UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Numerique

Par : Chourab Naima

Thème

Etude générale d'un équation elliptique

Soutenu publiquement le : 01/07/2019

Devant le jury composé de :

Mme.R.Khorsi	M.A.A université de KASDI Merbah - Ouargla	présidente
Mr.R.Agoune	M.A.A université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.M.Karek	M.A.A université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail à :

A mes parents

-A mes frères

et mes sœurs,et toute la famille

- *A mes chers amies* Safa,Fida,Hadjer,Asma ;Amel et tout amies

- *Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.*

-Et a tous mes professeurs

Remerciement

Premièrement nous remercions le dieu notre créateur. Nous remercions particulièrement notre encadreur :**Mr Mohammed Karek** pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Nous voulons également remercier : **Mme :Rachida Khorsi** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire Nos remerciements vont également aux : **Mr :Rachid Agoune** honorer de leur présence dans ce jury. Nos remerciements chef du département à : **Mr :Mabrouk Meflah** , Nos remerciements s'adressent également à tous ce qui n'ont aidé et n'ont permis de faire aboutir ce travail.

Table des matières

Notations et Préliminaires

- H : Espace de Hilbert.

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v.

- $\Delta \quad = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$

- Ω : Domaine borné de$\mathbb{R}^N$

- $\Gamma, \partial\Omega$: Frontière topologique de Ω

- $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: Point de $\mathbb{R}^N$

- Espace des fonctions test :$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n | f \in \mathcal{C}_c^\infty\}$.

- $L^P(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f est mesurable et $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$ et la norme associe

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

- $L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f est mesurable,il existe une constante c telle que $\|f(x)\| \leq c$ p,p sur Ω } et la norme associe$\|f\|_{\infty} = \inf\{c, \|f(x)\| \leq c\}$

- $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\}$,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Introduction

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes.
L'objectif principal de la résolution de ces équations est d'essayer d'apprendre des informations sur le processus physique qui place ces équations dans leur modèle.
L'importance des équations différentielles est que même les équations les plus simples correspondent à des modèles physiques utiles.
La compréhension d'un processus complexe par nature, est généralement réalisée en combinant ou constituant sur des modèles plus simples et plus fondamentales. Ainsi, une connaissance approfondie de ces modèles, les équations qui les décrivent, et leurs solutions, est la première indispensable étape vers la solution des problèmes plus complexes et réalistes.
En effet, les EDP sont les objets mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes naturels et il ne faut jamais oublier cet aspect. Les EDP que nous rencontrerons dans ce cours seront toujours placées au préalable dans un contexte : physique, mécanique, chimie, biologie, économie, sociologie, ... Les équations de type elliptique qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est l'équation de Laplace

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

d'inconnue $u(x), x \in \Omega \subset R$ et de donnée f.
Dans ce mémoire nous nous intéressent a l'analyse mathématiques des équations aux dérivées partielles , notamment les équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, qui occupent une large place et qui intéressent des spécialistes et des spécialistes du do-

maine des mathématiques et des applications de la physique, de la chimie et de la mécanique de type elliptique, en règle générale ces équations elliptiques correspondent a des modèles physiques stationnaires c'est a dire indépendants du temps, nous allons montrer que le problème aux limites sont bien posé pour ces EDP elliptiques c'est a dire quelle admettent une solution unique, et dépendant continument des données, l'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle.
On a structuré ce mémoire en trois chapitres Dans ce premier chapitre on rassemble toutes les notions et résultats de base que nous utiliserons par la suite. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour l'étude de ce type de problème.
Le deuxième chapitre est consacré à l'approche variationnelle, c'est la partie la plus théorique du mémoire car en utilise certains résultats comme le théorème de Lax-Milgram .
Le troisième chapitre on trouve la formulation variationnelle des certains problèmes elliptique et on va résoudre cette formulation variationnelle par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces fondamentaux

1.1.1 Espaces métriques,espaces topologiques

Norme, distance, topologie

Définition 1.1 *[1] Soit X un espace vectoriel réel, une norme sur X est une application :* $x \mapsto \|x\|$ *de* X *dans* $\mathbb{R}^+$*, telle que :*

(N1) $\|x\| = 0$, $x = 0$.
(N2) $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ $\forall x \in X, \forall \lambda \in R$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,$\forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *Soit X un espace vectoriel réel, un espace normé est un couple* $(X, \|.\|)$ *, où* $\|.\|$ *est une norme sur X.*

Exemple1 On rappelle que, dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ est une norme (la norme euclidienne standard) ; ici, $x = (x_1.....x_n)$.

Définition 1.3 *soit X un ensemble non vide.Une distance sur X est une application*

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

de $X \times X$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*
(D_1) *d(x,y)=0* $\Longleftrightarrow x = y$.

(D_2) *d(x,y)=d(y,x)* $\forall x, y \in X$.
(D_3) *d(x,y)* $\leq$ *d(x,z)+d(z,y)* $\forall x, y, z \in X$.

Définition 1.4 *Un espace métrique est un couple (X,d) où est une distance sur X toute espace vectoriel norme est un espace métrique*

Définition 1.5 ***Espace topologie***
soit E un ensemble quelconque et p(E) famille de toutes les parties de E on dit qu'une sous famille τ *de p(E) est une topologie sur E si elle satisfait les trois conditions suivantes :*
(A_1) $E \in \tau, \phi \in \tau$
(A_2) τ *est stable par réunion (fini ou non) c'est-a-dire :*

$$\forall (\Omega_i)_{i \in I} \subset \tau = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \tau$$

(A_3) τ *est stable par intersection finie c'est-a-dire :*

$$\forall (\Omega_j)_{j \in J} \subset \tau = \bigcap_{j \in J} \Omega_i \in \tau$$

Le couple (E,τ*) s'appelle espace topologique les éléments de* τ *sont dite ensembles ouverts de (E,*τ*) .*

1.1.2 Espaces de Banach ses propriétés

Définition 1.6 *Un espaces* $(X, \|.\|)$ *est de Banach si et seulement si est complet pour la distance associe à* $\|.\|$ *.*

Exemple $E = \mathbb{R}^n$ est un espace de Banach pour la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ tout les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes .
Exemple L'espace vectoriel $E = ([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ $f \in E$ est un espace de Banach .

