UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
N° de série

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par : Faiza Benslimane

Théme

Distance entre deux semigroupes dans une algèbre de Banach

Soutenu publiquement le :09 /07/2019

Devant le jury composé de :

Mr.Boussaid Mohamed	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Guerboussa Yassine	M.C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Agti Mohamed	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

Dédication

Je dédie ce travail à :
-A mes parents : Ahmed et Khaira
-A mes frères :Mahmoud,Azzdin,Faycel,Abdelkader et Hicham
et mes sœurs :Soumaia,Massaouda et Afaf
-A mes petites poussins :Issam et Djomana
, et toute la famille
- A mes chers amies :Rabab,Zahia,Amel,Rabiha,Ismahan,Karima,Hanan et Saida
- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.
-Et a tous mes professeurs

Remerciement

Premièrement nous remercions le
dieu notre créateur. Nous
remercions particulièrement
notre
encadreur :**Mr AGTI MOHAMED**

pour son aide précieuse, sa
patience et ses encouragements. Nous voulons également remercier :

Mr Boussaàd Abadelmalak
pour nous avoir fait
l'honneur de présider le jury de
notre mémoire Nos remerciements
vont également aux :

Mr :Guerboussa Yassine
honorer de leur présence dans ce
jury. Nos remerciements
s'adressent également

à : **Mr :mabrouk meflah** ,
Nos remerciements s'adressent à
tous ce qui n'ont aidé et n'ont
permis de faire aboutir ce
travail.

Table des matières

Dédication **i**

Remerciement **ii**

Notations **iv**

Introduction **1**

1 Généralités sur les algèbres de Banach **3**
1.7 Semigroupe dans une algèbre de Banach 7
1.8 L'existence d'un semigroupe dans une algèbre de Banach (Théorème de Sinclair) 8
1.11 Propriétés des semigroupes dans algèbre de Banach 11

2 Semigroupes dans une l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés **12**
2.1 Semigroupes d'opérateurs linéaires bornés 12
2.8 Théorème de Hille Yosida 17
2.11 Théorème de Lumer-Phillips 18

3 Distance entre deux semigroupes dans une algébre de Banach **21**
3.1 Distance entre deux semigroupes dans une algébre de Banach 21
3.11 Distance entre deux semigroupes dans une fortement continu de Banach 30

Notations

- E : un espace de Banach.
- $B(E)$: l'algèbre de banach des opérateurs linéaires bornés dans E.
- A : opérateur.
- $T(t)$:semigroupe.
- $D(A)$: l'ensemble de définition de A.
- $\overline{D(A)}$: l'adherence de l'ensemble $D(A)$.
- $\rho(A)$: l'ensemble résolvante de $A \in B(E)$.
- $\sigma(A)$: le spectre de $A \in B(E)$.
- I : l'unité de $B(E)$.
- $r(T(t))$: le rayon spectrale de $T(t)$.
- $R(\lambda; x)$: la fonction résolvante de x.
- $SG(M, \omega)$: l'ensemble des C_0-semigroupe $T(t)_{t\geqslant 0} \subset B(E)$.
- $A^\sharp$: est une algèbre admettant un élément unité.
- $[Sp(T(t))_{t>0}]^-$:la sous algèbre fermée de A engendré par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$.

- $\Re$: l'algèbre quotient.
- Λ : l'applications continues.
- $rad\ A$: le radical de A.
- $\hat{A}$: l'ensemble de tout les caractères de A.
- K^+ : l'ensemble des éléments strictement positifs

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement asymptotique *à* lorigine de la distance $\|T(t) - T(t(\alpha+1))\|$ où $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe dans une algèbre de Banach et α est un nombre réel strictement positif.

Les premier résultats partiels sur cette branche avaient été obtenus en 1981 par J.Estarle qui ont montre dan [8] que si $\delta(a) = 1$ et a déférant de l'identité alors

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \inf \|a^{n+1} - a^n\| \geqslant \frac{1}{e}$$

Plus récemment J.Estarle et A.Mokhtari on 2002 dans [10] prouvais que si

$$\limsup_{n\longrightarrow +\infty} \|T(t) - T(t(\alpha+1))\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

alors on bien $T(t) = 0$ pour $t > 0$ ou bien la sous-algébre A engendré par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est unitaire et il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t > 0$.
En 2005 J.Estarle a amélioré dans [9] les résultats de A.Mokhtari et J.Estarle on montrant notamment que si $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe d'opérateur linaire borné et s'il existe $\eta > 0$ et une fonction $t \longmapsto s(t)$ sur $[0, \eta]$ tel que $s(0) = 0$, $0 < t < s(t)$ vérifie :

$$\|T(t) - T(s(t))\| < (s + t)$$

alors le générateur infinitésimal est borné .

Le contenu du travail est le suivant ,il se décompose en trois chapitres :

Le premier chapitre est une présentation de quelques propriétés des semigroupes dans une algébre de Banach (l'existence,la continité,...) où on expose le théoréme de Sinclair qui assusrer l'existence d'un semigroupe analytique dans une algébre de Banach et le théoréme(1.14) montre qu'un semigroupe dans une algébre de Banach séparable posséde certaine propriétés de continuité.

Dans le deuxiéme chapitre nous étudions quelques propriétés des semigroupes d'opérateurs lineaires bornés.

Dans le troisiéme chapitre nous étudions la distance entre deux élémentes d'un semigroupe dans une algébre de Banach et certains propiétés de la sous algébre fermeé engendrée par le semigroupe non quasinilpotent $(T(t))_{t>0}$ qui vérifie :

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|T(t)-T(t(\alpha+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \quad pour \quad \alpha\in\mathbb{R}^{+}$$

Enfin nous exposons à titre d'application le semigroupe éngendré par l'opérateur diogonal $A = diag(a_1, a_2, ..., a_n) \quad n \in \mathbb{N}$

Chapter 1

Généralités sur les algèbres de Banach

Définition 1.1 *: Soit A un espace vectoriel, muni d'une troisième loi nommée multiplication. A est une algèbre si les conditions suivants sont vérifiée:*

(i) $x(yz) = (xy)z \qquad \forall x, y, z \in A.$

(ii) $(x + y)z = xz + yz, x(y + z) = xy + xz \qquad \forall x, y, z \in A.$

(iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ *, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$* $\qquad \forall x, y \in A.$
Si $xy = yx$ pour tout $x, y \in A$ alors l'algèbre A est commutative.
S'il existe $e \in A$ tel que $xe = ex$ pour tout $x \in A$ alors l'algèbre A est unitaire.
De plus si A un espace vectoriel normé et si

(iv) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in A$*, alors A est une algèbre normée.*

Définition 1.2 *: On appelle algèbre de Banach commutative A toute algèbre commutative sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une norme vériant l'inégalité:*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in A \tag{1.1}$$

et complète.
Si A admet une unité e on supposera toujours $\|e\| = 1$.

Remarque 1.1 *: Si A admet un élément unité, alors e est unique car si e,e' deux éléments unités on a*

$$ee' = e'e = e.$$

Remarque 1.2 *: l'inégalité: $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in A$ montre que l'application*

$$P : A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

est continue pour les deux variables xy puisque si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors $x_n y_n \longrightarrow xy$.
Car

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En particulier si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ donc

$$x_n y \longrightarrow xy \text{ et } xy_n \longrightarrow xy \tag{1.2}$$

On peut remplacer (1.1) par (1.2).

Définition 1.3 *: Soit A une algèbre unitaire, un élément $x \in A$ est inversible s'il existe $y \in A$ tel que $xy = yx = e$ où e est l'élément unité de A.*

Définition 1.4 *: Soit A une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$. Un sous espace vectoriel $B \subseteq A$ est appelé sous algèbre de A si*

$$x \in B, y \in B \text{ implique } xy \in B.$$

Définition 1.5 *: Soit A une algèbre sur le corps $\mathcal{C}$ la sous algèbre engendrée par une famille d'éléments $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est l'ensemble des éléments de la forme $P(x_1, x_2, ..., x_n)$,P polynôme à coefficient complexes sans terme constant.*

Adjonction d'une unité

On peut ramener le cas non unitaire au cas unitaire par une opération standard dite adjonction d'une unité (d'ailleurs possible même si l'algèbre originale est unitaire).

Définition 1.6 *: Soit $\mathcal{A}$ une algèbre complexe, commutative et J un sous-ensemble de $\mathcal{A}$.Nous dirons que J est un idéal de $\mathcal{A}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(a) J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ et
(b) $xy \in J$ dés que $x \in \mathcal{A}$ et $y \in J$.

