l'ensemble des processus de contrôle* β *progressifs à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *, tel que* $E[\int_0^T |\beta_t|^2 dt] < +\infty$ *.*
Le critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille consiste à minimiser la variance du portefeuille sous contrainte que l'espérance soit égale à une constante donnée :

$$v(m) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}} Var(X_t) \quad : E(X_t) = m, \quad m \in \mathbb{R} \tag{2.71}$$

$v(m)$ *est la variance minimale et*

$$\tilde{v}(\xi) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}} E[X_T - \xi]^2, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.72}$$

[9]Nicole El Karoui,pricing via utility maximization and entropy,Université Paris,Mathematical Finance, Vol. 10, No. 2 (April 2000),Page[264-271]

[10]M.Kohlmann et X.Y. Zhou (2000) : "Relation ship between backward stochastic differential equations and stochastic controls : a linear-quadratic approach",SIAM Journal on Control and Optimisation, 38, page[1400–1406].

[11]M.Kohlmann et X.Y. Zhou (2000) : "Relation ship between backward stochastic differential equations and stochastic controls : a linear-quadratic approach",SIAM Journal on Control and Optimisation, 38, page[1400–1406].

Nous allons résoudre ce problème (2.72) par le principe du maximum stochastique .Dans ce cas, l'Hamiltonien suivant

$$H(x, a, Y, Z) = b(x, a)Y + \sigma(x, a)Z + f(x, a) \tag{2.73}$$

a la forme :

$$H(x, a, Y, Z) = [rx + a(b - r)]Y + \sigma a Z \tag{2.74}$$

L'E.D.S.R adjointe est

$$\begin{cases} -dY_t = D_x H(x, a, Y, Z)dt - Z_t dB_t \\ Y_T = D_x g(X_T) \end{cases} . \tag{2.75}$$

S'écrit pour $\beta \in \mathcal{A}$ *et pour* $D_x H(x, a, Y, Z)dt = rY_t dt - Z_t dB_t$ *et* $D_x g(X_T) = 2[X_T - \xi]$*donc :*

$$\begin{cases} -dY_t = rY_t dt - Z_t dB_t \\ Y_T = 2[X_T - \xi] \end{cases} \tag{2.76}$$

Soit $\hat{\beta} \in \mathcal{A}$ *un candidat pour le contrôle optimal et* $\hat{X}$,$(\hat{Y}, \hat{Z})$ *les processus associés .Alors*

$$H(x, a, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = rx\hat{Y}_t + a[(b - r)\hat{Y}_t + \sigma \hat{Z}_t] \tag{2.77}$$

Cette expression étant linéaire en a, on voit donc que les conditions suivants

$$\mathcal{H}(\hat{X}_t, \hat{\alpha}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) = \min_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(\hat{X}_t, a, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.78}$$

et

$$(x, a) \longrightarrow \mathcal{H}(t, x, a, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t) \ \ est\ une\ fonction\ convexe, \tag{2.79}$$

seront satisfaites si

$$(b - r)\hat{Y}_t + \sigma \hat{Z}_t = 0 \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.80}$$

On cherche $(\hat{Y}, \hat{Z})$ *solution de (2.76) de la forme*

$$\hat{Y}_t = \varphi(t)\hat{X}_t + \psi(t) \tag{2.81}$$

où φ*et*ψ*sont deux fonctions déterministes* C^1 *. et*

$$d\hat{Y}_t = \varphi'(t)\hat{X}_t + \varphi(t)(d\hat{X}_t) + \psi'(t) \tag{2.82}$$

