



جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: ممدجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : عليات رميماء

الموضوع

مصفوفة التفاضل الكسري في معالجة المعادلات

التفاضلية من رتب كسرية

نوقش يوم 2019/06/29 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	الرتبة أستاذ محاضرا "ب" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	معمري محمد
ممتحنا	الرتبة أستاذ مساعد "أ" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	عباسي حسين
مشرفا	الرتبة أستاذ محاضرا "ب" جامعة قاصدي مرباح ورقلة	بن الشيخ ع / الكريم

❖ شكر و عرفان

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء،
ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد
صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن تبع هداه إلى يوم الدين
وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم : " من لم يشكر الناس لم يشكره الله "
رواه الترميذي وأحمد
نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة
وحملنا على سفينة النجاة
إلى كل من صرنا بفضلہ نكتب ونقرأ و...
إلى كل من علمنا علما به ينتفع وأدب به يرتفع
بدأ من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتنا الكرام في جامعة قاصدي
مرباح ورقلة
تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف " بن الشيخ عبد الكريم" الذي
أفادنا بنصائحه وتوجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة
وتحية طيبة إلى اللجنة التي تكلمت بمناقشة هذه المذكرة
كما لا ننسى أن نتقدم بالشكر الجزيل إلى رئيس قسم الرياضيات
" الاستاذ مفلح مبروك "
وفي الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع
من قريب أو من بعيد

❖ اهداء

إلى بسملة الحياة و سر الوجود، إلى معنى الحب و الحنان، إلى الشمعة التي
تحترق لتنير
طريقي، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي
"أمي الحبيبة"
إلى أعظم رجل، رجل تحمل مرارة الأيام و قسوة الزمان من أجل إنارة
دروب التعلم
لأبنائه، رمز الكفاح و العطاء، رمز التضحية و التحدي، رمز الأخلاق و
العمل، إلى من
كان لي السند و العون في مساري الدراسي
"أبي العزيز"
إلى من قال فيهم الشاعر:
أخاك أخاك فن لا أخاله * كساع إلى الهيجاء بغير سلاح
إلى الذي من تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إخوتي الأعمام
إلى كل الأهل والأقارب
إلى من سرنا سويًا نشق الطريق معًا نحو النجاح والإبداع إلى من تكاتفنا
يداً بيد نمد جسور الود والحب إلى من سهرنا وكابدنا المشاق صديقتي
ورفيقة دربي فاطمة الدبة ...
إلى كل الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعمام التي جمعتني بهم الحياة
وكل من تقاسمت معهم أحزاني وأفراحي صديقتي في إقامة بن مالك محمد
حسان
إلى من علموني حروفاً من ذهب وكلمات من درر و عبارات من أسمى و
أجلى عبارات في العلم إلى من صاغوا لي من علمهم حروفاً ومن فكرهم
منارة تنير لنا مسيرة العلم والنجاح إلى أساتذتي الكرام...
إلى كل طلبة السنة الثانية ماستر رياضيات تخصص تمذجة و تحليل عددي
دفعة 2018/2019
إلى كل من يبحث عن المعرفة بين ثنايا هذه المذكرة إلى كل من نساه
قلبي ولم ينسأه قلبي أهديكم هذا العمل راجياً من المولى عز وجل القبول
والنجاح

الفهرس

4	1	مفاهيم اساسية و دراسة مرجعية
4	1.1	لمحة في الحساب الكسري
4	1.1.1	التوايع الخاصة
7	2.1.1	الإشتقاق ذي الرتب الكسرية
8	3.1.1	التكامل ذي الرتب الكسرية
9	2.1	كثيرات الحدود
9	1.2.1	كثيرات حدود لوجندر
12	2.2.1	كثيرات حدود برنشتاين
18	3.1	نظرة في المعادلات التفاضلية من رتب كسرية
18	1.3.1	المعادلات التفاضلية العادية [37, 36]:
19	2.3.1	المعادلات التفاضلية الكسرية:
20	2	مصفوفة لوجندر لعملية لتفاضل الكسري
20	1.2	مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري للوجندر
22	2.2	حل معادلات تفاضلية كسرية خطية [29]:
24	3.2	حل معادلات تفاضلية كسرية غير خطية [29]:
25	4.2	امثلة عددية [29]:
29	3	مصفوفة برنشتاين لعملية لتفاضل الكسري
29	1.3	مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري لبرنشتاين [46]:
32	2.3	حل معادلات تفاضلية من رتب كسرية [46]:
33	3.3	امثلة عددية [46]:

ترميز

معناه	الرمز
التابع غاما	$\Gamma(n)$
التابع بيتا	$B(m, n)$
فضاء هيلبار	$H = L^2(0, 1)$
جداء سلمي معرف على $L^2(\Omega)$	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
جداء سلمي	$\langle \cdot, \cdot \rangle_w$
نظيم على $L^2(\Omega)$	$\ \cdot\ _2, \ \cdot\ _{L^2}$
النظيم	$\ \cdot\ $
الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل اليميني	${}^R D_t^\alpha f(t)$
الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل اليساري	${}^R D_a^\alpha f(t)$
الاشتقاق الكسري لكابوتو	$D^\alpha f(t)$
التكامل الكسري لريمان-ليوفيل	$I^\alpha f(t)$
التكامل الكسري لريمان-ليوفيل اليساري	${}^R D_t^{-\alpha} f(t)$
التكامل الكسري لريمان-ليوفيل اليميني	${}^R D_b^{-\beta} f(t)$
الفضاء الجزئي المولد بالمجموعة $\{b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)\}$	$Span\{b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)\}$
كثيرات حدود لوجندر المعدلة	$P_i(x)$
اساس لوجندر المعدل	$\Phi(x)$
شعاع معاملات التحليل وفق اساس كل من برنشتاين ولوجندر	c^T
دالة الوزن	$u(x)$
كثيرات حدود برنشتاين	$b_i^n(x)$
اساس برنشتاين	$B(x)$
مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري	$\mathbf{D}^{(\alpha)}$
تدل على المشتقات الكسرية لكابوتو من الرتبة α	D^α

مقدمة

من المعلوم انه للمساعدة في فهم الظواهر الفيزيائية يلجا الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية الى تصميم نماذج رياضية وهذه النماذج غالبا ما تؤدي الى صياغة مسائل على شكل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية التي تعد ادوات اساسية في حقول علمية مختلفة كالرياضيات التطبيقية والفيزياء، البيولوجيا، الهندسة ولها تطبيقات علمية في الاخطية نذكر منها : تذبذب الزلازل [4] ، نموذج حركة السوائل الديناميكي [5] ، والميكانيكا المتصلة والإحصائية [6] ، والوضوء الملونة [7] ، والميكانيكا الصلبة [8] ، والاقتصاد [9] ، الهندسة الحيوية [10, 11] ،

وديناميات الواجهات بين الجسيمات النانوية والركائز [12] . في العقد الأخير ، جذبت المعادلة التفاضلية الكسرية انتباه علماء الرياضيات والفيزياء والمهندسين [44, 45] . لكن بعض المعادلات التفاضلية من رتب كسرية [34] لا تتوفر لنا طريقة لحساب الحل الصريح إلا في حالات معينة وتحت شروط مثالية أحيانا ، لذا نلجأ إلى البحث عن الحل التقريبي رغم علمنا من الناحية النظرية أن المسألة تتمتع بحل وحيد.

فقد قدم العديد من العلماء طرق عديدة لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية باستخدام كثيرات الحدود [25, 29] كون كثيرات الحدود من ابسط الدوال من ناحية التركيب وبالاعتماد على تقنيات بناء مصفوفات العمليات لتفاضل والتكامل لاسس تلك كثيرات الحدود من اجل ازالة التراكيب المعقدة في المسائل ، لتلك الاسباب جاءت فكرة بحثنا هذا الذي يهدف [29, 46] الى بناء مصفوفة التفاضل الكسري في معالجة المعادلات التفاضلية من رتب كسرية .

من جهة اخرى ان الحساب الكسري يعد أحد أكثر الأعمال حداثة له تاريخا طويلا حيث يهتم بحساب المشتقات او التكاملات من رتب كانت عددا حقيقيا او مركبة، وتعود بدايات الحساب الكسري الى العالم Leibnitz لمشتقة من الرتبة n اذ تساءل Leibniz في رسالة وجهها الى العالم Hospital سنة 1695 م عن امكانية إيجاد مشتقة من الرتبة $\frac{1}{2}$ ، (يمكن الاطلاع على تاريخ تطور الحساب الكسري في [1, 2]) ، و زاد اهتمام الرياضيين بالحساب الكسري امثال Euler 1730 م ، Laplace 1812 م ، Liouville 1832 م ، Riemann 1876 م .

وقد تم كذلك على مدى القرون الثلاثة الماضية ، تم التعامل مع هذا الموضوع من قبل علماء الرياضيات و فقط في السنوات القليلة الماضية تم سحبها إلى عدة مجالات (تطبيقية) في الهندسة والعلوم والاقتصاد [3] . ومع ذلك، عدد المشكلات العلمية والهندسية التي تنطوي على حساب التفاضل والتكامل الكسري كبير جدا ولا يزال في تزايد وربما حساب التفاضل والتكامل الكسري سيكون من القرن الثاني والعشرين .

