مصفوفة التفاضل الكسري في معالجة المعادلات التفاضلية من رتب كسرية

رميصاء عليات

تحت إشراف الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات - كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

roumaissaaliat@gmail.com

الملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم أشكال من مصفوفات العمليات (لتفاضل والتكامل) لكل من كثيري حدود لوجندر و برنشطاين والتي تظهر في الطرائق العددية لمعالجة وإيجاد الحل التقريبي لبعض مسائل المعادلات التفاضلية من رتب كسرية الحديثة الدراسة، أدت تلك المصفوفات إلى تحويل المسائل إلى جمل معادلات جبرية أعطت لنا إمكانية البرمجة وسهولة الحل .

مقدمة

ان بعض المعادلات التفاضلية من رتب كسرية لا تتوفر لنا طريقة لحساب الحل الصريح إلا في حالات معينة و تحت شروط مثالية أحيانا . لذا نلجأ إلى البحث عن الحل التقريبي رغم علمنا من الناحية النظرية أن المسالة تتمتع بحل وحيد

1. كثيرات حدود لوجندر

تعرف كثيرات حدود لوجندر المعدلةعلى المجال $[0,1]$ بالشكل التالي :

$$P_{i+1}(x)=\frac{(2i+1)(2x-1)}{(i+1)}P_i(x)-\frac{i}{i+1}P_{i-1}(x),\qquad i=1,2,\ldots, \tag{1}$$

حيث ان $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=2x-1$.
ان كثيرات حدود لوجندر من كثيرات الحدود المتعامدة وشرط التعامد بالنسبة لتابع الوزن $u^{0,0}(x)=1$ محقق اي:

$$\int_0^1 P_i(x)P_j(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2i+1} & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases} \tag{2}$$

2. تقريب التابع وفق اساس كثيرات حدود لوجندر

ليكن التابع $Y(x)\in L^2[0,1]$, فان تقريبه وفق اساس كثيرات حدود لوجندر المعدلة يعطى بالشكل التالي:

$$Y(x)=\sum_{j=0}^{m}c_jP_j(x)=c^T\Phi(x) \tag{3}$$

حيث ان المعاملات c_j تكتب بالشكل التالي :

$$c_j=(2j+1)\int_0^1 Y(x)P_j(x)dx,\qquad j=1,2,\cdots \tag{4}$$

حيث ان c يسمى معامل اساس لوجندر المعدل و $\Phi(x)$ اساس لوجندر المعدل ،تعطى على الشكل التالي:

$$c^T=[c_0,\cdots,c_m]$$

$$\Phi(x)=[P_0(x),P_1(x),\cdots,P_m(x)]^T. \tag{5}$$

3. مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري للوجندر

ليكن $\Phi(x)$ أساس كثيرات حدود لوجندر المعرفة في (5),ونفرض ايضا $\alpha>0$ إذن :

$$D^{\alpha}\Phi(x)\simeq \mathbf{D}^{(\alpha)}\Phi(x), \tag{6}$$

حيث ان $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ من الصنف $(m+1)\times(m+1)$ هي مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري بمفهوم كابوتو من الرتبة α ويتم تعريفها على النحو التالي :

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil}\theta_{\lceil\alpha\rceil,0,k} & \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil}\theta_{\lceil\alpha\rceil,1,k} & \cdots & \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{\lceil\alpha\rceil}\theta_{\lceil\alpha\rceil,m,k}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{i,0,k} & \sum k=\lceil\alpha\rceil^{i}\theta_{i,1,k} & \cdots & \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{i}\theta_{i,m,k}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m}\theta_{m,0,k} & \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m}\theta_{m,1,k} & \cdots & \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{m}\theta_{m,m,k}\end{pmatrix}$$

حيث ان $\theta_{i,j,k}$ تعطى بالشكل التالي:
(7)

$$\theta_{i,j,k}=(2j+1)\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{i+j+k+l}(i+k)!(l+j)!}{(i-k)!k!\Gamma(k-\alpha+1)(j-l)!(l!)^2(k+l-\alpha+1)}.$$