Si en plus $J \neq \mathcal{A}$, on dit que J est un idéal propre.
Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre.
Voyons comment ces notions algébriques se combinent avec la topologie.

Définition 1.7 *: Soit A une algèbre, un sous algèbre $I \subset A$ s'appelle idéal à gauche de l'algèbre A si $x \in A, y \in I$, alors $xy \in I$. Et idéal à droite si $y \in A, z \in I$, alors $zy \in I$. Un idéal qui est à la fois idéal à gauche et idéal à droite est appelé idéal bilatère. Dans toute algèbre A, il existe deux idéaux triviaux $I = \{0\}$ et $I = A$ tous les autres idéaux sont appelés idéaux propres. Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun idéal propre.*

Proposition 1.3 *: $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, commutative, unitaire et J un idéal de $\mathcal{A}$. Alors l'adhérence de J, notée $\overline{J}$, est aussi un idéal de A. De plus,si J est un idéal propre, alors*

- *J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$ et*
- *J est aussi un idéal propre.*

Définition 1.8 *: Soit A une algèbre de Banach commutative, le radical de A est l'intersection de ses idéaux réguliers maximaux. Il sera noté rad A. L'algèbre A est dite radicale si rad $A = A$*
Soit A une algèbre de Banach.A est dite semisimple si rad$A = \{0\}$.

Remarque 1.4 *: Lorsque l'algèbre A est unitaire :*

$$rad\ A = \{x \in A, e_A - ax \in Inv\ A \quad pour\ tout \quad a \in A\}.$$

Théorème 1.9 *: Soit A une algèbre de Banach commutative. Alors*

- **(i)** *$A/rad\ A$ est semisimple.*
- **(ii)** *Un élément $x \in A$ est inversible si et seulement si $x + rad\ A$ est inversible dans $A/rad\ A$.*

Théorème 1.10 *: Soit A une algèbre de Banach commutative sur le corps $\mathbb{C}$: Si A est semisimple alors A admet une unité si et seulement si $\hat{A}$ est compact.*

Définition 1.11 *: Soit A une algèbre, on munit l'ensemble $A^\sharp = A \times \mathbb{C}$ des opération:*

- **(i)** $(x, \lambda) + (y, \mu) = (x + y, \lambda + \mu)$
- **(ii)** $\alpha(x, \lambda) = (\alpha x, \alpha\lambda)$
- **(iii)** $(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$
  et $x, y \in A$,$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$A^\sharp$ est une algèbre admettant un élément unité $e = (0, 1)$.
On identifié A à l'idéal maximal de $A^\sharp$ formés des éléments $(x, 0)$ et on écrit $x + \lambda e$ au lieu de (x, λ).

Exemple 1.5 *:*

- **(i)** *L'espace $B(E)$ des opérateurs bornés sur l'espace de Banach E, muni de la norme*

$$\|T\|_{B(E)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_E}{\|X\|_E} = \sup_{x \leq 0} \|Tx\|_E$$

et l'opération composition définie par

$$G : E \xrightarrow{T} E \xrightarrow{S} E$$

$$x \longmapsto Tx \longmapsto STx$$

$B(E)$ est une algèbre de Banach. En effet d'après la définition de la norme, il résulte

$$\|G\| \leq \|S\|\|T\|$$

par suite la composition de deux opérateurs de $B(E)$ est continue.
Si $E \neq \{0\}$, l'espace $B(E)$ est une algèbre de Banach unitaire, l'élément unité $1_{B(E)} = Id_E$.

(ii) *L'ensemble $K(E)$ des opérateurs compacts de $B(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre de Banach $B(E)$:*

(iii) *Soit K un espace compact non vide, considérons l'espace de Banach $C(K)$ des fonctions continue sur K à valeurs complexes muni du produit usuel:*

$$(fg)(z) = f(z)g(z) \qquad z \in K$$

et de la norme

$$\|f\| = \sup_{z\in k}|f(z)|$$

C'est une algèbre de Banach commutative unitaire, l'élément unité est la fonction constante $\mathbf{1}$ *.*

(iv) *L'espace vectoriel $C_c(\mathbb{R}^n)$ des fonction continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit convolutif est une algèbre commutative non unitaire. Preuve de l'associativité:*
Soient f, g et h trois éléments de $C_c(\mathbb{R}^n)$.
Pour $a \in \mathbb{R}^n$ donné, la fonction

$$x, y \longmapsto f(a - x - y)g(x)h(y)$$

est continue et à support compact sur $\mathbb{R}^{2n}$, donc intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$
Appliquons le théorème Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(a-x-y)g(x)h(y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n} f(a-x-y)g(x)dx)h(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(a-y)h(y)dy \\ &= [(f*g)*h](a)\end{aligned}$$

En intégrant d'abord par rapport à y on trouve que l'intégrale considérée est égale a $[(f*h)*g](a)$. La commutativité de la convolution permet alors de conclure.

Proposition 1.6 *: Si ψ Un morphisme complexe sur l'algèbre A ayant un élément unité e , alors $\psi(e) = 1$ et $\psi(x) \neq 0$ pour tout x inversible dans A.*

Théorème 1.12 *: Soit A une algèbre de Banach, et $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$.*
Alors

(i) *$e - x$ est inversible et $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.*

(ii) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

(iii) $|\psi(x)| < 1$ *pour tout homomorphisme complexe ψ sur A.*

Preuve. *: Puisque* $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ *et* $\|x\| < 1$*, les éléments*

$$s_n = e + x + x^2 +, , , +x^n \tag{1.3}$$

forment une suite de Cauchy dans A*.*
Comme A *est complet, il existe* $s \in A$ *tel que* $s_n \longrightarrow s$*.*
On a

$$s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$$

et $x^n \longrightarrow 0$*.*
La continuité de la multiplication implique que s *est l'inverse de* $e - x$*.*
D'après (1.3) on a

$$\|s_n - e - x\| = \|x^2 + x^3, , , \| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

(iii) supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $|\lambda| \geqslant 1$*, d'après (i) l'élément* $e - \lambda^{-1}x$ *est inversible et d'après la proposition 2.1 on a*

$$1 - \lambda^{-1}\psi(x) = \psi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$$

. Donc $\psi(x) \neq \lambda$*.*
Ainsi

$$|\psi(x)| < 1$$

pour tout homomorphisme complexe ψ *sur* A*.*

■

1.7 Semigroupe dans une algèbre de Banach

Définition 1.13 *: Soit* A *une algèbre de Banach, un semigroupe de* A *est une famille* $(T(t))_{t>0}$ *d'éléments de* A *vérifant pour tout couple* s, t *de réels strictement positifs la condition*

$$T(t + s) = T(t).T(s)$$

On notera $[Sp(T(t))_{t>0}]^-$ *la sous algèbre fermée de* A *engendré par le semigroupe* $(T(t))_{t>0}$*.*
On dira qu'un semigroupe$(T(t))_{t>0}$ *est continu en norme si*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|T(t + h) - T(t)\| = 0 \quad pour\ tout\ t > 0$$

et on dira que $(T(t))_{t>0}$ *admet une limite en norme à l'origine s'il existe* $J \in A$ *tel que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|T(t) - J\| = 0$$

Définition 1.14 (Semigroupe Analytique) *: soit* A *une algèbre de Banach,une famille* $(T(t))_{t \in H}$ *d'éléments de* A *est dit semigroupe analytique si l'application*

$$H \longrightarrow A$$

$$t \longmapsto T(t)$$

est analytique et $T(t + s) = T(t).T(s)$ *où* $t, s \in H = \{z \in \mathbb{C}\ Re\ z > 0\}$

Définition 1.15 (Semigroupe Quasinilpotent) *: soit A une algèbre de Banach, soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semigroupe dans A (K^+ l'ensemble des éléments strictement positifs).*

On dit que $(a^t)_{t\in K^+}$ est quasinilpotent si $r(a^t) = 0$ pour $t \in K^+$ ce qui équivaut à $r(a^1) = 0$ ($r(a^t)$ le rayon spectral de l'élément a^t).