خلال العقود الماضية استخدمت عدة طرق لحل المعادلات التفاضلية الكسرية ، والمعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية ، والمعادلات التفاضلية التكاملية الكسرية ، والأنظمة الديناميكية التي تحتوي على المشتقات الكسرية ، مثل : طريقة Adomian's decomposition [13, 14] ، طريقة perturbation homotopy [15, 16] ، طريقة homotopy analysis [17] ، طريقة التجميع [18] ، طريقة Galerkin [19] ، وطرق أخرى [20, 21] .

وقد تم تنظيم المذكرة على النحو التالي:

الفصل الاول :يحتوي هذا الفصل على ثلاثة أقسام:

القسم الأول ، تضمن لمحة في الحساب الكسري ([22, 24, 34, 47]) فقد قسم الى ثلاثة اقسام فرعية استهلناه بتقديم تعريف التوابع الخاصة (تعريف التابع غاما والتابع بيتا وكذا علاقة التابع غاما بتابع بيتا) وتعريف الاشتقاق ذي الرتب الكسرية (الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل والاشتقاق الكسري لكابوتو) و التكامل ذي الرتب الكسرية (التكامل الكسري لريمان-ليوفيل) .

اما القسم الثاني ، تضمن دراسة مرجعية في بعض كثيرات حدود التقريب ([29, 30, 31, 33, 34] [23, 24, 25], [27, 28, 46, 26])، حيث قدمنا تعريفات وخواص لكثيرات حدود لوجندر المعدل و برنشتاين وكذا تقريب التابع لكل من لوجندر المعدل و برنشتاين وفق اساسهما وتحليل التقارب لكل منهما

و القسم الثالث,تضمن نضرة في المعادلات التفاضلية من رتب كسرية ([37,36,35,34]) تحدثنا بصفة عامة على المعادلات التفاضلية العادية و المعادلات التفاضلية من رتب كسرية

الفصل الثاني : (دراسة وتحليل المرجع [29]) مقسم الى اربعة اقسام :

القسم الاول , نتطرق فيه الى تشكيل مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري للوجندر المعدل, اما في القسم الثاني ,توضح فعالية مصفوفات العمليات لتفاضل الكسري لكثيرات حدود لوجندر المعدل في حل معادلات تفاضلية كسرية خطية وذلك عن طريق تحويل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية إلى جملة معادلات جبرية خطية. ايضا القسم الثالث, يوضح فعالية مصفوفات العمليات لتفاضل الكسري في حل معادلات تفاضلية كسرية غير خطية وذلك عن طريق تحويل المعادلة التفاضلية الكسرية غير الخطية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية . كذلك القسم الرابع , تم تطبيق الطريقة المقترحة على بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و غير الخطية و مقارنة النتائج مع الحلول الحقيقية و بعض الطرق الأخرى

الفصل الثالث:(دراسة وتحليل المرجع [46]) مقسم الى ثلاثة اقسام:

القسم الاول , نتطرق فيه الى تشكيل مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري لبرنشتاين . اما القسم الثاني , يوضح فعالية مصفوفات العمليات لتفاضل الكسري لكثيرات حدود برنشتاين في حل معادلات تفاضلية كسرية خطية و غير خطية وذلك عن طريق تحويل المعادلة التفاضلية الكسرية خطية كانت او غير خطية إلى جملة معادلات جبرية . القسم الثالث, طبقنا الطريقة المقترحة على بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و غير الخطية و مقارنة النتائج مع الحلول الحقيقية و بعض الطرق الأخرى.

الفصل الأول

مفاهيم اساسية و دراسة مرجعية

1.1 لمحة في الحساب الكسري

الحساب الكسري عملية رياضية ظهرت في سنة 1695 على يد العالم "لايبينز" ثم تطور حتى العصر الحديث ,وبعد الثورة التكنولوجية وجدت طريقها للاستخدام في مختلف الميادين العلمية وخاصة الهندسة والفيزياء والميكانيك ... حيث سنتطرق الى تعريف الدوال الخاصة والاشتقاق ذي الرتب الكسرية والتكامل ذي الرتب الكسرية

1.1.1 التتابع الخاصة

في هذا الجزء سنتطرق الى تعريف الدالة غاما و الدالة بيتا حيث أنها من الدوال الاساسية في الحساب الكسري.

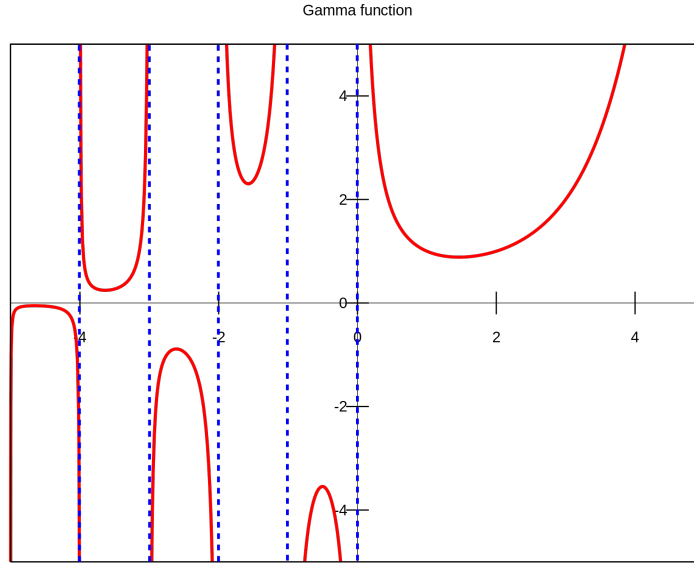
1.1.1.1 التابع غاما:

تعريف 1 [22]

الدالة غاما لها عدة أشكال يمكن الانتقال من شكل إلى آخر منها بإجراءات رياضية و لكن أشهرها صيغة أولر (Euler) وهي:

$$\Gamma(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx \quad ; n > 0 \quad x \in \mathbb{R}.$$

•a المنحني البياني الخاص به:



شكل 1.1: منحني بياني للتابع غاما

فمثلا لايجاد $\Gamma(2)$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{2-1} e^{-x} dx \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} dx \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^M \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{-M}{e^M} - \frac{1}{e^M} + 0 + e^0 \right) = 1
 \end{aligned}$$

•b قيم خاصة لتابع غاما [22]:
من بين خواص التابع غاما لدينا:

1- خاصية التابع :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x \neq 0$$

2- خاصية التسلسل: اذا كان n عددا صحيحا موجبا فان: $\Gamma(n+1) = n!$

3- خاصية التكرار:

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n} \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$$

-4

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

-5

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n - 1)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

-6

$$\Gamma(n)\Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$$

مثال 1

$$\Gamma(4) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

ملاحظة 1 • لا يمكن إيجاد $\Gamma(n)$ إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً و

$$\Gamma(1) = 1 \text{ و } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2.1.1.1 التابع بيتا :

تعريف 2 تعرف الدالة بيتا كالآتي [22] :

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \quad m > 0, \quad n > 0$$

فمثلا لايجاد $B(2,3)$

$$\begin{aligned} B(2, 3) &= \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ملاحظة 2 :

التابع بيتا متناظر اي :

$$B(m, n) = B(n, m)$$

3.1.1.1 علاقة التابع غاما بالتابع بيتا [22]:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

فمثلا لايجاد $B(2,3)$

$$B(2, 3) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1!.2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

2.1.1 الإشتقاق ذي الرتب الكسرية

في هذا الجزء نقدم ثلاث تعريفات مختلفة للمشتقات الكسرية، وهي تعريف الإشتقاق الكسري حسب ريمان-ليوفيل، وتعريف الإشتقاق الكسري حسب كابوتو، والعلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان ليوفيل و كابوتو،

1.2.1.1 الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل [22]:

الإشتقاق الكسري اليميني:

$${}_t^R D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\forall t < b)$$

الإشتقاق الكسري اليساري:

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\forall t > a)$$

2.2.1.1 الإشتقاق الكسري ل كابوتو [46]:

يعرف المشتق الكسري بمفهوم كابوتو كمايلي :

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, & n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x), & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.1)$$

حيث: $\alpha > 0$ هي رتبة المشتق و n هي اصغر عدد صحيح اكبر من α لمشتق كابوتو لدينا:

$$D^\alpha C = 0 \quad (C \text{ ثابت})$$

(2.1)

$$D^\alpha x^j = \begin{cases} 0, & \text{مع } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ و } j < [\alpha] \\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} x^{j-\alpha}, & \text{مع } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ و } j \geq [\alpha] \text{ او } j \notin \mathbb{N} \text{ و } j > [\alpha] \end{cases}$$

ومن خصائصه أنه تطبيق خطي يحقق العلاقة التالية:

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x), \quad (3.1)$$

3.1.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

1.3.1.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل :

يعرف كما يلي [34, 22] :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad \alpha > 0, x > 0$$

$$I^0 f(x) = f(x)$$

خاصية 1 : من خواص المؤثر I^α مايلي:

$$I^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

توطئة 1 اذا كان $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ اذن:

$$D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x),$$

$$I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!}, \quad x > 0.$$

ملاحظة 3 :

التكامل الكسري لريمان ليوفيل يمكن كتابته على شكل جداء التونسوري $f(t)$ و $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ [47]

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= g_\alpha(t) * f(t) \end{aligned}$$

التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليساري :

$$\forall t > a \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليميني :

$$\forall t < b \quad {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

2.1 كثيرات الحدود

تعتبر كثيرات الحدود المتعامدة من اهم الوسائل التي يعتمد عليها في دراسة وايجاد حلول العديد من المشاكل والمسائل من مختلف العلوم حيث بدا الاهتمام بدراستها والتعمق فيها منذ بداية القرن التاسع عشر ميلادي من خلال دراسة تشيبيشيف للكسور الجزئية المتصلة. منذ ذلك الوقت وقع الكشف عن العديد من التطبيقات لها في العديد من المجالات الرياضية والمسائل الفيزيائية لذا فهي تدرس في العديد من فروع الرياضيات والفيزياء .