Nous substituons des formules (2.81)et(2.82)dans (2.76) et en utilisant l'expression (2.70) ,donc nous avons l'équation suivante

$$\varphi'(t)\hat{X}_t + \varphi(t)(r\hat{X}_t + \hat{\beta}_t(b - r) + \sigma\hat{\beta}_t) + \psi'(t) = -r(\varphi(t)\hat{X}_t + \psi(t)) + \hat{Z}_t \tag{2.83}$$

et

$$\varphi'(t)\hat{X}_t + \varphi(t)(r\hat{X}_t + \hat{\beta}_t(b-r)) = -r(\varphi(t)\hat{X}_t + \psi(t)) \tag{2.84}$$

donc

$$\varphi(t)\sigma\hat{\beta}_t = \hat{Z}_t. \tag{2.85}$$

Nous avons

$$\hat{Y_T} = \varphi(T)\hat{X_T} + \psi(T) = 2X_T - 2\xi \tag{2.86}$$

donc le condition terminales est :

$$\varphi(T) = 2et\psi(T) = -2\xi \tag{2.87}$$

Nous substituons des formules (2.82) et (2.85) dans (2.80) donc

$$(b-r)\varphi(T)\hat{X}_t + \psi(t) + \varphi(t)\sigma^2\hat{\beta}_t = 0 \tag{2.88}$$

donc

$$\varphi(t)\sigma^2\hat{\beta}_t = -(b-r)\varphi(T)\hat{X}_t + \psi(t) \tag{2.89}$$

donc

$$\hat{\beta}_t = \frac{(r-b)\hat{Y}_t}{\sigma^2}\varphi(t) = \frac{(r-b)\varphi(T)\hat{X}_t + \psi(t)}{\sigma^2\varphi(t)} \tag{2.90}$$

et d'après (2.84)on à

$$\hat{\beta}_t = \frac{(\varphi'(t) + 2r\varphi(t))\hat{X}_t + \psi'(t) + r\psi(t)}{(r-b)\varphi(t)} \tag{2.91}$$

En comparant avec (2.90),on obtient les ´equations différentielles satisfaites par φ et ψ :

$$\begin{cases} \varphi'(t) + (2r - \dfrac{(b-r)^2}{\sigma^2})\varphi(t) = 0 \\ \varphi(T) = 2 \end{cases} \tag{2.92}$$

$$\begin{cases} \psi'(t) + (r - \dfrac{(b-r)^2}{\sigma^2})\psi(t) = 0 \\ \psi(T) = -2\xi \end{cases} \tag{2.93}$$

dont les solutions explicites sont (seul $\psi = \psi_\xi$ dépend de ξ) nous avons

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (2r - \frac{(b-r)^2}{\sigma^2}) \tag{2.94}$$

et

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = (r - \frac{(b-r)^2}{\sigma^2}) \tag{2.95}$$

donc

$$\varphi(t) = \int_t^T \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds = 2exp[(2r - \frac{(b-r)^2}{\sigma^2})(T-t)] \tag{2.96}$$

et

$$\psi(t) = \int_t^T \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} ds = \xi\psi_1(t) = -2\xi exp[(r - \frac{(b-r)^2}{\sigma^2})(T-t)] \tag{2.97}$$

Avec ce choix de φetψ_ξ,les processus $(\hat{Y}, \hat{Z})$ résolvent l'E.D.S.R adjoint (2.76) et les conditions du principe du maximum stochastique, le contrôle optimal est donné par (2.90) ou en encore sous forme :

$$\hat{\beta}_\xi(t,x) = \frac{(r-b)(\varphi(t)x + \psi_\xi(t)}{\sigma^2\varphi(t)}. \tag{2.98}$$