Définition 1.16 *: Soit A une algèbre de Banach, un élément p de A est dit idempotent si $p^2 = p$.*

On dit que deux idempotent p et q sont orthogonal et on note $p \perp q$ si

$$pq = qp = 0.$$

1.8 L'existence d'un semigroupe dans une algèbre de Banach (Théorème de Sinclair)

Lemme 1.9 *: Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de A de borne M.Soit K un compact de $\mathbb{C}$, soit $x \in E$ soit $u \in A^\sharp$ on pose*

$$v = u - \chi_o(u)e$$

(i) *Si $xe_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$, on a $\exp\left(t(e_n - e)\right)x \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ uniformément sur K.*

(ii) *Si $ve_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} v$ alors*

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sup_{t\in k} \left\{ \begin{array}{l} \|\exp(tu)\exp t(e_n - e) - \exp tu\| \\ -\exp[Re(t\chi_o)][\exp|t|(M+1) - 1] \end{array} \right\} \leq 0$$

Lemme 1.10 *: Soit A une algèbre de Banach commutative à unité approchée bornée de borne M.Alors pour tout couple $(a, y) \in A \times G$, il existe une suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$d'éléments de A telle que*

$$\|e_n y - y\| + \|e_n a - a\| \underset{n\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad avec \quad \sup_{n\geqslant 1}\|e_n\| \leq M$$

Théorème 1.17 (de Sinclair) *: Soit A une algèbre de Banach commutative à unité approchée bornée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ de borne M. Pour tout $x \in G$, il existe un semigroupe analytique $(b^t)_{Re\ t>0}$ dans A tel que*

(i) *$\{\|b^t\|\}$ est borné pour $|t|\leq 1$ et $Re\ t > 0$.*

(ii) *$x \in b^t G$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $Re\ t > 0$.*

(iii) $b^t x \underset{\substack{t\longrightarrow 0\\ Ret>0}}{\longrightarrow} x$

Preuve. *: Par récurrence on va définir une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A telle que si on pose*

$$b_n = \exp(-ne + f_1 + f_2 +, , , +f_n)$$

$$b_n^t = \exp(-tne + tf_1 + tf_2 +, , , +tf_n) \quad pour\ t \in \mathbb{C}$$

$$b_0^t = b_0 = e \quad pour\ t \in \mathbb{C}$$

on ait

$$\|f_n\| \leq M, \|(b_n^t - b_n^t)x\| \leq 2^{-n} \quad pour\ |t| \leq n \tag{1.4}$$

$$\|(b_n^t - b_n^t)\| \leq 2^{-n} + \exp[-(n-1)Ret][\exp(|t|(M+1))] \tag{1.5}$$

$$pour\ |t| \leq n \quad et\ ceci\ pour\ tout \quad n \geqslant 1$$

Pour $n = 1$ on veut que

$$\|\exp t(f_1 - e)x - x\| \leq \frac{1}{2}\ pour |t| \leq 1$$

Ceci résulte des lemmes 1 et 2 avec $u = 0$, $K = \overline{D(0,1)}$,et $f_1 = e_n$ avec n assez grand.
Supposons qu'on a construit $f_1, f_2, , , , , f_{n-1}$.
On pose $u = f_1 + f_2 +, , , +f_{n-1} - (n-1)e$, $K = \overline{D(0,n)}$. Alors on a

$$\exp(tu) = b_{n-1}^t$$

On cherche f_n avec

$$\|f_n\| \leq M, \|\exp(tu)x - \exp t(u + f_n - e)x\| < 2^{-n}$$

$$et \quad \|\exp(tu)x - \exp(tu + t(f_n - e))x\|$$

$$< 2{-}n + [\exp|t|((M+1)) - 1]\exp[-(n-1)Re\ t] \quad pour\ tout \quad t \in K$$

L'existence de f_n résulte des lemmes 1 et 2
Donc on peut construire la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence.
Soit K un compacte de $\Lambda = \{t \in \mathbb{C}, Ret > 0\}$.
Il existe $L > 0$ et $\delta > 0$ tels que $Re\ t > \delta$ pour tout $t \in K$,et $|t| \leq L$ pour tout $t \in K$.
Pour $n \geqslant L$ on obtient

$$\|b_{n-1}^t - b_n^t\| \leq 2^{-n} + \exp(-(n-1)\delta).\exp L(M+1) - 1$$

donc la suite $(b_n^t)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact k de Λ vers une limite que l'on note b^t. On a

$$b^{t+s} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n^{t+s}$$

$$= \lim_{n \longrightarrow 0} \exp[(t+s)(-ne + f_1 + f_2 +, , , +f_n)]$$

$$= \lim_{n\longrightarrow +} \exp t(f_1 + f_2 +, , , +f_n - ne). \lim_{n\longrightarrow +\infty} \exp s(f_1 + f_2 +, , , +f_n - ne)$$

$$= b^t.b^s \quad pour\ tout\ t, s \in \Lambda$$

Donc $(b^t)_{Re\ t>0}$ *est un semigroupe. L'application* $t \longrightarrow b_n^t$ *est continue sur* Λ *pour tout* n*, donc l'application* $t \longrightarrow b^t$ *est aussi continue car* b^t *est limite uniforme sur tout compact* K *de* Λ *d'applications continues.*

Soit l *une forme linéaire continue sur* $A^\sharp$*.*

$$\|l(b_n^t) - l(b_{n-1}^t)\| \leq \|l\| \|b_n^t - b_{n-1}^t\| \underset{t\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad pour\ tout \quad t \in k$$

donc la suite $(l(b_n^t))$ *converge uniformément sur tout compact* K *de* Λ *vers une limite* $l(b^t)$*.Comme l'application* $t \longrightarrow l(b^t)$ *est analytique sur* Λ *pour tout* l *alors* $(b^t) Re\ t > 0$ *est analytique.*

Pour $|t| < 1$*,* $Re\ t > 0$ *on a :*

$$\|b^t - e\| = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{n} \|p_n^t - p_{n-1}^t\|$$

$$\leq \lim_{n\longrightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{n} [\exp(-(p-1)Re\ t)(\exp(|t|(M+1)) - 1)] + 1$$

$$= [\exp(|t|(M+1)) - 1] \sum_{p=1}^{+\infty} [exp - (p-1)Re\ t] + 1$$

$$= [exp|t|(M+1) - 1] \sum_{p=1}^{+\infty} [\exp(-Re\ t)]^p . \exp(Re\ t) + 1$$

$$= [\exp|t|(M+1) - 1] \frac{1}{1 - \exp(-Re\ t)} + 1$$

.

D'où

$$\sup_t \|b^t\| \leq \sup_t \|b^t - e\| + 1 \leq +\infty$$

Le semigroupe $(b^t)_{Re\ t>0}$ *est dans* A *car*

$$\chi_0(b_n^t) = \exp(-nt), |\chi_0(b_n^t)| = \exp(-Re\ t) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\chi_0(b^t) = 0$ *pour tout* $t \in \Lambda$ *,et* $b^t \in A$ *pour* $t \in \Lambda$.
La suite (xb_n^t) *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{C}$ *vers une fonction*$\varphi(t)$ *continue de* $\mathbb{C}$ *dans* G *d'après (1.4).*
Pour $t \in \Lambda$, *on a*

$$xb_n^{-t}b_n^t = x, \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} xb_n^{-t}b_n^t = \varphi(-t)b^t = x.$$

D'où

$$x \in b^tG \text{ pour tout } t \in \Lambda.$$

Comme φ *est continue,on a*

$$\varphi(t) \underset{\substack{t\longrightarrow 0\\ t\in\Lambda}}{\longrightarrow} \varphi(0) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} xb_n^0 = 0.$$

Donc

$$xb^t \underset{\substack{t\longrightarrow 0\\ t\in\Lambda}}{\longrightarrow} x$$

■

1.11 Propriétés des semigroupes dans algèbre de Banach

Théorème 1.18 *: Soit* A *une algèbre de Banach commutative séparable et soit* $(a^t)_{t>0}$ *un semigroupe dans* A *. Alors il existe deux suites* (r_n) *et* (s_n) *de terme positive telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = 0$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|a^{t+r_n} - a^t\| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|a^{t-s_n} - a^t\| = 0 \text{ pourtout } t > 0$$

Corollaire 1.19 *: Soit* A *une algèbre de Banach commutative séparable, il existe un idéal* I, $I \neq \{0\}$, *dans* A *possédant une unité approchée bornée si et seulement si* A *possédant un semigroupe borné* $(a^t)_{t>0}$ *.*

Chapter 2

Semigroupes dans une l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés

2.1 Semigroupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1 *: Soit E un espace de Banach sur le corps $\mathbb{C}$ et soit $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur E. La famille $(T(t))_{t>0} \subset B(E)$ est appelée semigroupe si*

(i) $T(0) = I$ *(I l'élément unité d'algèbre $B(E)$)*

(ii) $T(s+t) = T(s).T(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 2.2 *: Le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est appelé semigroupe fortement continu et noté C_0-semigroupe si l'application $t \longrightarrow T(t)$ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur $B(E)$ c'est-à-dire*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \in E \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \textit{telque} \quad t \longrightarrow t_0$$

Définition 2.3 *: On appelle semigroupe uniformément continu $(T(t))_{t>0} \subset B(E)$ vérifiant la propriété suivante:*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

Définition 2.4 *: L'opérateur linéaire A défini par:*

$$D(A) = \left\{ x \in E, \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}|_{t=0} \quad \textit{pour } x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 2.2 *: Les semigroupes uniformément continus sont C_0-semigroupes puisque:*

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\|\|x\|.$$

Mais il existe des C_0-semigroupes qui ne sont pas uniformément continus.