في هذا الجزء تم دراسة بعض الانواع من كثيرات الحدود وهي : كثيرات حدود برنشتاين BPs , وكثيرات حدود لوجندر, مع تقديم مفصل لبعض خصائصهما وكذا تقريب تابع بواسطة اسس تلك الكثيرات الحدود وتحليل التقارب وكل ذلك بغرض استخدامهما في الفصول المقبلة

1.2.1 كثيرات حدود لوجندر

كثيرات حدود لوجندر يعود اسمها الى عالم الرياضيات أدريان ماري لوجندر ¹ , الان سنتطرق لتقديم تعريف وخواص لكثيرات حدود لوجندر المعدل وكذا تقريب التابع وتحليل التقارب.

1.1.2.1 كثيرات حدود لوجندر المعدلة على $[0,1]$ وخصائصها:

•a تعريف و خواص [29]

تعرف كثيرات حدود لوجندر على المجال $[-1, 1]$ ويمكن تحديدها باستخدام العلاقة التراجعية التالية:

$$L_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{i+1}zL_i(z) - \frac{i}{i+1}L_{i-1}(z), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

حيث ان: $L_0(z) = 1$ و $L_1(z) = z$

من اجل استعمال كثيرات الحدود هذه على المجال $x \in [0, 1]$, نعرف مايسمى بكثيرات حدود لوجندر المعدلة بواسطة تغيير المتغير $z = 2x - 1$. نعبر عن كثيرات حدود لوجندر المعدلة $L_i(2x - 1)$ بدلالة $P_i(x)$. حيث نحصل على $P_i(x)$ كالتالي:

$$P_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)(2x-1)}{(i+1)}P_i(x) - \frac{i}{i+1}P_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

¹ ولد في 18 سبتمبر 1752 باريس, فرنسا وتوفي في 10 يناير 1833 (80 سنة) باريس, فرنسا هو عالم كان له دور معطاء في عدة فروع من الرياضيات ومنها الاحصاء ونظرية العداد والجبر التجريدي والتحليل الرياضي. عضو في الجمعية الملكية، والأكاديمية الفرنسية للعلوم، والأكاديمية الأمريكية للفنون والعلوم، والأكاديمية البروسية للعلوم .

حيث ان $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = 2x - 1$ يمكن كتابة كثيرات حدود لوجندر المعدلة $P_i(x)$ على الشكل التحليلي من الدرجة i كمايلي :

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!x^k}{(i-k)!(k!)^2} \quad (6.1)$$

حيث ان : $P_i(0) = (-1)^i$ و $P_i(1) = 1$ ان كثيرات حدود لوجندر من كثيرات الحدود المتعامدة و شرط التعامد بالنسبة لتابع الوزن $u^{0,0}(x) = 1$ محقق اي:

$$\int_0^1 P_i(x)P_j(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (7.1)$$

سلسلة القوى لكثيرات حدود لوجندر المعدل تصاغ ب:

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \binom{i+k}{k} \binom{i}{k} x^k \quad (8.1)$$

•b تقريب التابع بكثيرات حدود لوجندر المعدل : لتقريب التابع نتطرق الى النظرية التالية :

نظرية 1 [31]

ليكن $H = L^2(0, 1)$ فضاء هيلبرتي اي: فضاء شعاعي مزود بجداء سلبي $\langle \cdot, \cdot \rangle$ حيث:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

إذا كان F فضاء جزئي مغلق من H ، و f عنصر من H ، حيث $f \notin F$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد φ^* من F ، يمثل أحسن تقريب للعنصر f في F ، أي:

$$\forall f \in H, \exists! \varphi^* \in F : \|f - \varphi^*\| = \inf_{\varphi \in F} \|f - \varphi\| \quad (9.1)$$

ويحقق

$$\langle f - \varphi^*, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in F. \quad (10.1)$$

ليكن التابع $Y(x) \in L^2(0, 1)$, فان تقريبه وفق اساس كثيرات حدود لوجندر المعدلة يعطى بالشكل التالي: [29, 30]

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x) \quad (11.1)$$

حيث ان المعاملات c_j تكتب بالشكل التالي :

$$c_j = (2j + 1) \int_0^1 Y(x) P_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.1)$$

عمليا، الحدود الاولى $(m + 1)$ لكثيرات حدود لوجندر المعدلة ماخوذة بعين الاعتبار. ومنه نضع التقريب التالي :

$$Y(x) = \sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = c^T \Phi(x) \quad (13.1)$$

حيث ان c يسمى معامل اساس لوجندر المعدل و $\Phi(x)$ اساس لوجندر المعدل، تعطى على الشكل التالي:

$$c^T = [c_0, \dots, c_m]$$

$$\Phi(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)]^T. \quad (14.1)$$

يمكن التعبير عن مشتق الشعاع $\Phi(x)$ بالشكل التالي :

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \mathbf{D}^{(1)} \Phi(x) \quad (15.1)$$

حيث $\mathbf{D}^{(1)}$ مصفوفة العمليات لتفاضل من الصنف $(m + 1) \times (m + 1)$ نتحصل عليها كمايلي :

$$\mathbf{D}^{(1)} = (d_{ij}) = \begin{cases} 2(2j + 1), & \text{for } j = i - k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \begin{cases} k = 1, 3, \dots, m, & \text{if } m \text{ odd} \\ k = 1, 3, \dots, m - 1, & \text{if } m \text{ even} \end{cases}$$

على سبيل المثال من اجل m نتحصل على:

$$\mathbf{D}^{(1)} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 2m - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 2m - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- مصفوفة العمليات للوجندر المعممة على الحسابات الكسرية :
باستخدام المعادلة (15.1) , فمن الواضح ان:

$$\frac{d^n \Phi(x)}{dx^n} = \left(\mathbf{D}^{(1)} \right)^n \Phi(x)$$

حيث $n \in \mathbb{N}$ والدليل في $\mathbf{D}^{(1)}$ يدل على قوى المصفوفة , اذن:

$$\mathbf{D}^{(n)} = \left(\mathbf{D}^{(1)} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.1)$$

•c تحليل التقارب

في هذا القسم ، يتم تقديم تحليل الخطأ لطريقتنا. ومن المعروف أن كثيرات حدود لوجندر المعدلة $P_i(x)$ تشكل مجموعة كاملة من $L_2[0, 1]$ متعامدة [33] . نذكر أن $H^m[0, 1]$ هو فضاء سوبوليف لجميع الدوال $u(t)$ على $[0, 1]$ مثل ذلك $u(t)$ وكل مشتقاته من الدرجة m هي في $L_2[0, 1]$ وتعريف $\|\cdot\|_{H^m([0,1])}$ كمايلي: [34]

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{k=0}^m \left\| u^{(k)}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ونصف نظيم يعرف كمايلي:

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)}^2 = \sum_{i=\min(m,N)}^N \left\| u^{(i)}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

نلاحظ أنه كلما كان $N \geq m - 1$ ، لدينا

$$|u|_{H^{m;N}(\Omega)} = \left\| u^{(m)} \right\|_{L^2(\Omega)} = |u|_{H^m(\Omega)}$$

نفرض أن $u_N = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k P_k$ هو تقريب لوجندر للتابع $u \in H^m(\Omega)$, كما ثبت في [33] ، فإن الخطأ هو

$$\|u - u_N\|_{H^{m;N}(\Omega)} \leq CN^{-m} |u|_{H^{m;N}(\Omega)}$$

حيث C هو ثابت موجب حسب m .

2.2.1 كثيرات حدود برنشتاين

إن لكثيرات حدود برنشتاين دور بارز في مختلف فروع الرياضيات. وقد استخدمها العديد من الباحثين في حل المعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية ايضاً، ونظرية التقريب: أنظر ([26, 25, 24, 23]).

1.2.2.1 تعريف وخواص:

تعريف 3 [25]: نعرف كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n على المجال $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$b_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (17.1)$$

و

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

ونعرف كذلك الصيغة العامة لكثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n في المجال $[a,b]$ بالشكل التالي:

$$b_i^n(x) = \binom{n}{i} \frac{1}{(b-a)^n} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \quad (18.1)$$

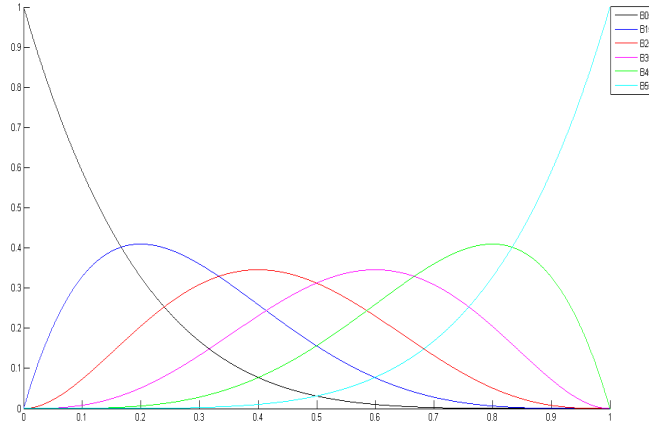
وإذا كان $i < 0$ أو $i > n$ فإن $b_i^n = 0$

كذلك تعريف آخر يمكن استخدامه لإيجاد كثيرات حدود برنشتاين [46]:

$$b_i^n(x) = (1-x)b_i^{n-1}(x) + xb_{i-1}^{n-1}(x) \quad i = 0, \dots, n$$

حيث: $b_n^{n-1}(x) = 0$ و $b_{-1}^{n-1}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 b_0^5(x) &= (1-x)^5 \\
 b_1^5(x) &= 5x(1-x)^4 \\
 b_2^5(x) &= 10x^2(1-x)^3 \\
 b_3^5(x) &= 10x^3(1-x)^2 \\
 b_4^5(x) &= 5x^4(1-x) \\
 b_5^5(x) &= x^5
 \end{aligned}$$



شكل 2.1: كثيرات حدود برنشتاين من أجل $n = 5$.