Proposition 1.7 *Si (X,d) est un espace métrique et* $(E, \|.\|_E)$ *est un espace de Banach , alors* $C_b(X, E)$ *est un espace de Banach .*

Proposition 1.8 *Si $(X, \|.\|_X)$ est un espace normé et $(Y, \|.\|_Y)$ un espace de Banach, alors $L(X,Y)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.9 *On dit qu'une ensemble A d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de A dans A admet un point fixe.*

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.10 *[2] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).On dit que E est muni d'un produit scalaire s'il existe une application :*

$$h : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u,v) \longmapsto h(u,v) = \langle u,v \rangle$$

vérifiant les propriétés suivantes.
Pour tous u, v et $w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle u,v \rangle}$*(Hermitienne).*
2. $\langle \alpha u + \beta w, v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle + \beta \langle w,v \rangle$;$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u,v \rangle + \overline{\beta} \langle u,w \rangle$ *(Sesquilinéaire).*
3. $\langle u,u \rangle \geq 0$ *et* $\langle u,u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *(définie positive).*

Un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Exemple Soit un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur :

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; continue\},$$

$C(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f,g \rangle = \int_\Omega f(u)\overline{g(u)}du,$$

est un espace pré-hilbertien.

Proposition 1.11 *(Inégalité Cauchy-Schwarz).*
Soit E un espace pré-hilbertien sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

$$\forall u,v \in E; |\langle u,v \rangle| \leq \langle u,u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v,v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Preuve.

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$.

D'après (3) de Définition (1.10) on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle tu + \lambda v, tu + \lambda v\rangle &= \langle tu, tu\rangle + \langle tu, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, tu\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\ &= t^2\langle u, u\rangle + t\overline{\lambda}\langle u, v\rangle + t\lambda\langle v, u\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle \\ &= t^2\langle u, u\rangle + 2tRe\lambda\langle v, u\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle \end{aligned} \tag{1.1}$$

et puisque, $Re\lambda\langle v, u\rangle \leq |\lambda\langle v, u\rangle| = |\langle u, v\rangle|$, alors

$$t^2\langle u, u\rangle + 2tRe\lambda|\langle v, u\rangle| + |\lambda|^2\langle v, v\rangle \leq t^2\langle u, u\rangle + 2t|\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2\langle v, v\rangle$$

d'où, de (1.1) $\qquad 0 \leq t^2\langle u, u\rangle + 2t|\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2\langle v, v\rangle$,

ainsi on a, $\qquad P(t) := t^2\langle u, u\rangle + 2t|\langle u, v\rangle| + |\lambda|^2\langle v, v\rangle \geq 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

Le discriminant du trinôme P(t) doit être négatif ou nul.

$\Delta' = (|\langle u, v\rangle|)^2 - \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \leq 0 \Longrightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$

ceci termine la démonstration . ■

Proposition 1.12 *(Norme induite par un produit scalaire).*
Soit E un espace pré-hilbertien sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$.
L'application $\|.\|$ définie sur E par $\|.\| = \sqrt{\langle ., .\rangle}$ est une norme sur E.

Proposition 1.13 *(L'identité du parallélogramme).*
Soit E un espace pré-hilbertien réel sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$..Alors

$$\forall u, v \in E, \quad 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$$

(i.e. dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés).

Remarque 1.14 *Si l'identité de parallélogramme n'est pas satisfaite par la norme induite alors l'espace en question n'est pas un espace de pré-hilbertien.*

Définition 1.15 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{K} = \mathbb{C}$), H est dit espace de Hilbert réel (resp. complexe).

Exemple

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $L^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions à carré intégrable sur Ω

$$L^2 = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.1.4 Espaces fonctionnelles

Définition 1.16 *Espaces fonctionnelles*
les espaces de fonctions C^∞ a support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est note $\mathcal{D}(\Omega)$ (espaces de des fonction test). On dira qu'une suite de fonctions $(U_n)_n$ converge vers U dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

1. *$\exists$ compact $K \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contenant les supports de toutes les toutes les fonctions U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$*
2. *$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha U_n(x) - D^\alpha U(x)| = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout α multi-indice*

1.2 Théorie des distributions

Définition 1.17 *Support*
Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$. On appelle support de f l'ensemble

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.18 *(Espace des fonctions test)*
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ on appelle espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n | f \in \mathcal{C}_c^\infty\}.$$

Proposition 1.19 *Une forme linéaire T est une distribution sur Ω si, et seulement si. pour chaque compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \geq 0$ tels que*

$$|<T,\varphi>| \leq C. \sup_{x\in\Omega,|\alpha|\leq m} |\partial^{\alpha}\varphi(x)|, \forall\varphi \in \mathcal{D}_k(\Omega). \tag{1.2}$$

Théorème 1.20 *On a $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ si, et seulement si, pour toute suite (φ_i) convergente vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $|<T,\varphi_i>|$ converge vers 0 dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Fonctions localement intégrables et distributions régulières :

Définition 1.21 *Une fonction $f(x)$ est dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout compact inclus dans Ω ou encore si :*

$$\int_A |f(x)|dx < \infty \quad compact A \subset \Omega$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables forme un espace noté L^1_{loc}

1.2.1 Dérivation des distributions

Définition 1.22 *(Dérivation des distributions)*
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.pour tout j de $\{1,...,d\}$, on définir la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_j}$par

$$\langle\frac{\partial T}{\partial x_j},\phi\rangle = -\langle T,\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\rangle$$

et donc, par récurrence, pour tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d)$

$$\langle\partial^{\alpha}T,\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^{\alpha}\phi\rangle$$