Remarque 2.3 *: Le semigroupe $(T(t))_{t\geqslant 0} \subset B(E)$ est fortement continu si et seulement si*

$$\forall f \in E, \ ona \ \ T(t)f \longrightarrow f \ \ quand \ t \longrightarrow 0.$$

C_0-semigroupes analytiques.

Définition 2.5 *: Désignerons par Δ l'ensemble:*

$$\{z \in \mathbb{C}, Re \ z > 0 \ \ et \ \ \varphi_1 < arg \ z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

On appelle C_0-semigroupe analytique une famille $(T(z))_{z\in\Delta} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $T(0) = I$.

(ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

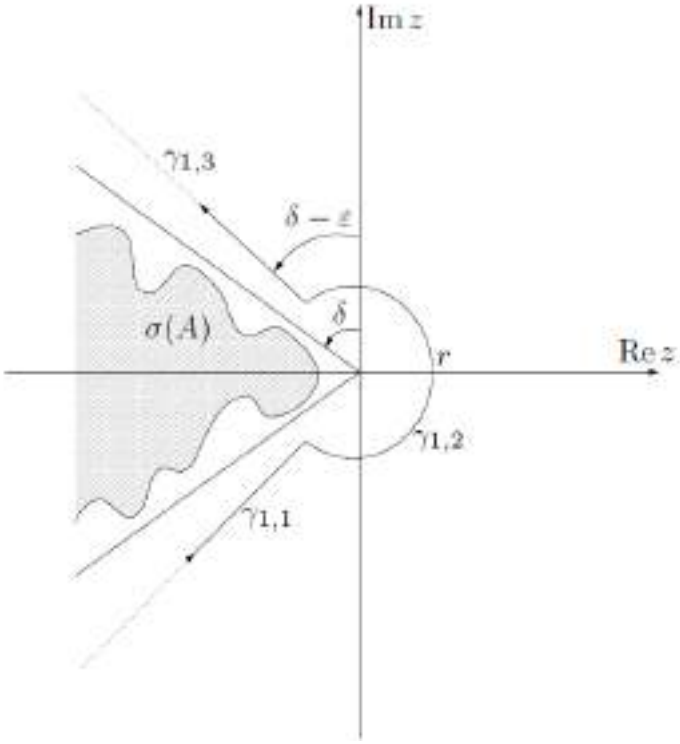
(iii) $\lim_{z\longrightarrow 0} T(z)x = x, \forall z \in \Delta$.

(iv) *l'application:*

$$z \in \Delta \longmapsto T(z) \in B(E).$$

est analytique dans le secteur Δ.

Diagramme: semigroupe analytique



Lemme 2.4 *: Soit $A \in B(E)$, alors $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe uniformément continu d'éléments de $B(E)$ dont le générateur infinitésimal est A.*

Théorème 2.6 *: Un opérateur $A : E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Définition 2.7 *: On dit que le C_0-semigroupe $(T(t)) \geqslant 0$ est uniformément borné s'il existe $M \geqslant 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geqslant 0$.*

Définition 2.8 *: On appelle type d'un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t\geqslant 0}$, le nombre*

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R};\ il\ existe\ M_\omega \in \mathbb{R}_+\ telque\ \ \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}\ \ pourt \geqslant 0\}$$

$$= \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log\|T(t)\| = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log\|T(t)\|.$$

Remarque 2.5 *: On note par $SG(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semigroupes$(T(t))_{t\geqslant 0} \in B(E)$,pour lesquels il existe $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tel que:*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geqslant 0$$

Proposition 2.6 *Soient $(T(t))_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal,si*

(i) *$x \in A$, alors l'application*

$$t \in [0, +\infty[\longmapsto T(t)x \in E.$$

est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ pour tout $x \in D(A)$ et $T(t)x \in D(A)$ on a

a)

$$\frac{dT(t)x}{dt} = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0.$$

b)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \forall t \geqslant 0.$$

(ii) *$x \in E$, alors*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

et

$$\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x \quad \forall t \geqslant 0$$

Définition 2.9 *: Soit x un élément d'une algèbre de Banach unitaire on appelle spectre de x l'ensemble :*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x)^{-1} \quad n'existe \ \ pas\}$$

La complémentaire de $\sigma(x)$ est appelé l'ensemble résolvant de x et est noté $\rho(x)$, autrement dit :

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda e - x \in Inv(A)\}$$

c'est-à- dire

$$\rho(x) = \mathbb{C} \backslash \sigma(x).$$

La fonction résolvante de x définie par:

$$R : \rho(x) \longrightarrow InvA$$

$$\lambda \longmapsto (\lambda e - x)^{-1}$$

la résolvant de x est l'application définie sur $\rho(x)$, à valeurs dans A donnée par:

$$R(\lambda; x) := (\lambda e - x)^{-1}; \quad \lambda \in \rho(x)$$

Enfin, la rayon spectral de x est le nombre :

$$r(x) := \sup\{|\lambda|: \ \lambda \in \rho(x)\}$$

Théorème 2.10 *: Soient $(T(t))_{t \geqslant 0} \in SG(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal.Alors*

(i) $\overline{D(A)} = E$.

(ii) *A est un opérateur fermé.*

(iii) $\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C}, Re\ \mu > \omega\} = \Lambda_\omega$, *alors l'application*

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\ dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur E, $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R_\lambda x = R(\lambda; A)x \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Théorème 2.11 (L'unicité de L'engendrement)

Soit deux C_0-semigroupes $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors

$$T(t) = S(t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

Preuve. : Soient $x \in D(A)$ et $t > 0$, on définit l'application

$$s \in [0, t] \longrightarrow U(s)x = S(t-s)T(s)x \in D(A).$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{dU(s)x}{ds} &= \frac{dU(s)x}{ds} S(t-s)T(s)x + S(t-s)\frac{d}{ds}T(s)x \\ &= -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)AT(s)x \\ &= 0\end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. Par suite

$$U(0) = U(t)\ x, \quad \textit{pour tout} \quad x \in D(A).$$

d'où

$$S(t)x = T(t)x \quad \forall x \in D(A) \ \ \textit{et}\ t \geqslant 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$ et $T(t), S(t) \in B(E)$, pour tout $t \geqslant 0$, il résulte que

$$S(t)x = T(t) \quad \forall xt \geqslant 0 \ \ \textit{et}\ x \in E.$$

Ainsi

$$S(t) = T(t) \qquad \forall t \geqslant 0$$

■

Remarque 2.7 *: Soient $(T(t))_{t\geqslant 0} \in SG(M; \omega)$ et A son générateur infinitésimal,alors*

$$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

et

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda \leq \omega\}.$$

2.8 Théorème de Hille Yosida

Définition 2.12 *: La famille* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset B(E)$ *, où*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A), \quad pour \quad tout \quad \lambda \in \Lambda_\omega.$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.

Remarque 2.9 *: pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$*, alors*$A_\lambda$ *est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu* $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$.