4. كثيرات حدود برنشطاين

نعرف كثيرات حدود برنشطاين من الدرجة n المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$b_i^n(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\qquad i=0,\ldots,n \tag{8}$$

ان مجوعة $b_i^n(x)_{i=0}^n$ كثيرات حدود برنشطاين في الفراغ الهلبرتي $L^2[0,1]$ تشكل اساسا تام يعطى بالشكل التالي :

$$B(x)=[b_0^n(x),b_1^n(x),\cdots,b_n^n(x)]^T \tag{9}$$

فاننا نحصل على الصيغة المصفوفية لشعاع اساس برنشطاين كمايلي :

$$B(x)=AT_n(x)$$

حيث انا A المصفوفة ذات الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ معرفة كمايلي : $A=[A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}]^T$

5. تقريب التابع وفق اساس كثيرات حدود برنشطاين

لتكن الدالة $f(x)\in L^2[0,1]$ نقوم بتقريبها بكثيرات حدود برنشطاين على النحو التالي :

$$f(x)\simeq\sum_{i=0}^{n}C_ib_i^n(x)=C^TB(x) \tag{10}$$

حيث : $C^T=[c_0,\cdots,c_n]$, وهو شعاع معاملات التحليل وفق اساس برنشطاين يمكن تعيين C من خلال الصيغة التالية :

$$C=Q^{-1}\langle f(x),B(x)\rangle$$

حيث Q مصفوفة من البعد $(n+1)\times(n+1)$ ناتجة من الجداء السلمي الثنائي للشعاع $B(x)$ كمايلي:

$$Q=\langle B(x),B(x)\rangle=\int_0^1 B(x)B^T(x)dx=A\int_0^1 T_n(x)T_n(x)^TdxA^T$$
$$=AHA^T$$

حيث A و H مصفوفتين معرفتين بصيغ معطاة سابقا

6. مصفوفة العمليات لتفاضل الكسري لبرنشطاين

ليكن $B(x)$ شعاع برنشطاين المعرف في (10), ونفرض ايضا $\alpha>0$ اذن:

$$D^{\alpha}B(x)\simeq\mathbf{D}^{(\alpha)}B(x), \tag{11}$$

حيث ان $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ من الصنف $(n+1)\times(n+1)$ هي مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري بمفهوم كابوتو من الرتبة α و يتم تعريفها على النحو التالي :

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}=\begin{pmatrix}\sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{0,j,0} & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{0,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{0,j,n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,0} & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{n,j,0} & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{n,j,1} & \cdots & \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{n,j,n}\end{pmatrix}$$

حيث ان $\omega_{i,j,l}$ تعطى بالشكل التالي:
(12)

$$\omega_{i,j,l}=(-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{lk}\mu_{kj},$$

حيث:

$$\mu_{kj}=\sum_{s=k}^{n}(-1)^{s-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}\frac{1}{j-\alpha+s+1}$$

7. تطبيق عددي

الهدف من هذه المرحلة هو كيفية تطبيق مصفوفات العمليات للتفاضل الكسري من اجل الحل العددي لمعادلات تفاضلية كسرية خطية و غير الخطية و للتحقق من فاعلية هذه المصفوفات نقدم مجموعة من الأمثلة العددية تؤكد الأداء الجيد للطريقة المعروضة.

المراجع

[1] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, “The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials” Iranian Journal of Science Technology,IJST (2013) 37A4: 439-444.

[2] Abbas Saadatmandi,Bernstein operational matrix of fractional derivatives and its applications,Applied Mathematical Modelling, Volume 38, Issue 4, 15 February 2014, Pages 1365-1372

[3] Abbas Saadatmandi, Mehdi Dehghan,A new operational matrix for solving fractional-order differential equations,Computers Mathematics with Applications, Volume 59, Issue 3, February 2010, Pages 1326-1336