Pour calcule la fonction valeur $\tilde{v}(\xi)$,on procède comme suit.Pour tout $\beta \in \mathcal{A}$, on a $\frac{1}{2}\varphi(t)X_t^2 + \psi_\xi X_t$ entre 0 et T , en utilisant la dynamique (2.70) de X et les E.D.O (2.93)et(2.92) satisfaites par φ et ψ_ξ.On obtient alors en prenant l'espérance : Nous avons

$$\begin{aligned} E[X_T - \xi]^2 &= Var(X_T) + (E[X_T] - \xi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0)x^2 + \psi_\xi(0)x + \xi^2 \\ &+ E[\int_0^T \frac{\varphi(t)\sigma^2}{2}(\beta_t - \frac{(r-b)(\varphi(t)X_t\psi_\xi(t)}{\sigma^2\varphi(t)})^2 dt] \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T (\frac{b-r}{\sigma})^2 \frac{\psi_\xi(t)^2}{\varphi(t)} dt \end{aligned} \tag{2.99}$$

et pour

$$(\beta_t - \frac{(r-b)(\varphi(t)X_t\psi_\xi(t)}{\sigma^2\varphi(t)})^2 dt = 0 \tag{2.100}$$

donc

$$E[X_T - \xi]^2 = \tilde{v}(\xi) = \frac{1}{2}\varphi(0)x^2 + \psi_\xi(0)x + \xi^2 - \frac{1}{2}\int_0^T (\frac{b-r}{\sigma})^2 \frac{\psi_\xi(t)^2}{\varphi(t)} dt \tag{2.101}$$

soit avec les expressions (2.96)et(2.97) de φ et ψ_ξ

$$\tilde{v}(\xi) = e^{-\frac{(b-r)^2}{\sigma^2}T}(\xi - e^{rT}x)^2, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.102}$$

Nous montrons maintenant comment les deux problèmes (2.68) et (2.69) sont liés.

Proposition 4 *On a les relations de conjugaison :*

$$\tilde{v}(\xi) = \inf_{m\in\mathbb{R}}[v(m) + (m-\xi)^2], \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.103}$$

$$v(m) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}[\tilde{v}(\xi) - (m-\xi)^2], \quad m \in \mathbb{R} \tag{2.104}$$

pour tout m dans $\mathbb{R}$ *,le contrôle optimal de v(m)est égala à* $\hat{\beta}_{\xi_m}$ *donné par (2.98) où* ξ_m *atteint l'argument maximum dans(2.104) , soit :*

$$\xi_m = \frac{m - exp[(r - \frac{(b-r)^2}{\sigma^2})T]x}{1 - exp[-\frac{(b-r)^2}{\sigma^2}T]} \tag{2.105}$$

Preuve 13 *. Notons d'abord que pour tout* $\beta \in \mathcal{A}$ *,*$\xi \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$E[X_T - \xi]^2 = Var(X_T) + (E[X_T] - \xi)^2 \tag{2.106}$$

pour tout $m \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*,on peut trouver* $\beta^\varepsilon \in \mathcal{A}$ *de diffusion associée* X^ε*,tel que* $E(X_T^\varepsilon) = m$ *et* $Var(X_T^\varepsilon) \leq v(m) + \varepsilon$*.On déduit avec (2.106) que*

$$E[X_T^\varepsilon - \xi]^2 \leq v(m) + (m - \xi)^2 + \varepsilon, \tag{2.107}$$

et donc

$$\tilde{v}(\xi) \leq v(m) + (m - \xi)^2, \quad \forall m, \xi \in \mathbb{R} \tag{2.108}$$

. D'autre part , pour $\xi \in \mathbb{R}$ *, soit* $\hat{\beta}_\xi \in \mathcal{A}$ *de diffusion associée* $\hat{X^\xi}$ *, un contrôle optimal de* $\tilde{v}(\xi)$*.Posons* $m_\xi = E(\hat{X_T^\xi})$*.Alors d'après (2.107), on a*

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\xi) &= Var(\hat{X_T^\xi}) + (m_\xi - \xi)^2 \\ &\geq v(m_\xi) + (m_\xi - \xi)^2 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Cette dernière inégalité combinée avec (2.108) prouve (2.103)