Lemme 2.10 *:* $A : D(A) : E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*

(i) *A est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = E$ *.*

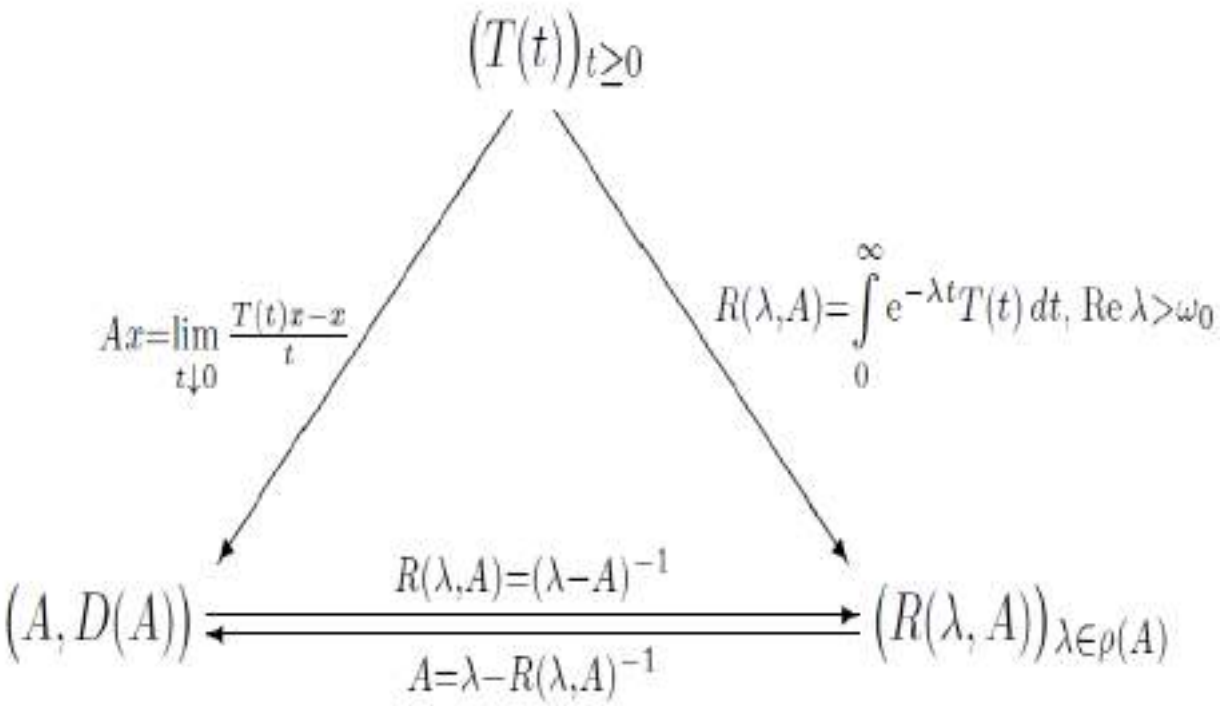
(ii) *il existe* $\omega \geqslant 0$ *et* $M \geqslant 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \varrho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a*

$$\|\lambda R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tous* $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq M^2 t e^{\omega t}\|A_\alpha x - A_\beta x\|, \quad \forall x \in E \quad et \quad t \geqslant 0$$

Diagramme: Dans un diagramme les informations obtenu jusqu'à présent sur les relations entre un semigroupe, son générateur,et sa résolvent



Théorème 2.13 (Hille Yosida) *: un opérateur linéaire*

$$A : D(A) : E \longrightarrow E$$

est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $(T(t))_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ *si et seulement si*

(i) *A est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = E$ *.*

(ii) *il existe* $\omega \geqslant 0$ *et* $M \geqslant 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a*

$$\|\lambda R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tous* $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ *on a*

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq M^2 t e^{\omega t}\|A_\alpha x - A_\beta x\|, \quad \forall x \in E \quad et \quad t \geqslant 0$$

2.11 Théorème de Lumer-Phillips

Définition 2.14 *: Soient E un espace de Banach et* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans E, est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \quad \|\lambda x - Ax\| \geqslant \lambda\|x\|.$$

Définition 2.15 *: Un opérateur* $(A, D(A))$*, linéaire non borné dans l'espace de Banach E, est m-dissipatif si*

(i) *A est dissipatif.*

(ii) $f \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = f$.

Théorème 2.16 *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur non borné dans l'espace de Banach E. S'il existe* $\lambda_0 > 0$ *pour lequel l'opérateur* $\lambda_0 I - A$ *est une bijection de* $D(A)$ *sur E, et si* $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur E, alors A est fermé. En particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.*

Remarque 2.12 *Si l'espace de Banach E est réflexif alors l'opérateur m-dissipatif* $(A, D(A))$ *est de domaine dense dans E.*

Théorème 2.17 *Un opérateur* $(A, D(A))$*, linéaire non borné dans l'espace de Hilbert E, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A), \quad (Ax, x) \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \quad Re(Ax, x) \leq 0.$$

Théorème 2.18 *Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans E.*

Théorème 2.19 (Lumer-Phillips) *: Soit $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ Un opérateur tel que $\overline{D(A)} = E$. Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contraction si et seulement si*

(i) *A est dissipatif .*

(ii) *il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif.*

Exemple 2.13 (Équation des ondes amorties) *: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On munit l'espace $H_0^1(\Omega)$ de la norme*

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 du$$

On désigne par a une fonction dans L^∞ sur Ω.
Alors pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,il existe unique solution

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \qquad (*)$$

du système

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + a(x)\dfrac{\partial}{\partial t}\right) u = 0 \quad \mathfrak{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_+) \\ u|_{\partial\Omega} \times \mathbb{R}_+ = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t} u|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,on peut écrire ce système se forme d'un problème d'évolution d'ordre un:

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où

$A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & -a(x) \end{pmatrix}$ *, de domaine $D(A) = D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega)$ et $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.*

On muni H de la norme

$$\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\|_H^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On a

$$\langle Ay, y\rangle = \langle \nabla v, \nabla u\rangle - \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} - \langle a(x)v, v\rangle_{L^2}$$

$\Longrightarrow$ *$Re\langle Ay, y\rangle_H \leq -\|a\|_\infty \|v\|_{L^2}^2$ Soit maintenant$\lambda > 0$,étudions la surjectivité de $\lambda I - A$ de $D(A)$ sur H.*
Soient $F = (f, g) \in H$,alors

$$(\lambda I - A)y = F \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v + \lambda u = f & & \\ \Delta u - a(x)v + \lambda v & = & g \end{array} \right.$$

utilisons le théorème de Lax-Milgram pour prouver que ce système admet une solution dans $D(A)$ pour $\lambda > \|a\|_\infty$.
D'aprés le théorème de Hille-yosida l'opérateur $(A, D(A))$ est m-dissipatif. De plus un raisonnement analogue montre de même que $-A$ est m-dissipatif par suite A est un générateur infinitésimal d'un groupe dans H.
D'ou le système (2.1) admet une solution unique u vérifiant (*).

Chapter 3

Distance entre deux semigroupes dans une algébre de Banach

3.1 Distance entre deux semigroupes dans une algébre de Banach

semi-groupes dans $\mathbb{C}$ est les applications $\theta : k^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\theta(t+s) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s \in K^+, t \in K^+$ désignant l'ensemble des éléments strictement positifs d'un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 *: Soit A une algèbre de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans A vérifiant*

(i) *pour* $0 < \zeta_1, \zeta_2 < +\infty$

$$f(\zeta_1 + \zeta_2) = f(\zeta_1)f(\zeta_2)$$

(ii) $\lim_{\zeta \longrightarrow 0^+} f(\zeta) = J$ *existe.*

Alors J est un idempotent de A et $f(\zeta) = Jf(\zeta) = f(\zeta)J$.
De plus $f(\zeta)$ est continue pour $\zeta \geqslant 0$ si $f(0) = J$.

Théorème 3.2 *: Soit A une algèbre de Banach commutative sur le corps $\mathbb{C}$ et soit Ψ un sous ensemble sur non vide compact ouvert et fermé de $\hat{A}$. Alors il existe un idempotent non nul J dans A tel que*

$$\Psi = \{\varphi \in \hat{A} : \varphi(J) = 1\}$$

Lemme 3.2 *: Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$ et soit $\theta : K^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ (K^+ l'ensemble des éléments strictement positifs de K) une application non nulle telle que $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s, t \in \mathbb{K}$*

(i) *Si* $\limsup_{t \longrightarrow 0^+} |\theta(t)| = +\infty$, *alors* $\limsup_{t \longrightarrow 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\alpha+1))| = +\infty$ *pour* $\alpha \in K^+$.

(ii) *Si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+}|\theta(t)| > +\infty$ *, et si* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+}|1-\theta(t)| > 0$*, alors* $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+}|\theta(t)-\theta(t(\alpha+1))| = 2$ *pour* $\alpha \in K^+$.

(iii) *Si* $\lim_{t\longrightarrow 0^+}\theta(t) = 1$*, alors il existe* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $\theta(t) = exp\ tc$ *pour* $t \in K^+$.