1.3 Espace de Sobolev

Définition 1.23 ***Les espaces** L^p [6]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq P < \infty$, on définit $L^P(\Omega)$ un espace de Lebesgue par :

$$L^P(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ , } f \textit{ est mesurable et } \textstyle\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pour $1 < P < \infty$ on définit $\|f\|_p$ par :

$$\|f\|_p = (\textstyle\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Si $P=\infty$, nous avons :

$$L^{\infty}(\mathit{\Omega})=\{f:\mathit{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n \text{ , } f \text{ est mesurable,il existe une constante } c \text{ telle que } \|f(x)\|\leq c \text{ p,p sur } \mathit{\Omega}\ \}$$

On note

$$\|f\|_{\infty}=\inf\{c,\|f(x)\|\leq c\}$$

Théorème 1.24 *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f\in L^p(\Omega)$ et $g\in L^q(\Omega)$ avec $1\leq p\leq\infty$,alors $fg\in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega}|fg|\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$

Théorème 1.25 *(Inégalité de Young)*
Soient $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $g\in L^q(\mathbb{R})$ avec $1\leq p\leq\infty$, $1\leq q\leq\infty$ et $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geq 0$.Alors

$$f\star g\in L^r(\mathbb{R}) et \|f\star g\|_{L^r(\mathbb{R})}\leq\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

Théorème 1.26 *(Inégalité de Cauchy Schwartz)*
soit $f\in L^2(\Omega)$ et $g\in L^2(\Omega)$, alors $fg\in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega}|fg|\leq\|f\|_2\|g\|_2$$

Espace de Sobolev

Définition 1.27 *soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$,L'ensemble :*

$$H^m(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega):D^{\alpha}u\in L^2(\Omega),\forall\alpha\in\mathbb{N}^n;|\alpha|\leq m\},$$

où $\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha 1}...\partial x_n^{\alpha n}}$ désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$,$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

Remarque 1.28 *Pour m=1*

$$H^1(\mathit{\Omega})=\{u\in L^2(\mathit{\Omega}):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\mathit{\Omega}),1\leq i\leq m\}$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

et l'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

Définition 1.29 $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)} dans H^1$
=sous espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions "nulles"sur$\Gamma = \partial u$

Définition 1.30 *(L'espace $W^{1,p}(\Omega)$)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p | \exists g_1, ..., g_n \in L^p telque \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, 2, ..., N\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ et \ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} ... \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \textstyle\sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$$

Remarque 1.31 *En d'autre terme, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, ..., n$*

1.4 Théorèm de trace et formules de Green

Théorème 1.32 *[5](de Trace) Soit Ω un ouvert borné I-régulier de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

1. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*
2. *L'application*

$$\gamma_0 : \begin{cases} (\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|.\|_{H^1(\Omega)}) \longrightarrow (C^0(\Gamma), \|.\|_{L^2(\Gamma)}), \\ \qquad\qquad v \longmapsto v_\Gamma, \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge par continuité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$:

$$\exists c > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

γ_0 appelée application trace. on note $\|\gamma_0\|$ sa norme :

$$\|\gamma_0\| = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\|v_\Gamma\|_{L^2}(\Gamma)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

Théorème 1.33 *(de Trace) Soit Ω un ouvert borné I-régulier de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

1. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$.*
2. *L'application γ_1*

$$\gamma_1 : \begin{cases} (\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|.\|_{H^2(\Omega)}) \longrightarrow (C^0(\Gamma), \|.\|_{L^2(\Gamma)}), \\ \qquad\qquad v \longmapsto \frac{\partial v}{\partial \eta}, \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge par continuité de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$:

$$\exists c > 0, \forall v \in H^2(\Omega), \|\gamma_1(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|v\|_{H^2(\Omega)}$$

γ_1 appelée application trace. on note $\|\gamma_1\|$ sa norme :

$$\|\gamma_1\| = \sup_{0 \neq v \in H^2(\Omega)} \frac{\|\frac{\partial v}{\partial \eta}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^2(\Omega)}}$$

1.4.1 Formules de Green

1. pour tout $u \in H^2(\Omega)$,$v \in H^1(\Omega)$ on a :
$$-\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla vdx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\theta$$
Où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée vers l'extérieur.

2. soit $w \in (C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))^n$ et $v \in (C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))$ on a :
$$\int_\Omega (div\ w) \cdot vd\Omega = -\int_\Omega w \nabla v\ d\Omega + \int_{\partial\Omega} w\ \eta\ v\ d\Gamma$$
la formule (1) constitue la formule fondamentale de Stokes.

3. Soient $u, v \in (C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))$ on a pour tout $i = \overline{1.n}$
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\ d\Omega = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} u\ v\ \eta_i d\Gamma (\eta_i\ \ i^{me} composante\ de \Omega)$$
la formule (2) est une conséquence immédiate de la formule (1).

4. soient $u \in (C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}))$ et $v \in (C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))$ on a :
$$\int_\Omega \Delta u\ v\ d\Omega = -\int_\Omega \nabla u\ \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma$$
la formule (3) dite première formule de Green.

5. Soit $u, v \in (C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}))$ on a :
$$\int_\Omega \Delta u\ v d\Omega = \int_\Omega u \Delta\ v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u \right) d\Gamma$$
la formule (4) dite seconde formule de Green.