نتيجة 1 [46]: بتطبيق دستور ثنائي الحد لنيوتن على العبارة $(1-x)^{n-i}$ نجد:

$$b_i^n(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} x^j, \quad i = 0, \dots, n \quad (19.1)$$

ومنه يمكن كتابة $b_i^n(x)$ على الشكل:

$$b_i^n = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{T}_n(x) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

حيث:

$$\mathbf{A}_{i+1} = \left[\overbrace{0, 0, \dots, 0}^i (-1)^0 \binom{n}{i}, (-1)^1 \binom{n}{i} \binom{n-i}{1}, \dots, (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i} \right]$$

$$\mathbf{T}_n(x) = [1, x, \dots, x^n]^T$$

إذا قمنا بتعريف المصفوفة \mathbf{A} ذات الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ كيلي :
والشعاع $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{n+1}]^T$ و $B(x) = [b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)]^T$ ، فاننا نحصل
على الصيغة المصفوفية لشعاع اساس برنشتاين بالشكل التالي:

$$B(x) = \mathbf{A}\mathbf{T}_n(x) \quad (20.1)$$

حيث

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-1)^0 \binom{n}{0} & (-1)^1 \binom{n}{0} \binom{n-0}{1} & \dots & (-1)^{n-0} \binom{n}{0} \binom{n-0}{n-0} \\ 0 & (-1)^0 \binom{n}{1} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^0 \binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \neq 0$ وهذا يعني أن المصفوفة \mathbf{A} قابلة للقلب، ومنه يمكن كتابة:

$$\mathbf{T}_n(x) = \mathbf{A}^{-1}B(x) \quad (21.1)$$

خواص 1 [28]

.1

$$B_{i,n}(1) = \delta_{in}, \quad B_{i,n}(0) = \delta_{i0}$$

.2

$$B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x)$$

.3

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

.4

$$B_{i,n-1}(x) = \left(\frac{n-i}{n}\right) B_{i,n}(x) + \left(\frac{i+1}{n}\right) B_{i+1,n}(x)$$

.5

$$B_{i,n}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

.6

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1$$

.7

$$\frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) = \frac{i - nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x)$$

.8

$$\frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) = n [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)]$$

.9

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) dx = \frac{1}{n+1}$$

.10

$$B_{i,n}(x) B_{j,m}(x) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j,n+m}(x)$$

2.2.2.1 تقريب التابع بكثيرات حدود برنشتاين [27]:

نظرية 2 نفرض ان $H = L^2[0, 1)$ فضاء هيلبرتي مزود بالجداء السلمي $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ والنظيم $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ وليكن $\{b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)\} \subset H$ مجموعة دوال برنشتاين من الدرجة n , وليكن $S_n = \text{Span}\{b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)\}$ و $f(x) \in L^2([0, 1))$ وبما ان S_n فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي ومغلق [27], فانه يوجد احسن تقريب f_n للتابع f في S_n ويكون وحيد اي:

$$\forall z \in S_n, \exists! f_n \in S_n : \|f - f_n\| \leq \|f - z\|$$

وبما ان $f_n \in S_n$ فان:

$$f \simeq f_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i b_i^n(x) = C^T B(x)$$

حيث $B(x)$ اساس برنشتاين, و C^T وهو شعاع معاملات التحليل وفق اساس برنشتاين, تعطى بالشكل التالي:

$$C^T = [C_0, \dots, C_n]$$

$$B(x) = [b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)]^T \quad (22.1)$$

و C^T يمكن الحصول عليها من:

$$C^T \langle B(x), B(x) \rangle = \langle f, B(x) \rangle,$$

حيث :

$$\langle f, B(x) \rangle = \int_0^1 f(x)B(x)^T dx = [\langle f, b_0^n \rangle, \langle f, b_1^n \rangle, \dots, \langle f, b_n^n \rangle],$$

و $\langle B(x), B(x) \rangle$ مصفوفة من البعد $(n+1) \times (n+1)$ ناتجة من الجداء السلمي الثنائي للشعاع $B(x)$ كمايلي :

$$Q = \langle B(x), B(x) \rangle = \int_0^1 B(x)B(x)^T dx,$$

اذن :

$$C^T = \left(\int_0^1 f(x)B(x)^T dx \right) Q^{-1}. \quad (23.1)$$

3.2.2.1 تحليل التقارب [27]:

نظرية 3 : لتكن $f \in C^{(n+1)}[0, 1]$ و $S_n = \text{Span}\{b_0^n(x), b_1^n(x), \dots, b_n^n(x)\}$, اذا كان $C^T B(x)$ هو احسن تقريب للدالة f في S_n فان:

$$\|f - C^T B(x)\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{\gamma}{(n+1)! \sqrt{2n+3}}$$

حيث: $\gamma = \max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)|$

البرهان 1 : لنشر الدالة $f(x)$ حسب سلسلة تايلور كمايلي:

$$f_n(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

لدينا :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_x)| \quad (24.1)$$

حيث: $\xi_x \in [0, 1]$ بما ان $C^T B(x)$ هو احسن تقريب للدالة f في S_n و $f_n \in S_n$, وبستخدم

العلاقة (24.1) فانه:

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - C^T(x)\|_{L^2[0,1]}^2 &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_{L^2[0,1]}^2 \\
 &\leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)^2 |f^{(n+1)}(\zeta_x)|^2 dx \\
 &\leq \frac{|\max f^{n+1}(\zeta_x)|^2}{((n+1)!)^2} \int_0^1 x^{2n+2} dx \\
 &= \frac{\gamma^2}{((n+1)!)^2(2n+3)}
 \end{aligned}$$

اذن:

$$\|f - f_n\| \leq \frac{\gamma}{(n+1)!(\sqrt{2n+3})}$$

3.1 نظرة في المعادلات التفاضلية من رتب كسرية

1.3.1 المعادلات التفاضلية العادية [36, 37]:

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ، كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية حيث ان المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلة الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعا، وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين :

1. إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.
2. إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى. وتكون غير خطية فيما عدا ذلك. وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الأولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى هي خطية، لأن الدرجة تتحدد حسب أس التفاضل الأعلى، ومن الممكن أن تكون التفاضلات

الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الدرجة، وهذا يخجل بشرط المعادلة الخطية. حيث ان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي [35]:

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x) \quad (25.1)$$

حيث المتغير y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد و لا توجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها. والمعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية ام غير خطية و كذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$

2.3.1 المعادلات التفاضلية الكسرية:

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة حيث ان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب تعرف بالشكل التالي [34]:

$$D^\alpha y(x) = \sum_{i=1}^k a_i D^{\beta_i} y(x) + a_{k+1} y(x) + g(x) \quad (26.1)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث $a_j (j = 1, \dots, k+1)$ هي معاملات ثابتة حقيقية وأيضا $n-1 < \alpha \leq n$ و $0 < \beta_1 < \dots < \beta_k < \alpha$ تدل على المشتقات الكسرية لريمان ليوفيل من رتبة α

الفصل الثاني

مصفوفة لوجندر لعملية لتفاضل الكسري

1.2 مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري للوجندر

توطئة 2 [29]: ليكن $P_i(x)$ كثير حدود لوجندر المعدل اذن:

$$D^\alpha P_i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1, \alpha > 0. \quad (1.2)$$

في النظرية التالية نقوم بتعميم مصفوفة العمليات لتفاضل لكثيرات حدود لوجندر المعدلة المعطاة في 15.1 لتفاضل الكسري .