Lemme 3.3 *: Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, et soit G l'ensemble des élément inversibles g de A tels que $\phi(g) = 1$ pour tout $\phi \in \hat{A}$. Alors l'application $x \longmapsto exp\ x$ est une bijection de rad A sur G*

Lemme 3.4 *: La fonction $f : x \longmapsto x - x^{\gamma+1}$ est positive sur $[0,1]$, croissante sur $\left[0,(\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]$ et décroissante sur $\left[(\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}},1\right]$ et $f\left((\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) = \dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$*

Lemme 3.5 *: Soit $\gamma > 0$, et soit U le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Il existe une fonction analytique $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(0) = 0$ et telle que*

$$\exp g(z) - \exp((\gamma+1)g(z)) = 0 \quad pour\ tout \quad z \in U.$$

Théorème 3.3 *: Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in k^+}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in k^+}$ et soit $\gamma > 0$. Si*

$$\limsup_{t\longrightarrow 0} r\left(a^t - a^{t(\gamma+1)}\right) > \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

alors $A/rad\ A$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A, un élément u de JA et une application $L : t \longmapsto L(t)$ de k^+ dans rad (JA) possédant les propriétés suivantes

(i) $\phi(J) = 1$ *pour tout* $\phi \in \hat{A}$.

(ii) $L(s+t) = L(s) + L(t)$ *pour* $s \in k^+, t \in k^+$.

(iii) $Ja^t = \exp[tu + L(t)]$ *pour* $t \in k^+$*, où* $\exp v = J + \sum_{k\geqslant 1}\frac{v^k}{k!}$ *pour* $v \in JA$.

(iv) $(a^t - Ja^t)_{t\in k^+}$ *est un semigroupe quasinilpotent.*

Preuve. : Soit $\phi \in \hat{A}$. D'après le lemme 3.1, on a $\|\phi\left((a^{t(\gamma+1)})\right)\| = |\phi(a^t)|^{\gamma+1}$ pour $t \in k^+$.

Soit $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\limsup\limits_{t\longrightarrow 0^+} r\left(a^t - a^{t(\gamma+1)}\right) < \delta < \dfrac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Il existe $t_0 \in k^+$ tel que

$$\left||\phi\left(a^t\right)| - |\phi\left(a^t\right)|^{\gamma+1}\right| \leq |\phi(a^t) - \phi\left(a^{t(\gamma+1)}\right)| \leq \delta \quad pour\ tout \quad t \in E_0 = k^+ \cap]0,t_0].$$

D'après le l+emme 3.3, et soient s_1 *et* s_2, avec $s_1 < s_2$, les deux solutions sur $]0,1[$ de l'équation $f(x) = \delta$.On a $|\phi(a^t)| < s_1$ ou $|\phi(a^t)| < s_2$ pour $t \in E_0$. Soit $t \in E_0$. Comme $|\phi(a^{qt})| = |\phi(a^t)|^q$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$. on voit que si $|\phi(a^t)| < 1$ alors un sous ensemble dense de l'intervalle $[|\phi(a^t)|,1]$ ne rencontre pas $[s_1,s_2]$. Par conséquent $|\phi(a^t)| \geqslant s_2$ pour $\phi \in \hat{A}$. En particulier $|\phi(a^{t_0})| \geqslant s_2$ pour $\phi \in \hat{A}$ ce qui prouve que $\hat{A}$ est compact. D'après les

théorèmes 2.12 et 2.13, l'algèbre $A/rad\ A$ est unitaire, et grâce au théorème 3.2, il existe un idempotent J de A tel que $\phi(J) = 1$ pour tout $\phi \in \hat{A}$. $(a^t - Ja^t)_{t\in k^+}$ est un semigroupe quasinilpotent.
L'algèbre $B = JA$ a pour unité J. Posons $b^t = Ja^t$ pour $t \in k^+$. Soit $\psi \in \hat{B}$. Il existe $\phi \in \hat{A}$ tel que $\psi(Jx) = \phi(x)$ pour $x \in A$. On a

$$s_2^t|1 - \psi\left(b^{t\gamma}\right)| \leq |\phi\left(a^t\right) - \left(a^{t(\gamma+1)}\right)| \leq \delta < 1 \quad pour \quad t \in E_0$$

et par conséquent il exit $t_1 \in E_0$ tel que $r(J - b^t) < 1$ pour $t \in E_1 = k\cap]0, t_t]$. Posons

$$u_t = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\frac{(b^t - J)^k}{k} \quad pour \quad t \in E_1.$$

On a $b^t = \exp u_t$ pour $t \in E_1$.
Soit maintenant $t \in k^+$, et soit n le plus petit entier positif tel que $t \leq nt_1$. On pose $u_t = nu_{\frac{t}{n}}$, de sorte que $b^t = \exp u_t$. Soit $\psi \in \hat{B}$, et soit $\phi \in \hat{A}$ tel que $\phi(x) = \psi(Jx)$ pour $x \in A$. D'après le lemme 3.1, il existe $c_\phi \in \mathbb{C}$ tel que $\psi(b^t) = \phi(a^t)$ pour $t \in k^+$.
On voit que $\psi\left(u_{\frac{t}{u}}\right) = \frac{tc_\phi}{n}$ et $\psi(u_t) = n\psi\left(u_{\frac{t}{u}}\right) = tc_\phi$.

Posons $u = t_1^{-1}u_{t_1}$, $L(t) = u_t - tu$. On a $\psi(L(t)) = tc_\phi tc_\phi = 0$, donc $L(t) \in rad\ A$ pour $t \in k^+$. On a $\exp(L(s) + L(t)) = [\exp(-(s + t)u)]b^{s+t} = \exp(L(s + t))$ et il résulte du lemme 3.2 que $L(s + t) = L(s) + L(t)$ pour $s \in k^+, t \in k^+$. ■

Théorème 3.4 *: Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in k^+}$ un semigroupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in k^+}$ et soit $\gamma > 0$. Si*

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+}\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\| < \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

alors il existe un idempotent J de A et $u \in JA$ vérifiant les propriétés suivantes

- **(i)** $\phi(J) = 1$ *pour* $\phi \in \hat{A}$.
- **(ii)** $(a^t - Ja^t)_{t\in K^+}$ *est un semigroupe quasinilpotent.*
- **(iii)** $Ja^t = \exp tu$ *pour* $t \in K^+$.

Preuve. : On reprend les notations du théorème 3.3. Il suffit de montrer que l'application additive $L : K^+ \longrightarrow rad\ (JA)$ est de la forme $L(t) = t.L(1)$. Posons $u(t) = tu + L(t)$ pour $t \in K^+$. Soit $g : z \longmapsto \sum_{k\geqslant 1}\alpha_k z^k$ la fonction analytique sur le disque U de centre 0 et de rayon $\frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ obtenue au lemme 3.4, soit $\delta \in \left]0, \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right[$ et soit $t_0 \in K^+$ tel que

$$\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\| \leq \delta \quad pour \quad tout \quad t \in E = K\cap]0, t_0]$$

Comme la série$\sum_{k\geqslant 1}\alpha_k(Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)})^k$ converge dans B pour $t \in E$. Posons

$$v(t) = g(Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)}) = \sum_{k\geqslant 1}\alpha_k(Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)})^k.$$

D'après les propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe, on a

$$\exp v(t) - \exp((\gamma+1)v(t)) = Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)} = \exp u(t) - \exp((\gamma+1)u(t)).$$

La fonction $f : z \longmapsto \exp z - \exp((\gamma+1)z)$ est entière. Posons

$$h(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \ pour \ z_1 \neq z_2 eth(z_1, z_2) = f'(z_1) \ pour \ z_1 = z_2.$$

Alors h est une entière sur $\mathbb{C}^2$. Comme $f'(0) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit injective sur le disque ouvert $D(0, \varepsilon)$. Par conséquent $h(z_1, z_2) \neq 0$ pour $|z_1| < \varepsilon, |z_2| < \varepsilon$.
Pour $t \in E$,on a $r(u(t)) = tr(u)$, donc $\lim_{t \longrightarrow 0} r(u(t)) = 0$, et

$$\begin{aligned} rJa^t - Ja^{t(\gamma+1)} &= r(\exp u(t) - \exp((\gamma+1)u(t))) \\ &= r(\exp tu - \exp(t(\gamma+1)u)) \\ &\leq [\exp tr(u)]r(J - \exp t\gamma u). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \longrightarrow 0^+} rJa^t - Ja^{t(\gamma+1)} = 0$. Comme $g(0) = 0$ on a $\lim_{t \longrightarrow 0^+} r(v(t)) = 0$. Donc pour t assez petit on a

$$\phi(h(u(t), v(t))) = h(\phi(u(t)), \phi(v(t))) \neq 0 \ pour \ tout \ \phi \in \hat{B}$$

et dans ce cas $h(u(t), v(t))$ est inversible dans B. Donc il existe $t_1 \in E$ tel que