1.4.2 Inégalité de Poincaré

soit un ouvert Ω il existe une constante c_p, dépendant, seulement de Ω tq :
$$\int_\Omega v^2 d\Omega \leq c_p \int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega \qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Remarque 1.34 *cet inégalité est trivialement fausse dans* $H^1(\Omega)$

Corollaire 1.35 *Conséqeunce de inégalité de Poincaré :*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega \geq \frac{1}{1+c_p}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Si de plus Ω *est connexe, on peut établir les généralisation très utiles suivantes de l'inégalité de Poincaré*

1.4.3 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_\Omega v^2 d\Omega \leq \left(|\nabla v|^2 d\Omega + \frac{1}{mes}\left(\int_\Omega v d\Omega\right)^2 \right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

1.4.4 Inégalité de Poincaré-Friedrichs

$(mes\Gamma > 0)$

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\left(|\nabla v|^2 d\Omega + \left(\int_{\partial\Omega} v d\Gamma\right)^2 \right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Définition 1.36 ***Base hilbertienne*** *Soit* H *un espace de Hilbert . On appelle base hilbertienne de* H *une famille dénombrable* $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset H$ *qui est orthonormale* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ *pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans* H *alors on a* $\overline{\{e_i\}} = H$

Définition 1.37 *[8] Que ce soit* $f \in L^2(\Omega)$ *Pour tous* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *On a*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \quad dx = 0$$

C'est f(x)=0 sur Ω

Définition 1.38 *Que ce soit un* σ *disciple de* Ω *vers* $\mathbb{R}$ *afin que tous ses chars de* $L^2(\Omega)$ *(on pose* $\sigma \in L^2(\Omega)^N$ *)*
Nous disons σ *Accepte la divergence du sens faible dans*$L^2(\Omega)$ *Si tout* $\omega \in L^2(\Omega)$*,*

Où ,Pour tous $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *.On a*

$$\int_\Omega \sigma(x)\nabla\varphi(x) \quad dx = \int_\Omega \omega(x)\varphi(x) \quad dx$$

ω *est appelé divergence faible de* σ *Et son symbole div(*σ*).*

Lemme 1 *[8] Que ce soit σ de $L^2(\Omega)^N$.*
Si trouvé constant C>0 Pour que,Pour tous φ in$\mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\left|\int_\Omega \sigma(x))\nabla\varphi(x) \quad dx\right| \leq C \left\|\varphi(x)\right\|_{L^2}(\Omega)$$

Donc Il accepte une divergence au sens faible.

Chapitre 2

Théorème de Lax-Milgram

2.1 Formes linéaires et bilinéaires

[4] Comme nous l'avons, la résolution d'une équation aux dérivées partielles se ramène à celle d'un problème variationnel. Nous abordons dans ce chapitre les outils de base pour l'étude des formulations variationnelles

Définition 2.1 *On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert H . Une forme linéaire $l(.)$ vérifie donc les propriétés suivantes :*
$-l(\beta w) = \beta l(w) \qquad \forall w \in H$ *et* $\forall \beta \in \mathbb{R}$
$-l(w_1 + w_2) = l(w_1) + L(w_2) \qquad \forall w_1, w_2 \in H$

Définition 2.2 *Une forme linéaire $l(.)$ sur l'espace de Hilbert H muni de la norme $\|.\|_H$, est dite continue s'il existe une constante C telle que :*

$$l(w) \leq C\|w\|_V \qquad \forall w \in V \tag{2.1}$$

Exemple
La fonctionnelle (l_f) de l'exemple précédent est continue. En effet, de l'inégalité de Cauchy, on a :

$$|l_f| = \left| \int_\Omega f(x)w(x)dv \right| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|w\|_{0,\Omega}$$

et l'inégalité (2.1) suit en posant $C = \|f\|_{0,\Omega}$.

Définition 2.3 *L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert H est appelé espace dual de H et est noté H'.*

Définition 2.4 *Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H est une application (a) qui associe à un couple $(u, w) \in H \times H$ un scalaire noté $a(u, w)$ satisfaisant :*
-$a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) = \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w) \quad \forall u_1, u_2, w \in H et \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$
-$a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in H et \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$
Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

Définition 2.5 *Une forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite continue sur $H \times H$ s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(u, w)| \leq C\|u\|_H\|w\|_H \qquad \forall u, w \in H \tag{2.2}$$

Définition 2.6 *Une forme bilinéaire a(.,.) est dite symétrique si :*

$$a(u, w) = a(w, u) \qquad \forall u, w \in H$$

Définition 2.7 *Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique a(.,.) s'il existe une constante strictement positive α telle que :*

$$a(w, w) \geq \alpha\|w\|_H^2 \qquad \forall w \in H \tag{2.3}$$

Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive que nous reverrons un peu plus loin.

2.2 Théorème de Lax-Milgram

Nous en arrivons au résultat le plus fondamental de cette section. Beaucoup de formulations variationnelles entrent dans le cadre de ce théorème.

Théorème 2.8 *Soit H un espace de Hilbert et soit l(.) et a(.,.) des formes linéaire et bilinéaire continues sur H et $H \times H$ respectivement ($l \in H'$). Si de plus a(.,.) est coercive, alors il existe une unique solution (u) du problème variationnel :*

$$\begin{cases} trouver\ une\ fonction\ u \in H\ telle\ que \\ a(u, w) = l(w) \qquad \forall w \in H \end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique. La forme bilinéaire étant coercive, elle satisfait les propriétés d'un produit scalaire sur H et la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à $\|.\|_H$. L'espace H muni de ce produit scalaire est donc un espace de Hilbert. Du théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in H$ (qui dépend de l) tel que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H$$

On a donc l'existence. En ce qui concerne l'unicité, s'il existait deux solutions u_1 et u_2, alors en soustrayant, on aurait :

$$a(u_1 - u_2, w) = l(w) - l(w) = 0 \quad \forall w \in H$$

et en particulier, en prenant $w = u_1 - u_2$, la coercivité entraîne que $u_1 = u_2$, ce qui complète la démonstration. On trouvera la généralisation de ce résultat dans Ciarlet [7] ■

Théorème 2.9 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram et si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, le problème variationnel (2.4) est équivalent au problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \text{ telle que} \\ J(u) = \inf\limits_{w \in H} J(w) = \inf\limits_{w \in H} \frac{1}{2} a(w, w) - l(w) \end{cases} \tag{2.5}$$

La fonctionnelle J est souvent appelée fonctionnelle d'énergie dans les applications.

