Distance entre deux semigroupes dans une algébre de Banach

Faiza Benslimane - Encadrée par: Agti Mohamed

Department of Mathematics, University of Ouargla, Ouargla 30000, Algeria

faforabal44@gmail.com

Abstract

Le but ce travail est l'étude asymptotique des semigroupes,plus précisément le comportement asymptotique d'un semigroupe $T(t)_{t\geqslant 0}$ dans une algébre de banach quelleconque A prés de l'origine

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} sup\|T(t)-T(n+1)t\|.$$

et à titre d'exemple la distance entre deux semigroupes fortement continues d'opérateurs linéaires bornés $\|T(t_n)-T(s_n)\|$ où $(s_n)_{n\geqslant 0},(t_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels strictement positifs convergent vers 0,avec $0<t_n<s_n$.

Mots clés: *Algébres de banach ,semigroupes,semigroupes fortements continues*

1. Introduction

Soit $n\geqslant 0$ un entier et soit $(T(t))_{n\geqslant 0}$ un semigroupe dans une l'algébre de banach.On veut étudian la limite:

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} sup\|T(t)-T((n+1)t)\| \tag{1.1}$$

le piont de déport est la discussion dans semigroupes dans $\mathbb{K}$ C'est-à-dire des applications θ: $k^+\longrightarrow\mathbb{C}$ telles que $\theta(s+t)=\theta(s)\theta(t)$, pour $s\in k^+$,$t\in k^+$, k^+ désignant l'ensemble des élément strictement positifs d'un sous-corps k de R. La deuxiéme constituant est bas sur l'étude de la fonction $f: x\longrightarrow x-x^{\gamma+1}$ sur l'intervalle $[0.1]$ dans le cas on $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un $c_0-semigroupe$ engendré pour opérateur si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un $c_0-semigroupe$ engendré pour un opérateur linéaire (A,D(A)) ,dans espace de banach on introduit la fonction

$$\theta(1/t)=(s-t)\frac{t^{t/(s-t)}}{s^{s/(s-t)}},\quad 0<t<1$$

et on utilise les idées de J.Esterle dans [3] et de N.Kalton,S.Montgomery-smith,K.Oleskiewicz,Y.Tomilov dans[2].

2. Preliminaries

Lemma 2.1 *soit A une algébre de banach commutative unitaire,et soit G l'ensemble des éléments inversibles g de tels que $\varphi(g)=1$ pour tout $\varphi\in\hat{A}$ Alors l'application $x\longrightarrow e^x$ une bigection de Rad(A) sur G.*

Théorèm 2.2 *soit k sous-corps de R,soit $(T(t))_{t\in R^+}$ un semigroupe quasinilpotent dans une algébre de Banach,soit A le sous-algébre fermée engendée pour $(T(t))_{t\in R^+}$ et soit $\gamma\in k^+$. Si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\sup\rho(T(t)-T(\gamma+1)t)<\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1/\gamma}} \tag{2.1}$$

Alors $A/Rad(A)$ est unitaire

Théorèm 2.3 *soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe (non null)fortoment continu d'opérateur borné sur l'espace de Banach E. si $(T(t))_{t>0}$ est quasinilpotent alors il existe $\sigma>0$ telque*

$$\|T(t)-T(1)\|>\theta(1/t)\ pour 0<t<1<\sigma$$

Proposition 2.4 *(4.2.2 page 16 mémoire magister).*

3. Statement of the results

Théorèm 3.1 *Si $\lim\sup\|T((t)-T(n+1)t)\|<\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ alors on bien $T(t)=0$ pour $t>0$,on bien la sous algébre A engendée par le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ est unitiare et il existe $n\in A$ tel que $T(t)=e^{t_n}\ t>0$*

Théorèm 3.2 *si $(T(t)_)t>0$ est une semi-groupe fortement continu d'opérateur bornée un espace de Banach E, et s'il existe deux suites $(t_n)_{n>0}$,$(s_n)_{n>0}$ de réels strictement positif convergente vers $zero$,avec $0<t_n<s_n$,tels que*

$$\|T(t_n)-T(s_n)\|<\theta(\frac{s_n}{t_n}) \tag{3.1}$$

alors le sous algèbre fermèe A_T de $L(E)$ engedreè pour le semigroupe n'est pas quasinilpotent et il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'idempotents de A_T avec $P_nP_{n+1}=P_n$ pour $n\geqslant 1$.

References

[1] J. Esterle and A.Mokhtari, Distance entre lments d?un semigroupe dans une algbre de Banach, Journal of Fonctional analysis 195 (2002) 167-189.

[2] J. Esterle, Distance near the origin between elements of strongly contiuous semigroup, Ark. Math 43 (2005) 365-382.

[3] K. J. Engel, R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer-Verlag, New York 2000.

[4] Z. Bendaoud, Thse Universit Bordeau I et Universit Essenia Oron 2008.

[5] A.Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlage, New York, 1983.

[6] M. Berkani, J. Esterle et A. Mokhtari, Distance entre puissances d'une unit approche borne, J. London Math. Soc., à paraitre

[7] A. Mokhtari, Thse, Universit Bordeaux I, 1988.