$$u(t) = v(t) \ \ pour \ t \in K \cap]0, t_1[.$$

Posons $M = \|J\| \sum_{k \geqslant 1} |\alpha_k| \delta^k$. On a $\limsup_{t \longrightarrow 0^+} \|r(t)\| \leq M$. Soit maintenant $l \in A^*$. On pose $\theta(t) = Re(l(L(t)))$ pour $t \in k^+$, $\theta(0) = 0$ et $\theta(t) = -Re(l(L(-t)))$ pour $-t \in k^+$. On voit que l'ensemble G des valeurs d'adhérence de θ en 0 est un sous groupe additif borné de $\mathbb{R}$. Donc $G = \{0\}$ et θ est continue sur K. Donc $Re \ l(L(t)) = tRe \ l(L(1))$ pour tout $t \in k^+$. De même $Im \ l(L(t)) = t \ Im \ l(L(1))$, et $l(L(t)) = tl(L(1))$ pour tout $t \in k^+$. On voit donc que

$$Ja^t = \exp t(u + L(1)) \ \ pour \ \ t \in k^+.$$

■

Lemme 3.6 *: Soit A une algèbre de Banach, et soit $u \in A$. Si u est quasinilpotent alors $x = h(u)$ est l'unique élément quasinilpotent de A vérifiant*

$$x - x^{n+1} = u$$

Corollaire 3.5 *: Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t \in k^+}$ un semigroupe quasinilpotent dans une algèbre de Banach, et soit $n \geqslant 1$ un entier.*
Si

$$\limsup_{t \longrightarrow 0^+} \|a^t - a^{t(\gamma+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

alors $a^t = 0$ pour $t \in k^+$.

Théorème 3.6 *: Soit A une algèbre de Banach, soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $x \in A$ tel que $\|x\| \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Si x est quasinilpotent alors*

$$\|x - x^{n+1}\| > \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

Théorème 3.7 *: Soit K un sous corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in k^+}$ un semigroupe dans une algèbre de Banach, soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in k^+}$ et soit $n \geqslant 1$ un entier. Si*

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+}\|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$$

Alors ou bien $a^t = 0$ pour $t \in K^+$, ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $a^t = \exp tu$ pour $t \in K^+$.

Preuve. : Supposons que $(a^t)_{t\in k^+}$ est quasinilpotent. Il résulte alors du corollaire 3.5 que $a^T = 0$ pour $t \in K^+$. Dans le cas contraire on sait d'après le théorème 3.4 qu'il existe un idempotent J de A, avec $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$ et un élément u de JA tels que

$$Ja^t = \exp tu \quad pour \quad t \in K^+.$$

Soit $B = A/JA$ et soit P la surjection canonique de A sur B. Comme P est contractante, et comme $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$, B est radicale et il résulte du corollaire 3.5 que

$$P(a^t) = 0 \quad pour \quad t \in k^+.$$

Donc

$$a^t = Ja^t = \exp tu \quad pour \quad t \in K^+$$

et A est unitaire d'unité J. ■

Exemple 3.7 *: Soit $A(D)$ l'algèbre des fonction continues sur le disque unité fermé dont la restriction au disque unité ouvert D est holomorphe, munie de la norme*

$$\|f\|_\infty = \max_{|z|\leq 1}\|f(z)\| = \max_{|z|=1}\|f(z)\|$$

est une algèbre de Banach uniforme. Pour $z \in \mathbb{C}$, z non réel positif, $t > 0$ on pose

$$z^t = |z|\exp(it\ arg(z))$$

$arg(z)$ désignant la détermination de l'argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi[$, et on pose $z^t = 0$ pour $t = 0$. On pose également

$$a^t(z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^t \quad pour \quad |z| \leq 0 = 1, t > 0.$$

$(a^t)_{t>0}$ est un semigroupe continu dans $A(D)$ puisque pour tout couple s,t de réels strictement positifs on a

$$a^{t+s} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+s} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^{t}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{s} = a^t a^s$$

et de plus

$$\left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+h} - \left(\frac{1-z}{2}\right)^{t}\right\|_\infty = \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t}\right\|\left\|\left(\left(\frac{1-z}{2}\right)^{h} - I\right)\right\|_\infty$$
$$\leq \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t}\right\|_\infty \left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{h} - I\right\|_\infty$$

passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$ on obtient

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left\|\left(\frac{1-z}{2}\right)^{t+h} - \left(\frac{1-z}{2}\right)^{t}\right\|_\infty = 0 \quad pour \quad tout \quad t>0.$$

Soit $\mathcal{F} = \{f \in A(D) | f(1) = 0\}$, et posons

$$\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad pour \ |z| \leq 1, z \neq 1.$$

Soit $\Re$ l'algèbre quotient $\mathcal{F}/\phi\mathcal{F}$ et soit $P : \mathcal{F} \longrightarrow \Re$ la surjection canonique.
Alors $\Re$ est radicale, la sous algèbre fermée engendrée par $P(a^t)_{t>0}$ coïncide avec $\Re$,le semigroupe $P(a^t)_{t>0}$ est continu

$$\|P\left(a^t\right)\| \leq 1 \quad pour \quad t>0$$

et on a

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\| = \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}} \quad pour \quad tout \quad entier \ n \geqslant 1.$$

En effet on déduit du fait que les polynômes sont denses dans $A(D)$ que la sous algèbre de $A(D)$ engendrée par a^1 est dense dans $\mathcal{F}$. Donc la sous algèbre fermé de $\Re$ engendrée par le semigroupe $(P(a^t))_{t>0}$ coïncide avec $\Re$. L'application $\longrightarrow P(a^t)$ est une application continue de $]0,+1[$ dans $\Re$, et

$$\|P\left(a^t\right)\| \leq 1 \quad pour \quad t>0.$$

Comme $\mathcal{F}$ est le seul idéal maximal de $A(D)$ contenant $\phi\mathcal{F}$,$\Re$ est radicale.
On a

$$\left|\arg\left(a^t(z)\right)\right| < \frac{t\pi}{2} \quad pour \quad t>0, |z|< 1, \neq 1$$

donc $a^t(z) - |a^t(z)|$ *converge uniformément vers* 0 *sur* D *quand* $t \longrightarrow 0^+$.
On en déduit que

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+}\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\| \leq \limsup_{t\longrightarrow 0^+}\|a^t - a^{t(n+1)}\|_\infty$$

$$\leq \max_{0\leq x\leq 1}\left(x - x^{n+1}\right) = \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Comme le semigroupe $(a^t)_{t>0}$ *est continu, on a* $\lim_{t\longrightarrow 0^+}\|P(a^t)\| = 1$, *et on déduit alors de théorème 3.6 que*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\|P\left(a^t\right) - P\left(a^{t(n+1)}\right)\| = \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Lemme 3.8 *: Soit* $n \geqslant 1$ *un entier, et soit* U *le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* $\dfrac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$. *Il existe une application* h *analytique sur* U *et continue sur* U *tel que* $h(0) = 0$ *et tel que*

$$h(z) - h(z)_{1+n} = z \quad pour \quad z \in U.$$

De plus $h^{(k)}(0) \geqslant 0$ *pour* $k \geqslant 1$, *et*

$$h\left(\frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}\right) = \frac{n}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}.$$

Théorème 3.8 *: Soit* A *une algèbre de Banach, soit* $n \geqslant 1$ *un entier et soit* $x \in A$ *tel que*

$$\|x\| \geqslant \frac{n}{(1+n)^{\frac{1}{n}}} \ \ et \ \ \|x - x^{n+1}\| > \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

Soit U *le disque ouvert de centre* 0 *est de rayon* $\dfrac{n}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}$,*et soit* h *la fonction analytique sur* U *construite au lemme 3.7. Alors*

$$|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \quad pour \quad \phi \in \hat{A}$$

et l'élément $I-(n+1)h^n(x-x^{n+1})$ *est inversible dans l'algèbre* $A^\sharp$ *obtenue en ajoutant une unité* I *à* A, *et*

$$J = \left(I - (n+1)h^n\left(x - x^{n+1}\right)\right)^{-1}$$

$$\left(\sum_{2\leq n\leq n+1} C_{n+1}^k (x - h(x - x^{n+1}))^{k-1} h(x - x^{n+1})^{n+1-k}\right)$$

est un idempotent non nul de A *vérifiant*

$$x - h(x - x^{n+1}) = J(x - h(x - x^{n+1}))$$

De plus si $\phi \in \hat{A}$ on a

$$\phi(J) = 1 \quad si \quad |\phi(J)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\phi(x) = 0 \quad si \quad |\phi(x)| \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