Preuve. En premier lieu, on démontre que si u est l'unique solution du probème variationnel(2.4) alors u minimise forcément la fonctionnelle J sur tout l'espace H . Soit donc $w \in H$ quelconque. On peut toujours écrire que :

$$w = u + (w - u) = u + w_1 \qquad (w_1 = w - u)$$

On a alors :

$$J(w) = J(u + w_1) = \frac{1}{2} a(u + w_1, u + w_1) - l(u + w_1)$$

Puisque a est bilinéaire et l linéaire, on a :

$$J(w) = \frac{1}{2} [a(u, u) + a(u, w_1) + a(w_1, u) + a(w_1, w_1)] - l(u) - l(w_1)$$

et la symétrie de a nous donne :

$$J(w) = \left(\frac{1}{2}a(u,u) - l(u)\right) + (a(u,w_1) - l(w_1)) + \frac{1}{2}a(w_1,w_1)$$

Dans le terme de droite, on reconnait dans la première parenthèse $J(u)$ tandis que l'expression à l'intérieur de la deuxième parenthèse est nulle puisque u est la solution du problème (2.4). Enfin, la coercivité de a nous assure que le dernier terme est toujours positif. On a donc :

$$J(w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w_1,w_1) \geq J(u)$$

et donc $J(u)$ est certainement inférieure ou égale à $J(w)$. Puisque ce raisonnement est valide quel que soit $w \in H$, u minimise bien la fonctionnelle J sur l'espace H .
Inversement, si u minimise J, on démontre que u est aussi une solution du problème variationnel (2.4). Considérons pour ce faire la fonction de la variable réelle ϵ définie par :

$$g(\epsilon) = J(u+\epsilon w) = \frac{1}{2}a(u+\epsilon w, u+\epsilon w) - l(u+\epsilon w)$$

Puisque u minimise J, la fonction g possède un minimum local en $\epsilon = 0$, et ce quel que soit w. On doit donc avoir $g'(0) = 0$, quel que soit w. Mais en développant, on trouve :

$$g(\epsilon) = J(u) + \epsilon(a(u,w) - l(w)) + \frac{\epsilon^2}{2}a(w,w)$$

et donc :

$$g'(\epsilon) = a(u,w) - l(w) + \epsilon a(w,w) \quad et \quad g'(0) = a(u,w) - l(w)$$

La condition $g'(0) = 0$ quel que soit w est donc équivalente à l'équation (2.4). ■

2.3 Équation différentielle ordinaire (EDO)

Définition 2.10 *Une équation différentielle est une relation entre une variable indépendante x oû (t), une fonction inconnue $y = f(x)$ et ces dérivées*

$$y', y'', y''', ..., y^n.$$

On peut écrire symboliquement une (ED) comme suit :

$$F(x, y', y'', y''', ..., y^n) = 0,$$

où

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Si $y = f(x)$ une fonction d'une seule variable indépendante (x). Alors l'équation est dite équation différentielle ordinaire (EDO) :

2.3.1 Équation aux dérivées partielles (EDP)

Définition 2.11 *[3] Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ a valeur dans $\mathbb{R}$*

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u les variables $x_1, x_2, ..., x_n$ et un nombre fini de dérivées partielles de u :

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, D_1u, D_2u, ...D_nu, D_1D_1u, .D_1D_2u, ..D_1D_nu, ..D^\alpha u), \tag{2.6}$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

2.4 Solution d'une EDP

Définition 2.12 *On dit que u est une solution de l'EDP dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$; si après substitution de u et de ses dérivées partielles, F s'annule pour tout*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega.$$

Définition 2.13 *Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ dans $\mathbb{R}^2$, et*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

une application. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$,et

$$f_1 :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie par

$$f_1(x) = f(x, y_0)$$

on dit que f admet une dérivée partielle par rapport á la première variable en (x_0, y_0) lorsque f_1 est dérivable en x_0. On note $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou encore $\partial_x f(x_0, y_0)$ le nombre $f_1(x_0)$. De la même manière, si elle existe, on note $\partial_2 f(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport á la deuxième variable en (x_0, y_0).

2.5 Ordre d'une EDP

Définition 2.14 *Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, ..., x_n$ et des dérivées partielles de f par rapport à ces variables, c-à-d., une équation de la forme*

$$F\left(x_1, ..., x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

est une équation aux dérivées partielles.
Une telle équation est dite d'ordre m quand elle contient au moins une dérivée d'ordre m sans en contenir d'autres d'ordre supérieur. Toute fonction $u = f(x_1, ..., x_n)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci. L'équation ci-dessus est dite linéaire lorsque F est une combinaison linéaire de f et ses dérivées.

2.6 Classification des EDPs linéaires du second ordre

Ce paragraphe est destiné à distinguer trois types d'équations, qui se révèlent différentes tant du points de vue mathématique(propriétés des solution, méthodes de démonstration) que physique.
Étudions le cas des EDP dépendant des variables réelles,

Définition 2.15 *L'équation aux dérivées partielles (3.6) donnée :*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = F(x, y) \quad \forall a, b, c, \alpha, \beta et \gamma \quad constantes \tag{2.7}$$

est dite de type :
-Hyperbolique lorsque

$$\triangle = b^2 - 4ac > 0,$$

-Parabolique lorsque

$$\triangle = b^2 - 4ac = 0,$$

-Elliptique lorsque

$$\triangle = b^2 - 4ac < 0,$$

où $\triangle = b^2 - 4ac$ *est la discriminant de l'équation (2.7)*

2.7 Problème bien posé

[3] Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a :
- Existence d'une solution du problème.
- Unicité de cette solution.
- Stabilité par rapport aux données du problème (Conditions initiales et aux bords).

Si la solution se change beaucoup quand les données se changent peu on dit que le problème est sensible aux données.