نظرية 4 [29]: ليكن $\Phi(x)$ أساس كثيرات حدود لوجندر المعرفة في (14.1), ونفرض ايضا $\alpha > 0$ اذن :

$$D^\alpha \Phi(x) \simeq \mathbf{D}^{(\alpha)} \Phi(x), \quad (2.2)$$

حيث ان $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري من الصنف $(m+1) \times (m+1)$ بمفهوم كابوتو من الرتبة α ويتم تعريفها على النحو التالي :

$$D^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{k=[\alpha]}^{[\alpha]} \theta_{[\alpha],0,k} & \sum_{k=[\alpha]}^{[\alpha]} \theta_{[\alpha],1,k} & \cdots & \sum_{k=[\alpha]}^{[\alpha]} \theta_{[\alpha],m,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=[\alpha]}^i \theta_{i,0,k} & \sum_{k=[\alpha]}^i \theta_{i,1,k} & \cdots & \sum_{k=[\alpha]}^i \theta_{i,m,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=[\alpha]}^m \theta_{m,0,k} & \sum_{k=[\alpha]}^m \theta_{m,1,k} & \cdots & \sum_{k=[\alpha]}^m \theta_{m,m,k} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

حيث ان $\theta_{i,j,k}$ تعطى بالشكل التالي:

$$\theta_{i,j,k} = (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j+k+l} (i+k)! (l+j)!}{(i-k)! k! \Gamma(k-\alpha+1) (j-l)! (l!)^2 (k+l-\alpha+1)}. \quad (4.2)$$

البرهان 2 [29]: لدينا الشكل التحليلي لكثيرات حدود لوجندر المعدلة العلاقة 6.1 بالاشتقاق الكسري حسب كابوتو وذلك باستخدام المعادلتين 2.1 و 3.1 نحصل على مايلي:

$$D^\alpha P_i(x) = \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!)^2} D^\alpha (x^k), \quad i = [\alpha], \dots, m \quad (5.2)$$

حيث ان $D^\alpha x^k$ حسب كابوتو تكون بالشكل:

$$D^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha} = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$$

اذن تصبح المعادلة 5.2 بالشكل التالي:

$$D^\alpha P_i(x) = \sum_{k=[\alpha]}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}, \quad i = [\alpha], \dots, m \quad (6.2)$$

نقوم الآن بتقريب $x^{k-\alpha}$ ب $(m+1)$ شروط بكثيرات حدود لوجندر المعدلة كمايلي:

$$x^{k-\alpha} \simeq \sum_{j=0}^m b_{k,j} P_j(x), \quad (7.2)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
 b_{k,j} &= (2j+1) \int_0^1 x^{k-\alpha} P_j(x) dx = (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2} \int_0^1 x^{k+l-\alpha} dx \\
 &= (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2 (k+l-\alpha+1)} \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

من خلال توظيف المعادلات 6.2 و 8.2 نحصل على مايلي:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha P_i(x) &\simeq D^\alpha P_i(x) = \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{j=0}^m b_{k,j} P_j(x) \\
 &= \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1)} b_{k,j} P_j(x) \\
 &= \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{i+k} (i+k)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1)} (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j+l} (j+l)!}{(j-l)! (l!)^2 (k+l-\alpha+1)} \\
 &= \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \sum_{j=0}^m (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+k} (i+k)! (-1)^{j+l} (j+l)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1) (j-l)! (l!)^2 (k+l-\alpha+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i (2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+k+j+l} (i+k)! (j+l)!}{(i-k)! (k!) \Gamma(k-\alpha+1) (j-l)! (l!)^2 (k+l-\alpha+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \theta_{i,j,k} \right) P_j(x), \quad i = \lceil \alpha \rceil, \dots, m, \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

حيث $\theta_{i,j,k}$ معطى في المعادلة 4.2 . نكتب المعادلة 9.2 على شكل شعاع كيلي :

$$(10.2)$$

$$D^\alpha P_i(x) \simeq \left[\sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \theta_{i,0,k}, \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \theta_{i,1,k}, \dots, \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \theta_{i,m,k} \right] \Phi(x), \quad i = \lceil \alpha \rceil, \dots, m.$$

ايضا وفقا لتوطئة 2 يمكننا كتابة:

$$D^\alpha P_i(x) = [0, 0, \dots, 0] \Phi(x), \quad i = 0, 1, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1 \quad (11.2)$$

حيث ان مزيج من المعادلتين 10.2 و 11.2 يؤدي الى النتيجة المرجوة

2.2 حل معادلات تفاضلية كسرية خطية [29]:

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الكسرية

$$D^\alpha y(x) = a_1 D^{\beta_1} y(x) + \dots + a_k D^{\beta_k} y(x) + a_{k+1} y(x) + a_{k+2} g(x) \quad (12.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (13.2)$$

حيث $j = 1, \dots, k+2, a_j$ هي معاملات ثابتة حقيقة و ايضا $n < \alpha \leq n+1$, $0 < \beta_1 < \dots < \beta_k < \alpha$ و D^α تدل على المشتقات الكسرية لكابوتو من الرتبة α لحل المعادلة 12.2 و 13.2 نقوم بتقريب $y(x)$ و $g(x)$ بواسطة كثيرات حدود لوجندر المعادلة كمايلي :

$$y(x) \simeq \sum_{i=0}^m c_i P_i(x) = C^T \Phi(x) \quad (14.2)$$

$$g(x) \simeq \sum_{i=0}^m g_i P_i(x) = G^T \Phi(x) \quad (15.2)$$

حيث الشعاع $G = [g_0, \dots, g_m]^T$ معلوم لكن $C = [c_0, \dots, c_m]^T$ شعاع مجهول . باستخدام المعادلتين 2.2 و 14.2 لدينا

$$D^\alpha y(x) \simeq C^T D^\alpha \Phi(x) \simeq C^T \mathbf{D}^{(\alpha)} \Phi(x) \quad (16.2)$$

$$D^{\beta_j} y(x) \simeq C^T D^{\beta_j} \Phi(x) \simeq C^T \mathbf{D}^{(\beta_j)} \Phi(x), \quad j = 1, \dots, k \quad (17.2)$$

باستخدام المعادلتين 14.2 و 17.2 نجد الباقي $R_m(x)$ مع المعادلة 12.2 نستطيع كتابتها بالشكل التالي :

$$R_m(x) \simeq \left(C^T \mathbf{D}^{(\alpha)} - C^T \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{D}^{(\beta_j)} - a_{k+1} C^T - a_{k+2} G^T \right) \Phi(x) \quad (18.2)$$

كما هو الحال في طريقة τ النموذجية (انظر [42]) فاننا نقوم باشاء معادلات خطية $m - n$ من خلال تطبيق

$$\langle R_m(x), P_j(x) \rangle = \int_0^1 R_m(x) P_j(x) dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - n - 1 \quad (19.2)$$

ايضا, عن طريق تعويض المعادلتين 16.1 و 14.2 بالمعادلة 13.2 نحصل على

$$\begin{aligned} y(0) &= C^T \Phi(0) = d_0, \\ y^{(1)}(0) &= C^T \mathbf{D}^{(1)} \Phi(0) = d_1, \\ &\vdots \\ y^{(n)}(0) &= C^T \mathbf{D}^{(n)} \Phi(0) = d_n. \end{aligned} \quad (20.2)$$

3.2 حل معادلات تفاضلية كسرية غير خطية [29]:

نعتبر المعادلة التفاضلية الغير الخطية ذات الرتبة الكسرية

$$D^\alpha y(x) = F(x, y(x), D^{\beta_1} y(x), \dots, D^{\beta_k} y(x)), \quad (21.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (22.2)$$

حيث $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \alpha$, $n < \alpha \leq n + 1$ تدل على المشتقات الكسرية لكابوتو من الرتبة α . (تجدر الاشارة الى ان F يمكن ان يكون غير خطي بشكل عام) نقوم بتقريب $y(x)$ و $D^\alpha y(x)$ و $D^{\beta_j} y(x)$ مع $j = 0, \dots, k$ وفق اساس لوجندر المعدل كالمعادلات 14.2, 16.2 و 17.2 على التوالي. عن طريق تعويض هذه المعادلات في المعادلة 21.2 نحصل على

$$C^T \mathbf{D}^{(\alpha)} \Phi(x) \simeq F \left(x, C^T \Phi(x), C^T \mathbf{D}^{(\beta_1)} \Phi(x), \dots, C^T \mathbf{D}^{(\beta_k)} \Phi(x) \right) \quad (23.2)$$

أيضا، بتعويض المعادلتين 16.1 و 14.2 في المعادلة 22.2 نحصل على:

$$\begin{aligned} y(0) &= C^T \Phi(0) = d_0 \\ y^{(i)}(0) &= C^T \mathbf{D}^{(i)} \Phi(0) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (24.2)$$

الآن، من خلال حل هذه المجموعة من المعادلات الغير خطية وتحديد معامل غير معروف C يمكن حساب $y(x)$ كما في المعادلة 14.2

4.2 أمثلة عددية [29]:

في ما يلي نتائج عددية لبعض الأمثلة التي تثبت دقة وتقارب الطريقة المقترحة, اذن لإعطاء نظرة عامة واضحة على هذه الطرق نقدم بعض الأمثلة التوضيحية

مثال 3 كمثال اول, فاننا نعتبر المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية في حالة معادلة *Bagley-Torvik* الغير متجانسة [40]

$$D^2y(x) + D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 1 + x$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

والحل الحقيقي لهذه المعادلة هو $y(x) = 1 + x$, من خلال تطبيق الطريقة الموضحة في القسم الفرعي 2.2 مع $m = 2$ نكتب الحل التقريبي كالتالي:

$$y(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) = C^T\Phi(x)$$

لدينا هنا:

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(\frac{3}{2})} = \left(\frac{16}{\sqrt{\pi}}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

وباستخدام المعادلة 12.2 نحصل على:

$$c_0 + \left(12 + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\right)c_2 - \frac{3}{2} = 0 \quad (25.2)$$