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\xi) &= \inf_{m \in \mathbb{R}} [v(m) + (m - \xi)^2] \\ &= v(m_\xi) + (m_\xi - \xi)^2 \end{aligned} \tag{2.110}$$

et aussi que $\hat{\beta}_\xi$ *est la solution de* $v(m_\xi)$ *.*

Pour tout $m \in \mathbb{R}$ *,soit* $\xi_m \in \mathbb{R}$ *l'argument maximum de* $v(m)$ *dans (2.104) qui est explicitement donné par(2.105) d'après l'expression (2.102) de* $\tilde{v}$ *.*

Alors m est un argument minimum de $\tilde{v}(\xi_m)$*dans (2.103).comme la fonction*

$$m \longrightarrow v(m) + (m - \xi)^2 \quad \textit{est strictement convexe} \tag{2.111}$$

cet argument minimum est unique et donc $m = m_{\xi_m} = E(X_T^{\xi_m})$*.On a donc*

$$\begin{aligned} v(m) &= \tilde{v}(\xi_m) + (m - \xi_m)^2 \\ &= E[X_T^{\xi_m} - \xi_m]^2 + [E(X_T^{\xi_m} - \xi_m)]^2 = Var(X_T^{\xi_m}), \end{aligned} \tag{2.112}$$

donc $\hat{\beta}_{\xi_m}$ *est solution de v(m)*

Remarque 2.2.1 *Il y a une interprétation financière claire de la stratégie de portefeuille optimale (2.98) du problème (2.72).En effet , notons qu'elle s'écrit aussi comme*

$$\hat{\beta}_t^{(\xi)} = \hat{\beta}_\xi(t, X_t) = -\frac{(b-r)}{\sigma^2}(X_t - R_\xi(t)), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.113}$$

où le processus $R_\xi(t) = -\psi_\xi(t)/\varphi(t)$ est explicitement déterminé par :

$$dR_\xi(t) = rR_\xi(t)dt, \quad R_\xi(T) = \xi \tag{2.114}$$

R_ξ est donc le processus de richesse du portefeuille d'investissement nul dans l'actif risqué, et répliquant parfaitement l'actif contingent constantξ .D'autre part, considérons le problème d'un investisseur de richesse autofinançante $\bar{X}_t$ et cherchant à minimiser $E[(\bar{X}_T)^2]$ dans ce modèle de marché complet. Sa stratégie optimale de portefeuille est le portefeuille de Merton pour une fonction d'utilité $c(x) = -x^2$ et est donnée par

$$\bar{\beta}_t = -\frac{b-r}{\sigma^2}\bar{X}_t, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.115}$$

La stratégie optimale du problème (2.72) est donc la stratégie selon (2.115) de portefeuille de richesse $X_t - R_\xi(t)$. Nous avons seulement voulu illustré sur cet exemple simple de marché complet, comment appliquer l'approche par principe du maximum stochastique. En fait, cette approche s'utilise avec succès pour traiter le cas le plus complexe de coefficients aléatoires sur les prix des marchés incomplets, et conduit à des équations différentielles stochastiques rétrogrades pour $\varphi(t)$ et $\psi_\xi(t)$

Conclusion

Dans le cadre de notre travail,Nous connaissions l'existence,l'unicité et la forme d'une solution de E.D.S.R Ceci est à travers la première partie du premier chapitre .
Nous avons également étudié le problème du contrôle optimale et son principe de base (le principe de Pontryagin) C'est ce qui a été étudié à la deuxième partie du premier chapitre.
Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la relation entre les E.D.S.R et le contrôle optimale ,Où nous avons constaté que l'E.D.S.R est un équation adjoint de contrôle optimale .nous avons représenté la condition d'optimalité du contrôle optimal (principe de Pontryagin), la condition d'optimalité du contrôle strict et relaxé et l'écriture d'un modèle de black-scholes (application de la finance mathématique)

Bibliographie

[1] Abi Ayad .I,Introduction Aux Équation différentielle stochastique , mémoire de master , univ Abboubekr belkaid Telmecen.

[2] Bahlali .S, The strict and relaxed stochastique maximum principle for optimal control probleme of Backword systeme,vol 20 dec 2008.