2.8 Étude du Laplacien

2.8.1 Le problème de Dirichlet

[5] On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet. Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\Gamma := \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante : Déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

où f est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel H. Un cadre classique pour résoudre cette edp serait de considérer $f \in C(\overline{\Omega})$ et consisterait à chercher une solution dans $C^2(\overline{\Omega})$. Historiquement, ce fut également la première approche proposée pour ce type de problème. Nous allons plutôt utiliser les espaces de Sobolev, comprendre les dérivées au sens des distributions et la condition aux limites au sens de la théorie des traces

.

Définition 2.16 *Le problème (2.8) est bien posé au sens d'Hadamard dans les espaces fonctionnels V et H si pour tout $f \in H$ il existe une unique solution $u \in V$ et si de plus*

$$\|u\|_V \leq C\|f\|_H \ \ \forall f \in H,$$

ou la constante $C > 0$ est indépendante de u et f.
Un travail préliminaire à la résolution du problème (2.8) consiste à en chercher des formulations équivalentes.

Proposition 2.17 *Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivants sont équivalents :*

1. *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*
2. *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :*
$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.9}$$
3. *Trouveru $\in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle*
$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Cette dernière formulation s'appelle le principe de Dirichlet.
La formulation 2. correspond en physiques au principe des travaux virtuels. En mathématiques nous l'appelons plutôt formulation variationnelle. La troisième formulation correspond à une approche énergétique du problème et affirme que la solution est la fonction qui minimise une certaine énergie.
Dire que les trois formulations sont équivalentes signifie que si u est solution de l'un des problème elle est aussi solution des deux autres.

Définition 2.18 *Une solution à l'un quelconque des problèmes tous équivalents formulés dans la proposition ci-dessus est appelée une solution faible ou solution variationnelle du problème de Dirichlet (2.8).*

Preuve. de proposition : Voire[5] ■

Corollaire 2.19 *Si l'un quelconque des problèmes tous équivalents de la proposition précédente admet une solution, alors cette solution est unique.*

Existence d'une solution au problème de Dirichlet

Nous avons montré dans la proposition 2.19 que la problème de Dirichlet (2.8) était équivalent à la formulation (2.9). En utilisant le théorème de Lax-Milgram,nous allons montrer :

Proposition 2.20 *(Existence d'une solution au problème de Dirichlet)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ que l'on suppose borné dans une direction et soit $f \in L^2(\Omega)$.
Alors il existe une solution unique au problème :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram avec
$-V := H_0^1(\Omega)$,
$-a(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$
$-\langle f, v \rangle_{V' \times V} := \int_\Omega f(x) v(x) dx$ Il est clair que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue (et symétrique) ainsi que la forme linéaire F. Vérifions que $a(u, v)$ est elliptique. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Poincaré puisque l'inégalité :

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

entraîne bien que :
$a(u, u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{C+1} (\int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx) = \frac{1}{C+1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ ■

2.8.2 Le problème de Neumann

Dans ce paragraphe nous allons refaire le même genre d'étude que pour le problème de Dirichlet. Nous choisissons cette fois des conditions aux limites de type Neumann. Le problème s'énonce de la façon suivante. Les fonctions f et g étant données, trouver une solution au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.10}$$

2.9 Conditions de Dirichlet et de Neumann

Les conditions de Dirichlet imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de Ω , c'est-à-dire sur Ω et sa frontière, et d'être alors égale à une fonction donnée sur la frontière de Ω.
Les conditions de Neumann imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de Ω, c'est-à-dire sur Ω et sa frontière, et d'admettre en tout point de la frontière de Ω ,une dérivée $\partial u/\partial N$ suivant le vecteur normal N orienté vers l'extérieur de la frontière de Ω (supposée suffisamment régulière) égale à une fonction donnée.

Chapitre 3

Les équations elliptiques

3.1 Le premier problème

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ borné de $\partial\Omega$ lipschitzienne $f \in L^2(\Omega)$,$g \in L^2(\partial\Omega)$ on considérer le problème suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \;\; dans \;\; \Omega \\ \\ u = g \;\; sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Le choix de la régularité la donnée g soulevé une difficulté .En effet ,rappelons que l'application de trace γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, nous allons faire l'hypothèse suivante sur g
$g \in L^2(\partial\Omega)$ on ce qui est équivalente il existe $G \in H^1(\Omega)$ tq $\gamma_0(G) = g$

la fonction G s'appelle un relèvement de la fonction g et de plus $\|G\|_{H_1(\Omega)}$ permet de mesurer g.

$$\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|G\|_{H_1(\Omega)}.$$

supposons que la solution $u \in H^2(\Omega)$.
on pose $u = \tilde{u} + G$ alors le problème (3.1) devient

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f + \Delta G \quad dans \;\; \Omega \\ \tilde{u} = 0 \;\; sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation de problème (3.2) par une fonction test v

$$-\Delta\tilde{u}v = fv + \Delta Gv$$

par intégration sur Ω on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta\tilde{u}v \quad d\Omega = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla v \quad d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}.v \quad d\Omega = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega$$

on choisit $v = 0$ sur $\partial\Omega$ implique que :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}.v \quad d\Omega = 0 \Rightarrow v \in H_0^1(\Omega).$$

Devient :

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v \quad d\Omega = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Nous trouvons qu'il vaut mieux choisir $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v \quad d\Omega$$

$$L(v) = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc on trouve le problème variationnelle suivante :

$$\begin{cases} Trouver \quad \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \quad tq : \\ \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v \quad d\Omega = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

3.1.2 Existence et unicité

: En utilisant le Théorème de Lax-Milgram

1- $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2-a(.,.)est continue

On a

$$|a(\tilde{u}, v)| = \left| \int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla v \quad d\Omega \right| \leq \int_\Omega |\nabla\tilde{u}\nabla v| \quad d\Omega$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned} |a(\tilde{u}, v)| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Comme

$$\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

Implique que :

$$|a(\tilde{u}, v)| \leq \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors a(.,.) est continue.