الآن, من خلال تطبيق المعادلة 20.2 لدينا:

$$c_0 - c_1 + c_2 - 1 = 0 \quad (26.2)$$

$$2c_1 - 6c_2 - 1 = 0 \quad (27.2)$$

أخيرا, من خلال حل المعادلات 25.2 - 27.2 نحصل على:

$$c_0 = \frac{3}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 0$$

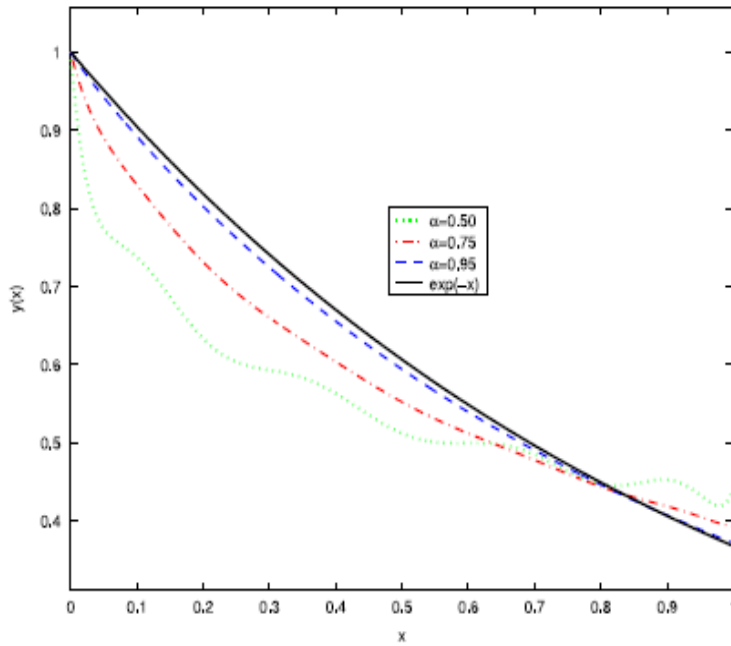
وبالتالي يمكننا كتابة:

$$y(x) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2x - 1 \\ 6x^2 - 6x + 1 \end{pmatrix} = 1 + x$$

وهو الحل بالضبط

$m = 8$	$m = 5$	$m = 2$	x
8.0×10^{-4}	2.0×10^{-3}	2.6×10^{-2}	0.1
1.2×10^{-3}	3.0×10^{-3}	2.0×10^{-2}	0.2
6.6×10^{-4}	6.2×10^{-4}	8.2×10^{-3}	0.3
8.0×10^{-4}	2.9×10^{-3}	4.8×10^{-3}	0.4
7.5×10^{-4}	2.0×10^{-3}	1.5×10^{-2}	0.5
5.9×10^{-4}	7.2×10^{-4}	2.2×10^{-2}	0.6
7.6×10^{-4}	2.5×10^{-3}	2.4×10^{-2}	0.7
1.8×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.9×10^{-2}	0.8
6.2×10^{-4}	1.5×10^{-3}	8.3×10^{-3}	0.9
1.5×10^{-4}	5.5×10^{-4}	1.1×10^{-2}	1.0

جدول 1.2: انخطأ المطلق من اجل $\alpha = 0.85$ وقيم مختلفة ل m بالنسبة للمثال 2



شكل 1.2: مقارنة بين $y(x)$ من اجل $m = 10$ ومع $\alpha = 0.5, 0.75, 0.95, 1$ بالنسبة للمثال 2

مثال 4 نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية ذات الشروط الابتدائية كمايلي [38, 39]:

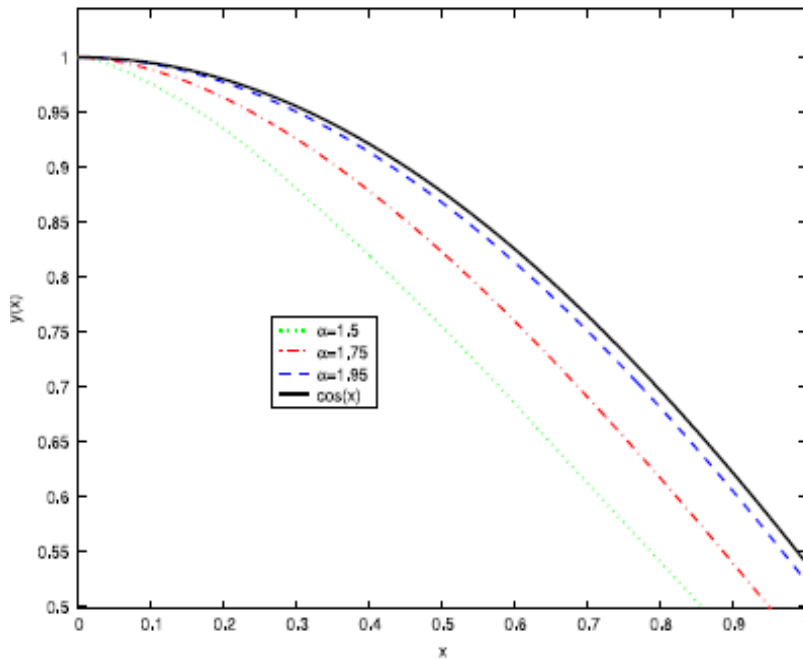
$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0, \quad 0 < \alpha < 2$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

الشرط الابتدائي الثاني من اجل $\alpha > 1$ فقط . الحل الحقيقي لهذه المعادلة هو على النحو التالي [43]:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

من خلال تطبيق التقنية الموضحة في القسم الفرعي 2.2 وحل هذه المعادلة ، يظهر الخطأ المطلق لعدد $\alpha = 0.85$ و $m = 2.5$ و 8 و تظهر في الجدول 1.2 . من الجدول 1.2 ، نرى أنه يمكن تحقيق حل تقريبي جيد من خلال أخذ عدد قليل من شروط كثيرات حدود لوجندر المعدلة . ايضا النتائج العددية ل $y(x)$ مع $m = 10$ و $\alpha = 0.5; 0.75; 0.95$ و 1 تم رسمها في الشكل 1.2 . من اجل $\alpha = 1$ ، يعطى الحل الحقيقي بالشكل التالي $y(x) = \exp(-x)$. لاحظ أنه لما α تقترب من 1 ، تتقارب الحلول العددية بجوار الحلول التحليلية $y(x) = \exp(-x)$. اي ، يتقارب حل المعادلات التفاضلية الكسرية إلى حل المعادلات التفاضلية العادية . الان نقدم نتائج من اجل $\alpha > 1$. الشكل 2.2 يظهر النتائج العددية ل $y(x)$ لما $m = 10$ و $\alpha = 1.5; 1.75; 1.95$ و 2 . من اجل $\alpha = 2$ ، يعطى الحل الحقيقي بالشكل التالي $y(x) = \cos(x)$. من جهة اخرى ، من الشكل 2.2 ، نرى أنه عندما تقترب α الى 2 ، يتقارب الحل العددي بجوار حل المعادلة التفاضلية العادية. الخطأ المطلق من اجل قيم مختلفة ل α و $m = 10$ وتظهر في الجدول 2.2 . من الجدول 2.2 ، نرى انه عندما تقترب α الى قيمة صحيحة يقل الخطأ ، كما هو متوقع .



شكل 2.2: مقارنة بين $y(x)$ من اجل $m = 10$ ومع $\alpha = 1.5; 1.75; 1.95; 2$ بالنسبة للبتال 2

$x = 0.9$	$x = 0.7$	$x = 0.5$	$x = 0.3$	$x = 0.1$	α
2.0×10^{-1}	3.7×10^{-1}	7.4×10^{-1}	4.5×10^{-1}	2.9×10^{-1}	0.2
2.2×10^{-1}	3.3×10^{-1}	7.3×10^{-1}	5.1×10^{-1}	3.9×10^{-1}	0.4
4.6×10^{-3}	4.4×10^{-3}	5.2×10^{-3}	2.0×10^{-5}	6.7×10^{-3}	0.6
5.8×10^{-4}	8.7×10^{-4}	8.4×10^{-4}	2.1×10^{-4}	1.1×10^{-3}	0.8
1.8×10^{-3}	3.6×10^{-3}	4.5×10^{-3}	2.8×10^{-3}	3.1×10^{-3}	1.2
2.4×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.3×10^{-3}	7.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.4
6.2×10^{-7}	3.0×10^{-4}	3.1×10^{-4}	1.3×10^{-4}	3.0×10^{-4}	1.6
8.8×10^{-6}	5.3×10^{-5}	4.9×10^{-5}	1.4×10^{-5}	6.1×10^{-5}	1.8

جدول 2.2: انخطأ المطلق من اجل قيم مختلفة ل α مع $m = 10$ بالنسبة للمثال 2

الفصل الثالث

مصفوفة برنشتاين لعملية لتفاضل الكسري

1.3 مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري لبرنشتاين [46]:

في هذا الجزء نقوم بتعريف مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري لكثيرات حدود برنشتاين وهي كالتالي

نظرية 5 : ليكن $B(x)$ شعاع برنشتاين المعرف في 2.1، ونفرض أيضا $\alpha > 0$ اذن:

$$D^\alpha B(x) \simeq \mathbf{D}^{(\alpha)} B(x), \quad (1.3)$$

حيث ان $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري من الصنف $(n+1) \times (n+1)$ بمفهوم كاييتو من الرتبة α ويتم تعريفها على النحو التالي :

$$\mathbf{D}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{0,j,0} & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{0,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{0,j,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{i,j,0} & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{i,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{i,j,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{n,j,0} & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{n,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n \omega_{n,j,n} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