Preuve. : Soit $u \in A$ tel que $\|u\| \leq \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Comme

$$\|h(u)\| \leq h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

$I-(n+1)h^n(u)$ est inversible dans $A^\sharp$. Soit $y \in A$. On a_ $y+h(u)-(y+h(u))^{n+1}-u = y(I-(n+1)h^n(u))$

$$-y^2 \left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k} \right)$$

Posons maintenant

$$u = x - x^{n+1}, y = x - h(u),$$

$$b = (I-(n+1)h(u)^n)^{-1} \left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k} \right)$$

Comme

$$(y+h(u)) - (y+h(u))^{n+1} - u = 0$$

on a $y = y^2 b$, donc $y^2 b^2 = yb$, et $J = yb$ est un idempotent de A. Comme $\|h(u)\| \leq \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, on a $y \neq 0$ et $J \neq 0$ puisque $y = Jy$.
Soit maintenant $\phi \in \hat{A}$. Comme

$$|\phi(x)| - |\phi(x)|^{n+1} \leq \left|\phi(x - x^{n+1})\right| < \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

on a

$$|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

On a vu dans la démonstration du lemme 3.7 que la fonction $f(z) = z - z^{n+1}$ est injective sur le disque de centre 0 est de rayon $\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.
Comme

$$\phi(x) - \phi(x)^{n+1} = \phi(h(u)) - \phi(h(u))^{n+1}$$

et comme

$$\phi(h(u)) \leq h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

on voit que si $\phi(x) < \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ alors

$$\phi(y) = \phi(x) - \phi(h(u)) = 0$$

donc $\phi(J) = 0$.
D'autre part si $\phi(x) > \dfrac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, alors $\phi(x) \neq \phi(h(u))$ donc $\phi(y) \neq 0$ et $\phi(J) = 1$ puisque $y = Jy$. ■

Exemple 3.9 *: Dans le cas $n = 1$. On trouve d'après le lemme 3.7*

$$h(z) = \frac{1-(1-4z)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad pour \quad |z| \leq \frac{1}{4}$$

Et d'après le théorème 3.8 on a

$$J = \left(I - 2h\left(x - x^2\right)\right)^{-1}\left(x - h\left(x - x^2\right)\right)$$

$$= \left(x - \frac{I}{2} + \frac{1}{2}\left(I - 4x + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(I - 4x + 4x^2\right)$$

$$= \frac{I}{2}\left(x - \frac{I}{2}\right)\left(\left(I - 4x + 4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Exemple 3.10 *le semigroupe engendré par une matrice diagonale $A = diag(a_{1,\ldots,a_n})$ donner par*

$$e^{tA} = diag(e^{ta_1}, ..., e^{ta_n}).$$

On a l'opérateur A

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & .. & a_3 & 0... & 0 \\ .. & & .. & .. & \\ 0 & ... & ... & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

O na

$$T(t) = e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{ta_1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{ta_2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & .. & e^{ta_3} & ... & 0 \\ .. & & .. & .. & \\ 0 & ... & ... & 0 & e^{ta_n} \end{bmatrix}$$

$$\|T(t) - T(t(n+1))\| = \begin{bmatrix} e^{t(n+1)a_1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{t(n+1)a_2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & .. & e^{t(n+1)a_3} & ... & 0 \\ .. & & .. & .. & \\ 0 & ... & ... & 0 & e^{t(n+1)a_n} \end{bmatrix}$$

$\|T(t) - T(t(n+1))\| = e^{ta_1} - e^{t(n+1)}$

$$= \begin{bmatrix} a_1(I - e^{nta_1}) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2(I - e^{nta_2}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & .. & a_3(I - e^{nta_3}) & ... & 0 \\ .. & & .. & .. & \\ 0 & ... & ... & 0 & a_n(I - e^{nta_n}) \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = trA$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{ta_i}(I - e^{nta_i})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in[1,n]} \left(|e^{ta_i}(I - e^{nta_i})|\right)$$

Si on pose $x = e^{ta_i}x(1 - x^n)$ *d'après le lemme (3.4)*

$$\|x - x^{n+1}\| \leq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

3.11 Distance entre deux semigroupes dans une fortement continu de Banach

Théorème 3.9 *: Soit* $(T(t))_{t>0}$ *un semigroupe fortement continu, non nul d'opérateurs bornés sur un espace de Banach. Si* $(T(t))_{t>0}$ *est quasinilpotent alors il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\|T(t) - T(s)\| > \theta(s/t) \quad pour \quad 0 < t < s < \delta$$

Théorème 3.10 *: Soit* $(T(t))_{t>0}$ *un semigroupe fortement continu non nul, d'opérateurs bornés sur un espace de Banach. S'il existe* $\delta > 0$ *et une fonction continue*

$$s : [0, \delta] \longrightarrow (0, +\infty)$$

tel que $0 < t < s(t)$ *et*

$$\|T(t) - T(s(t))\| < \theta(\frac{s(t)}{t}) \quad pour \quad 0 < t \leq \delta,$$

alors le générateur infinitisimal du semigroupe $(T(t))_{t>0}$ *est borné, et on a*

$$\|T(t) - T(s(t))\| = |s - t|(\|u\| + M(s,t)|s - t|),$$

où

$$\sup_{0<s,t\leq 1} |M(s,t)| < +\infty.$$

Conclusion

La travail abordé dans ce mémoire consiste à étudié le comportement asymptotique *à* lorigine de la distance entre deux semigroupes dans une algèbre de Banach.Dans le chapitre de but on a exposé le théorème suivant qui conclure notre travail:

On considère la sous algèbre fermée A engendré par le semigroupe non quasi-nilpotent $(T(t))_{t>0}$ et soit

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|T(t)-T(t(\alpha+1))\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

alors il existe un idempotent J de A et $u \in J.A$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$.

(ii) $(T(t) - JT(t))_{t>0}$ est un semigroupe quasinilpotent

(iii) $JT(t) = e^{tu} \quad pour \quad t > 0$

Bibliography

[1] J. Esterle and A.Mokhtari, Distance entre éléments d?un semigroupe dans une algèbre de Banach, Journal of Fonctional analysis 195 (2002) 167-189.

[2] J. Esterle, Distance near the origin between elements of strongly contiuous semigroup, Ark. Math 43 (2005) 365-382.

[3] K. J. Engel, R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer-Verlag, New York 2000.

[4] Z. Bendaoud, Thèse Université Bordeau I et Université Essenia Oron 2008.

[5] A.Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlage, New York, 1983.

[6] M. Berkani, J. Esterle et A. Mokhtari, Distance entre puissances d'une unité approcheé bornée, J. London Math. Soc., à paraitre

[7] A. Mokhtari, Thése, Université Bordeaux I, 1988.

[8] G. Lacombe, P.Massat, Analyse fonctionnelle exercices corrigés,Dunod Paris, 1999.

[9] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, American Mathemat

[10] Explicitation des idempotents associés aux semigroupes ne férifiant pas certaines inégalités prés de lorigine.memoire de magister unversité de Laghouat 2009.?

الملخص:

في هذه المذكرة درسنا السلوك المقارب بجوار المبدأ المسافة بين عنصرين من نصف الزمرة $(T(t))_{t>0}$ في أي جبر بناخ A.

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|T(t)-T(t(\alpha+1))\|$$

حيث **α** عدد حقيقي موجب تماما .
من جهة أخرى طبقا هذه النتائج على نصف زمرة معينة من جبر بناخ التطبيقات الخطية المحدودة.

كلمات مفتاحيه: نصف زمرة ,نصف زمرة مستمرة , جبر بناخ.

Abstract :

The main objectives of this work consist in stading the asymptotic behavier near the origine of the distance between elements of a semigroup $(T(t))_{t>0}$ in any Banach algebra A .

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|T(t)-T(t(\alpha+1))\|$$

Where α is a stricly positive real number.
On the other hand we apply its resuts on a certain semigroupe in the Banach algebra of lineair bornded operators .

Key words: Semigroups , strangly continuous semigroup,Banach algebras.

Résumé :

Le but de ce mémoire est d'étudier le compartement asymptotique à lorigine la distance entre deux éléments d'un semigroupe $(T(t))_{t>0}$ dans une algébre de Banach quelconque A ;

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|T(t)-T(t(\alpha+1))\|$$

où **α** est un nombre réel strictement positif.

D'ou autre côté nous appliquons ses résultat sur un certain semigroupe dans l'algébre de Banach d'opérateur linéaire bornés.

Mots clés : Semigroupes, semigroupes fortements continus,algéber de Banach.