3- a(.,.) est coercive

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 \quad d\Omega &\Rightarrow a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\Leftrightarrow a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\Rightarrow a(.,.) \ \ est\, coercive \quad en \quad prend \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

4-L(.) est continue

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta G v \quad d\Omega \right| \\ &\leq \int_\Omega |fv| \quad d\Omega + \int_\Omega |\Delta G v| \quad d\Omega \end{aligned}$$

D après L'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\Delta G| \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \quad d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta G\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta G\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisons L'inégalité de Poincaré on obtient :

$$|L(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta G\|_{L^2(\Omega)}\right) C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

on pose $\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta G\|_{L^2(\Omega)}\right) C = C_1$ et comme :

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

On trouve :

$$|L(v)| \leq C_1\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors L(.) est continue.

Donc D'après le Théorème de Lax- Milgram le problème (3.3) admet une solution faible unique $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$

3.1.3 Équivalence avec L'équation

On a la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v \quad d\Omega = \int_\Omega fv \quad d\Omega + \int_\Omega \Delta Gv \quad d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Comme D(Ω) dense dans $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla v \quad d\Omega &= \int_\Omega (f+\Delta G)v \quad d\Omega \ \ \forall v \quad \in D(\Omega) \\ \langle\nabla\tilde{u}, \nabla v\rangle_{D'\times D} &= \langle f+\Delta G, v\rangle_{D'\times D} \quad \forall v \quad \in D(\Omega) \\ \langle-\Delta\tilde{u}, v\rangle_{D'\times D} &= \langle f+\Delta G, v\rangle_{D'\times D} \quad \forall v \quad \in D(\Omega) \end{aligned}$$

Donc : $-\Delta\tilde{u} = f + \Delta G$ au sens du distribution

et comme $f \in L^2(\Omega) et L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$

alors $-\Delta(\tilde{u} + G) = f$ dans $L^2(\Omega)$

et comme $\tilde{u} + G = u \Leftrightarrow -\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$

et comme $\tilde{u} \in D(\Omega) \Rightarrow \tilde{u}_\Gamma = 0 \Rightarrow u = g$

et donc

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad pp \quad dans \quad \Omega \\ u = g \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

3.2 Le deuxième problème

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ borné de $\partial\Omega$ lipschitzienne $f \in L^2(\Omega)$, on considérer le problème suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u(x) = f \ \ pp \ \ dans \ \ \Omega \\ u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

C Une fonction totalement positive sur Ω et continue .
Rapprochement du problème (3.4)

3.2.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation de problème (3.4) par une fonction test v

$$-\Delta u(x)v(x) + c(x)u(x)v(x) = f(x)v(x)$$

par intégration sur Ω on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) \ \ dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) \ \ dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \ \ dx$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) \ \ dx = \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x) \ \ dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \ \ ds$$

on choisit $v = 0$ sur $\partial\Omega$ implique que :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \ \ ds = 0 \Rightarrow v \in H_0^1(\Omega).$$

Devient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x) \ \ dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) \ \ dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \ \ dx \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Nous trouvons qu'il vaut mieux choisir $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x) \ \ dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) \ \ dx$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x) \quad dx$$

3.2.2 Existence et unicité

En utilisant le Théorème de Lax-Milgram
1- $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
a(u,v) forme bilinéaire continue
a(.,.) forme bilinéaire car Intégration linéaire ,et opérateur ∇ linéaire .
2-a(.,.) est continue
On a

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) \quad dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x) \quad dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(x)\nabla v(x) \quad dx| + \int_\Omega |c(x)u(x)v(x)| \quad dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(x)| \, |\nabla v(x)| \quad dx + sup_{x\in\Omega} c(x) \int_\Omega |u(x)| \, |v(x)| \quad dx
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + sup_{x\in\Omega} |c(x)| \, \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq max\left(1, sup_{x\in\Omega} |c(x)|\right) \left[\|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
&\leq max\left(1, sup_{x\in\Omega} |c(x)|\right) \\
&\left[\left(\|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \right]
\end{aligned}$$

En utilisons la relation $a + b \leq \sqrt(2) \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\leq 2max\left(1, sup_{x\in\Omega} |c(x)|\right) \left(\|\nabla u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla v(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2M \, \|u(x)\|_{H_0^1(\Omega)} \|v(x)\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad M = 2max\left(1, sup_{x\in\Omega} |c(x)|\right)
\end{aligned}$$

Alors a(.,.) est continue.

a(.,.) est coercive

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u(x)^2 \quad dx + \int_\Omega c(x)\,(u(x))^2 \quad dx \right| \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \quad dx + C_0 \int_\Omega |u(x)|^2 \quad dx \qquad\qquad C_0 = inf_{x\in\Omega} C(x) \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_0 \, \|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq min\,(1, C_0) \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\geq \alpha.\, \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \qquad\qquad \alpha = min\,(1, C_0)
\end{aligned}$$

donc a(.,.) est coercive .

F(.)forme linéaire car Intégration linéaire .

F(.) est continue

$$\begin{aligned}
|F(v)| &= \left| \int_\Omega f(x) v(x) \quad dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x)|\,|v(x)| \quad dx
\end{aligned}$$

D après L'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \qquad\qquad f \in L^2(\Omega) \\
&\leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C\sqrt{2} \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M.\, \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \qquad\qquad M = C\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Alors F(.) est continue.