حيث ان $\omega_{i,j,\ell}$ تعطى بالشكل التالي:

$$\omega_{i,j,\ell} = (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \mu_{kj} \quad (3.3)$$

ايضا μ_{kj} تعطى كمايلي :

$$\mu_{kj} = \sum_{s=k}^n (-1)^{s-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} \frac{1}{j-\alpha+s+1}$$

و

(4.3)

$$\lambda_{jk} = \frac{(-1)^{j+k}}{\binom{n}{j} \binom{n}{k}} \sum_{i=0}^{\min(j,k)} (2i+1) \binom{n+i+1}{n-j} \binom{n-i}{n-j} \binom{n+i+1}{n-k} \binom{n-i}{n-k}$$

البرهان 3 :

لدينا الشكل التحليلي لكثيرات حدود برنشتاين العلاقة 19.1 بالاشتقاق الكسري حسب كابوتو وذلك باستخدام المعادلتين 2.1 و 3.1 نحصل على مايلي :

$$D^\alpha b_i^n(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n-i}{j-i} D^\alpha (x^j), \quad i = 0, \dots, n \quad (5.3)$$

حيث $D^\alpha x^j$ حسب كابوتو تكون بالشكل :

$$D^\alpha x^j = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} x^{j-\alpha}$$

اذن تصبح المعادلة 5.3 بالشكل التالي :

$$D^\alpha b_i^n(x) = \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} x^{j-\alpha} \quad (6.3)$$

الآن, نقوم بتقريب $x^{j-\alpha}$ بكثيرات حدود برنشتاين نحصل على :

$$x^{j-\alpha} \simeq \sum_{\ell=0}^n u_{\ell j} b_\ell^n(x) \quad (7.3)$$

حيث :

$$\begin{aligned}
 u_{\ell,j} &= \int_0^1 x^{j-\alpha} d_{\ell}^n(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \int_0^1 x^{j-\alpha} b_k^n(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \sum_{s=k}^n (-1)^{s-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} \int_0^1 x^{j-\alpha+s} dx \\
 &= \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \sum_{s=k}^n (-1)^{s-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} \frac{1}{(j-\alpha+s+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \mu_{kj}.
 \end{aligned}$$

و

$$d_j^n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{jk} b_k^n(x), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

من خلال توظيف المعادلات 6.3 و 7.3 نحصل على مايلي:

$$\begin{aligned}
 D^{\alpha} b_i^n(x) &\simeq \sum_{j=[\alpha]}^n \sum_{\ell=0}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} u_{\ell,j} b_{\ell}^n(x) \\
 &= \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{j=[\alpha]}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \lambda_{\ell k} \mu_{kj} \right) b_{\ell}^n(x) \\
 &= \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{j=[\alpha]}^n \omega_{i,j,\ell} \right) b_{\ell}^n(x) \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

حيث $\omega_{i,j,\ell}$ معطى في المعادلة (3.3). نكتب المعادلة 8.3 على شكل شعاع كمايلي :

(9.3)

$$D^{\alpha} b_i^n(x) \simeq \left[\sum_{j=[\alpha]}^n \omega_{ij,0}, \sum_{j=[\alpha]}^n \omega_{ij,1}, \dots, \sum_{j=[\alpha]}^n \omega_{ij,n} \right] B(x), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

هذا يؤدي الى النتيجة المرجوة

2.3 حل معادلات تفاضلية من رتب كسرية [46]:

في هذا الجزء , من اجل اظهار الاهمية الضرورية لمصفوفة العمليات لتفاضل الكسري لبرنشتاين , نطبقها لحل المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الكسرية

$$F(x, y(x), D^{\beta_1}y(x), \dots, D^{\beta_k}y(x)) = 0 \quad (10.3)$$

مع الشروط الحدية

$$H_i(y(\xi_i), y'(\xi_i), \dots, y^{(p)}(\xi_i)) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (11.3)$$

حيث $0 \leq p < \max\{\beta_i, i = 1, \dots, k\} \leq p + 1, \xi_i \in [0, 1], i = 0, \dots, p$ هي مجموعات خطية من $y(\xi_i), y'(\xi_i), \dots, y^{(p)}(\xi_i)$ و $y(x) \in L^2[0, 1]$. تجدر الاشارة الى ان F يمكن ان يكون غير خطي في الحالة العامة .
من اجل استخدام كثيرات حدود برنشتاين لحل هذه المعادلة , نقوم بتقريب $y(x)$ بواسطة كثيرات حدود برنشتاين كمايلي :

$$y(x) \simeq \sum_{i=0}^n c_i b_i^n(x) = C^T B(x) \quad (12.3)$$

حيث الشعاع $C = [c_0, \dots, c_n]^T$ هو شعاع غير معلوم . باستعمال المعادلتين 1.3 و 12.3 نحصل على :

$$D^{\beta_j}y(x) \simeq C^T D^{\beta_j} B(x) \simeq C^T \mathbf{D}^{(\beta_j)} B(x), \quad j = 1, \dots, k \quad (13.3)$$

بالتعويض في المعادلة 10.3 نحصل على :

$$F(x, C^T B(x), C^T \mathbf{D}^{(\beta_1)} B(x), \dots, C^T \mathbf{D}^{(\beta_k)} B(x)) = 0 \quad (14.3)$$

وبالمثل ,بتعويض المعادلة 12.3 في المعادلة 11.3 نحصل على :

$$H_i(C^T B(\xi_i), C^T \mathbf{D}^{(1)} B(\xi_i), \dots, C^T \mathbf{D}^{(p)} B(\xi_i)) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (15.3)$$

لايجاد الحل $y(x)$, نقوم اولا بتجميع المعادلة 14.3 في عدة عقد عددها $(n-p)$. للحصول على عقد التجميع المناسبة نستخدم (جذور كثيرات حدود تشيببتييف) :

$$x_i = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) + 1\right), \quad i = 1, \dots, n-p$$

تولد هذه المعادلة مع المعادلة 15.3 معادلات جبرية $(n+1)$ يمكن حلها لايجاد $c_i, i = 0, \dots, n$ وبالتالي يمكن حساب الدالة المجهولة $y(x)$ الواردة في المعادلة 12.3 .

3.3 امثلة عددية [46]:

في هذا القسم, يتم تقديم امثلة توضيحية مع مقارنة الحل العددي للمعادلات التفاضلية الكسرية التي تم الحصول عليها باستخدام كثيرات حدود برنشتاين مع الحل التحليلي, من أجل توضيح كفاءة و بساطة الطريقة المقترحة .

مثال 5 : نعتبر المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية في حالة معادلة Bagley-Torvik الغير متجانسة

$$D^2y(x) + D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 1 + x, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

من خلال تطبيق الطريقة الموضحة في القسم الفرعي 2.3 مع $m = 2$ نكتب الحل التقريبي كالتالي:

$$y(x) \simeq c_0b_0^2(x) + c_1b_1^2(x) + c_2b_2^2(x) = C^T B(x)$$

لدينا هنا :

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{(\frac{3}{2})} = \left(\frac{8}{35\sqrt{\pi}} \right) \begin{pmatrix} 3 & 15 & 17 \\ -6 & -30 & -34 \\ 3 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

عن طريق تجميع المعادلة (14.3) في العقدة $x_1 = \frac{1}{2}$ نحصل من خلالها على :

$$\frac{9}{4}(c_0 + c_2) - \frac{7}{2}c_1 + \left(\frac{20}{7\sqrt{\pi}} \right) (c_0 - 2c_1 + c_2) - \frac{3}{2} = 0 \quad (16.3)$$

الان, من خلال تطبيق المعادلة (15.3) لدينا

$$c_0 - 1 = 0 \quad (17.3)$$

$$-2c_0 + 2c_1 - 1 = 0 \quad (18.3)$$

أخيرا, من خلال حل المعادلات (16.3)-(18.3) نحصل على :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2$$

وبالتالي يمكننا كتابة :

$$y(x) = \left(1, \frac{3}{2}, 2 \right) \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} = 1 + x$$

وهو الحل بالضبط

مثال 6 نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية ذات الشروط الحدية التالية :

$$4(x+1)D^{\frac{5}{2}}y(x) + 4D^{\frac{3}{2}}y(x) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}y(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\pi}$$

$$y(0) = \sqrt{\pi}, y'(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, y(1) = \sqrt{2\pi}$$

الحل الحقيقي لهذه المعادلة هو $y(x) = \sqrt{\pi(x+1)}$ و L_2 و L_∞ الاخطاء المتحصل عليها في الجدول 1.3 من خلال تطبيق التقنية الموضحة في القسم الفرعي 2.3 ومن اجل قيم مختلفة ل n . ايضا في الجدول 1.3 تتم مقارنة بين الطريقة المقترحة والطريقة القائمة على الدوال الخطية $B-spline$ الواردة في [41] . تتطلب الطريقة [41] حل انظمة كبيرة الى حد ما من المعادلات الجبرية للحصول على دقة ترتيب مماثل في الواقع , في الطريقة المقترحة نحصل على $(n+1)$ معادلات جبرية بينما تتطلب الطريقة [41] $(2^j + 1)$ معادلات جبرية تزيد من الوقت الحسابي .