[3] Baheddi.A , cours de processus de diffusion,2 eme master , univ kasdi merbah ouargla,2019.

[4] Boussaha Ahlam , contrôle optimal stochastique ,mémoire de master de Université de mohamed khider biskra,juin 2018.

[5] Boughrara.S,principe du maximum pour les problèmes de contrôle Stochastique Approche par les Probabilités Equivalentes,Thèse de Magister, Universite Mohamed Khider Biskra,17/5/2005.

[6] Chala.A,On Optimal control problem for Backward stochastique Doubly systeme , univ mouhamed khider Biskra ,vol2014.

[7] Erhani.Çi . probability and stochastique , livre,univ Prineton ,2001.

[8] Emmanuel Trélat ,contrôle optimal : théorie et application ,cours de université de marie carie (paris6),laboratoire Jacque-louis lions,2001.

[9] F.Bienvenu.D ,processus stochastique,livre , univ ,clande Bernard lyon,2006/2007.

[10] jean-christophe Breton,processus stochastique , univ de rennes 1-octobre 2018.

[11] Huyên Philippe , optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance ,livre, université paris 7 , 2000 .

[12] Kohlmann.M et Zhou.X.Y : Relation ship between backward stochastic differential equations and stochastic controls : a linear-quadratic approach,SIAM Journal on Control and Optimisation,38, 1392–1407,2000.

[13] Merabet Imane , contrôle optimal des équation différentielle stochastique Rétrograde, mémoire de master, univ kasdi merbah ouargla,2017.

[14] Moussoumi Dehbi.N, contrôle optimal :optimisation d'une production céréalière ,livre de université d'Orléans ,2012, français.

[15] Nathalie.Kh,Optimality conditions for optimal control problems and applications ,Université de Bretagne occidentale - Brest, 2017.

[16] Nicole Ekaroui,Backword stochastique différentielle equation and application .

[17] Ottobre.M , Applied stochastique processus ,imperial college london ,2013/2014

[18] Pavliotis.G.A, Applied stochastique processus ,livre,London,junuary 12/2019.

[19] PHilippe Briand,Équations différentielles stochastiques Rétrograde , cours ,mars2001.

[20] Zitouni Mahieddine , Discrétisations et résolutions numériques des équation différentielles stochastique rétrogrades ,mémoire de magister,univ mohamed bougrara-boumerdase.

الملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة التحكم الأمثل الذي تحكمه المعادلات التفاضلية الرجعية , دراسة نظرية وتطبيقية ,حيث قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية من خلال نظريات الوجود والوحدانية , والتحكم الأمثل بعرض مشكلة التحكم الأمثل ومبدؤه الأساسي-(مبدأ بونتريجين)- وفي نهاية دراسة العلاقة بينهم وكيفية تطبيقها في مجال التمويل الرياضي .

الكلمات المفتاحية – التحكم الأمثل , المعادلات التفاضلية الرجعية, مبدأ الحد الأقصى بونتريجين .

Abstract

In this work ,we studied the optimal control gouverned by BSDE , a theoretical study and applied , where we have studied the BSDE through the study of the theorems of existence and the uniqueness of solution .In addition to optimal control by presenting its problem and its basic principle , at the end study the relation between the optimal control and the BSDE and their application in mathématique finance.

Key word : the optimal control , the BSDE , principle pontryagin.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le contrôle optimal gouverné par l'équation différentielle stochastique rétrogradé , une étude théorique et applique , où nous avons étudié l'E.D.S.R a travers l'étude du théorème de l'existence et de l'unicité de solution ,en plus le contrôle optimal ,en présentant son problème et son principe de base (Principe du Pontryagin) .A la fin de étude de la relation entre l'E.D.S.R et le contrôle optimal et leur application dans la finance mathématique.

Mots clé : contrôle optimal, l'équation différentielle stochastique rétrogradé, principe du maximum de pontryagin .