Donc D'après le Théorème de Lax- Milgram le problème (3.5)

admet une solutionl faible unique $u \in H^1_0(\Omega)$

3.2.3 Equivalence avec L'équation

(3.4)et (3.5) **Le premier cas** :

Supposons que la solution de la formule variationnelle soit régulière et Ω régulière , C'est à dire $u \in H^2(\Omega)$
Donc, nous pouvons appliquer une formules de Green-théorèm(1.5.1)

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x) \quad dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) \quad dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \quad ds$$

Donc

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) \quad dx = -\int_\Omega \Delta u(x)v(x) \quad dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \quad ds \tag{3.6}$$

on pose l'équation (3.6) dans l'équation (3.5)

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x) \quad dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x) \quad dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \quad ds = \int_\Omega f(x)v(x) \quad dx$$

alors :

$$\int_\Omega \left(-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x)\right) v(x) \quad dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \quad ds$$

pour

$$v \in H_0^1(\Omega)$$

on trouve :

$$v|_\Gamma = 0$$

Alors

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v(x) \quad ds = 0$$

donc :

$$\int_\Omega \left(-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x)\right) v(x) \quad dx = 0 \qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

puisque $u \in H^2(\Omega)$ donc $\nabla u \in H^1(\Omega)$ alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$
Donc, selon définition (1.37)

$$-\Delta u + cu = f$$

D'autre part

Basé sur la définition$H_0^1(\Omega)$ qui définit les fonctions

de$H^1(\Omega)$ nul sur le bord Nous trouvons que

u =0 sur le bord Γ

On trouve donc une équivalence entre (3.4)et (3.5)

Le deuxième cas :

Supposons que la solution de la formule variationnelle soit irrégulière et Ω est irrégulier

Donc on ne peut pas appliquer la formules de Green

Mettre en équation (3.5) $\sigma = \nabla u$ Il est suiveur radial de $(L^2\Omega)^N$ donc

$$\int_\Omega \sigma(x).\nabla v(x) \quad dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x) \quad dx = \int_\Omega f(x)v(x) \quad dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{$**$}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \sigma(x).\nabla v(x) \quad dx\right| &= \left|-\int_\Omega c(x)u(x)v(x) \quad dx + \int_\Omega f(x)v(x) \quad dx \quad \right| \\ &\leq \int_\Omega |c(x)u(x)v(x)| \quad dx + \int_\Omega |f(x)v(x)| \quad dx \\ &\leq sup_{x\in\Omega} |c(x)| \int_\Omega |u(x)v(x)| \quad dx + \int_\Omega |f(x)v(x)| \quad dx\end{aligned}$$

D après L'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned}&\leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$C'est lemme (1) on trouve que σ Accepte la divergence du sens faible dans

$L^2(\Omega)$

C'est à dire :

$$\exists div(\sigma) \qquad \int_\Omega \sigma.\nabla v \quad dx = -\int_\Omega div(\sigma)v \quad dx$$

$$div(\sigma) = div(\nabla u) = \Delta u$$

remplacé dans (**) on trouve :

Et de là on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) \quad dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) \quad dx + = \int_{\Omega} f(x)v(x) \quad dx$$

Donc, selon définition (1.37) :

$$\int_{\Omega} \left(-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x)\right) v(x) \quad dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

on a

$-\Delta u + cu = f \in L^2(\Omega)$ Parce que $u \in H^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$

donc

$$-\Delta u + cu = f \qquad sur(\Omega)$$

Et de l'autre

Basé sur la définition$H_0^1(\Omega)$ qui définit les fonctions

de$H^1(\Omega)$ nul sur le bord Nous trouvons que

u =0 sur le bord Γ

On trouve donc une équivalence entre (3.4)et (3.5).

CONCLUSION

Le travail principal de ce mémoire c'est l'étude théorique de certains problèmes linéaires, donc nous utilisons les résultats principaux en analyse fonctionnelle. Dans ce travail, nous avons également essayé de donner une idée générale sur l'existence et de l'unicité de La solution faible des problèmes elliptiques de type de Dirichlet et de Neumann par la méthode de la formulation variationnelle
.

Bibliographie

[1] B.Said-Houari et N. Tatar, " Étude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un problème hyperbolique", 2003. Mémoire de magister en mathématiques, Université de Annaba.

[2] M. BOUHENNI Hocine Théorème de Lax-Milgram dans les espaces de Banach et applications

[3] Georges Koeper , " ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES", univ- Paris 5- 2001.

[4] Les éléments finis de la théorie à la pratique André Fortin Professeur titulaire Département de mathématiques et de statistique Université Laval et André Garonne Professeur titulaire Département de génie mécanique École Polytechnique de Montréal ©1997-2011

[5] A. Meunier Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles Maître de conférences, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy 1, B.P.239, F-54506 VandŒvre-lès-Nancy Cedex, Alexandre.munnier@iecn.u-Nancy.fr

[6] Haim Brizes, "Functiognal analysis, Sobolev espaces and PDE", Springer

[7] **Ciarlet, P.G**."The Finite Element Method for Elliptic problems". North-Holland, Amsterdam,1986

[8] Allaire Gregire . Analyse numerique et optimisation . editions de l'école polytechnique . Paris 2005

ملخص :

العمل الرئيسي لهذه المذكرة هو الدراسة النظرية لبعض المشاكل الخطية ، لذلك نستخدم النتائج الرئيسية في التحليل الوظيفي

في هذا العمل ، حاولنا أيضًا إعطاء فكرة عامة عن وجود ووحدانية الحل الضعيف للمشكلات الإهليلجية تحت الشروط من نوع ديريكلي ونيومان بواسطة طريقة التقريب التغايري .

أهم الكلمات المفتاحية:ـ الصيغة التغايرية، وجود ووحدانية الحل،الحل الضعيف

Résumé:

Le travail principal de ce mémoire c'est l'étude théorique de certains problèmes linéaires, donc nous utilisons les résultats principaux en analyse fonctionnelle.

Dans ce travail, nous avons également essayé de donner une idée générale sur l'existence et de l'unicité de La solution faible des problèmes elliptiques de type de Dirichlet et de Neumann par la méthode de la formulation variationnelle .

Les mots clés importants : la formule variationnelle , existences et l'unicité d'un solution, la solution faible .

Abstract :

The main work of this memory is the theoretical study of some linear problems, so we use the main results in functional analysis.

In this work, we have also tried to give a general idea about the existence and uniqueness of the weak solution of elliptic problems of Dirichlet type and Neumann by the method of variational formulation.

The most important key words: variation formula , existence the week solution,and uniqueness