L_2error	L_\inftyerror	الطرق
		الطريقة [41]
1.2×10^{-3}	2.5×10^{-3}	$J = 5$
1.2×10^{-4}	2.5×10^{-4}	$J = 7$
4.2×10^{-5}	7.8×10^{-5}	$J = 8$
		الطريقة المقترحة
6.5×10^{-4}	1.5×10^{-3}	$n = 3$
6.1×10^{-6}	1.6×10^{-5}	$n = 6$
9.7×10^{-7}	1.4×10^{-6}	$n = 12$
4.6×10^{-7}	6.7×10^{-7}	$n = 15$

جدول 1.3: نتائج من 6

خاتمة

إن روعة البيان وسحر الكلام ليعجزان عن التعبير في هذا المجال، لأن الكثير تحدث فيه وتطوقته الكثير من الأقلام أكثر من مرة وما نحن إلا قطرة في البحر نحاول بلاغة القول وسحر الأداء وروعة البيان. نتحدث في هذا المجال، الذي هو تقديم اشكال جديدة من مصفوفات العمليات لتفاضل الكسري لكل من كثيري حدود لوجندر و برنشتاين. وقد تم استخدام هذه المصفوفات لتقريب الحل العددي للمعادلات التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب .

النتائج العددية ايجابية مقارنة مع الحلول التحليلية , كذلك بمقارنة طريقتنا بطرق اخرى كطريقة tau , وطريقة التجميع للوجندر المعدل وكذلك بمقارنة طريقتنا مع طريقة التجميع لبرنشتاين تعطى نفس النتائج او افضل .

ايضا، لما تتقارب α من قيمة صحيحة يتقارب حل المعادلات التفاضلية الكسرية الى حل المعادلات التفاضلية العادية وهذا بالنسبة لكثيرات حدود لوجندر المعدل يوضح الحل الذي تم الحصول عليه باستخدام الطريقة المقترحة ان هذا النهج يمكن ان يحل المسألة بفعالية. علاوة على ذلك، المزايا الرئيسية للطريقة المقترحة قد تم تحقيق حلول عالية الدقة وسهولة التنفيذ من قبل عدد قليل من كثيرات حدود لوجندر المعدل كذلك قد تم تحقيق حلول عالية الدقة وسهولة التنفيذ من قبل عدد قليل من كثيرات حدود برنشتاين، ولكننا لم نوفي الموضوع حقه وفي الأخير كانت مذكرتنا عبارة عن رحلة جاهدة للإرتقاء بدرجات العقل ومعارج الأفكار ولا ندعي فيه الكمال ولكن عذرنا أننا بذلنا فيه قصارى جهدنا. فإن أصبنا فمن الله تعالى وان اخطانا فذلك من انفسنا والشيطان فلنا شرف المحاولة والتعلم .

المراجع العلمية

- [1] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.
- [2] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.
- [3] S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, New York, 2008.
- [4] J.H. He, Nonlinear oscillation with fractional derivative and its applications, in: International Conference on Vibrating Engineering'98, Dalian, China, 1998, pp. 288-291.
- [5] J.H. He, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, Bull. Sci. Technol. 15 (2) (1999) 86-90.
- [6] F. Mainardi, Fractional calculus: 'Some basic problems in continuum and statistical mechanics', in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Verlag, New York, 1997, pp. 291-348.
- [7] B. Mandelbrot, Some noises with $1/f$ spectrum, a bridge between direct current and white noise, IEEE Trans. Inform. Theory 13 (2) (1967) 289-298.
- [8] Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, Appl. Mech. Rev. 50 (1997) 15-67.

-
- [9] R.T. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics, *J. Econometrics* 73 (1996) 5-59.
- [10] R.L. Magin, Fractional calculus in bioengineering, *Crit. Rev. Biomed. Eng.* 32 (1) (2004) 1-104.
- [11] R.L. Magin, Fractional calculus in bioengineering-part 3, *Crit. Rev. Biomed. Eng.* 32 (3/4) (2004) 194-377.
- [12] T.S. Chow, Fractional dynamics of interfaces between soft-nanoparticles and rough substrates, *Phys. Lett. A* 342 (2005) 148-155.
- [13] S. Momani, N.T. Shawagfeh, Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations, *Appl. Math. Comput.* 182 (2006) 1083-1092.
- [14] Q. Wang, Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 182 (2006) 1048-1055.
- [15] S. Momani, Z. Odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Phys. Lett. A* 365 (2007) 345-350.
- [16] N.H. Sweilam, M.M. Khader, R.F. Al-Bar, Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, *Phys. Lett. A* 371 (2007) 26-33.
- [17] I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 674-684.
- [18] E.A. Rawashdeh, Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method, *Appl. Math. Comput.* 176 (2006) 1-6.
- [19] V.J. Ervin, J.P. Roop, Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 22 (2005) 558-576.
-



-
- [20] P. Kumar, O.P. Agrawal, An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, *Signal Processing* 86 (2006) 2602-2610.
- [21] S.B. Yuste, Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations, *J. Comput. Phys.* 216 (2006) 264-274.
- [22] Shantanu Das ,*Functional Fractional Calculus* ,DOI 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [23] S. A. Yousefi, Z. Barikbin, and M. Dehghan, Ritz-Galerkin method with Bernstein polynomial basis for finding the product solution form of heat equation with non-classic boundary conditions, *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, vol. 22, no. 1, pp. 39–48, 2012.
- [24] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and B. Basirat, Computational method based on Bernstein operational matrices for nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 1, pp. 52–61, 2012.
- [25] G. Tachev, Pointwise approximation by Bernstein polynomials, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 85, no. 3, pp. 353–358, 2012.
- [26] Y. Ordokhani and S. Davaei far, Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, vol. 1, no. 2, pp. 13–31, 2011.
- [27] S.A. Yousefi, M. Behroozifar, Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications, *Int. J. Syst. Sci.* 41 (2010) 709–716.
- [28] Sandeep Dixit, Rajesh K. Pandey, Sunil Kumar, On P. Singh, Solution of the generalized Abel integral equation by using almost Bernstein operational matrix, *American Journal of Computational Mathematics*, 2011, 1, 226-234.
-



-
- [29] Abbas Saadatmandi, Mehdi Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *Computers Mathematics with Applications*, Volume 59, Issue 3, February 2010, Pages 1326-1336.
- [30] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" *Iranian Journal of Science Technology, IJST* (2013) 37A4: 439-444.
- [31] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1989.
- [32] Y.M.Chen, M.X.Yi, and C.X.Yu, Error analysis for numerical solution of fractional differential equations using wavelet method, *J. Comput. Sci.* 5(3) (2012), pp. 367–373.
- [33] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. Zang, T. A. (1988). *Spectral Methods in Fluid Dynamic*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- [34] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" *Iranian Journal of Science Technology, IJST* (2013) 37A4: 439-444.
- [35] Lions, Jacques Louis. *Optimal control of systems governed by partial differential equations (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften)*. Vol. 170. Berlin: Springer, .1971
- [36] Pierre Grisvard , *calcul Differential of Equations Differential* ,office des publications universitaires, 2 eme Edition ,Alger ,1980.
- [37] Ross, *Introduction of Ordinary Differential Equations*, 1989.
- [38] I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 674-684.
- [39] P. Kumar, O.P. Agrawal, An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, *Signal Processing* 86 (2006) 2602-2610.



-
- [40] K. Diethelm, N.J. Ford, Numerical solution of the Bagley-Torvik equation, BIT 42 (2002) 490-507.
- [41] M. Lakestani, M. Dehghan, S. Irandoust-pakchin, The construction of operational matrix of fractional derivatives using B-spline functions, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 17 (2012) 1149–1162.
- [42] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamic, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [43] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equation, Nonlinear Dyn. 29 (2002) 3-22.
- [44] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications. of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science Amsterdam.
- [45] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. New York, Academic Press.
- [46] Abbas Saadatmandi, Bernstein operational matrix of fractional derivatives and its applications, Applied Mathematical Modelling, Volume 38, Issue 4, 15 February 2014, Pages 1365-1372
- [47] Guermit Djamila. Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, théorie et applications

المخلص:

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم أشكال من مصفوفات العمليات (لتفاضل والتكامل) لكل من كثيري حدود لوجندر وبرنشتاين والتي تظهر في الطرائق العددية لمعالجة وإيجاد الحل التقريبي لبعض مسائل المعادلات التفاضلية من رتب كسرية الحديثة الدراسة، أدت تلك المصفوفات إلى تحويل المسائل إلى جمل معادلات جبرية أعطت لنا إمكانية البرمجة وسهولة الحل .

الكلمات المفتاحية:

مصفوفات العمليات لتفاضل الكسري، المعادلات التفاضلية الكسرية، كثيرات حدود لوجندر وبرنشتاين.

Abstract :

The main aim of this work is to introduce forms of operations matrices (for differentiation and integration) of the many borders of Legendre and Bernstein, which appear in numerical methods to address and find an approximate solution to some of the problems of differential equations from the fractions of modern study. Algebraic equations gave us the possibility of programming and ease of solution.

Key words: operational matrix of fractional derivative, Fractional differential equations, Legendre and Bernstein polynomials

Résumé :

L'objectif principal de ce travail est d'introduire formes de matrices d'opérations (pour la différenciation et l'intégration) des nombreuses frontières de Legendre et de Bernstein, qui apparaissent sous forme de méthodes numériques pour résoudre et résoudre de façon approximative certains problèmes d'équations différentielles à partir de fractions d'études modernes. Les équations algébriques nous ont donné la possibilité de programmation et la facilité de solution.

Mots-clés: matrice opérationnelle de dérivé fractionnaire, équation différentielles fractionnaires, polynômes de Legendre et Bernstein .